ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 4, 1971 Механика

В. А. КАРПЕНКО

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ШАРА

Рассматривается задача о вдавливании двух одинаковых жестких симметрично расположенных штампов в упругий шар. Предполагается, что поверхность шара вне штампов свободна от напряжений и под штампами касательные напряжения отсутствуют.

Впервые контактную задачу для шара в такой постановке изучали Б. Л. Абрамян, Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблоян [1] методом „парных" рядов.

В настоящей работе задача приведена к интегральному уравнению первого рода относительно контактного давления. Изучены основные свойства ядра уравнения и указана возможная схема его приближенного решения при малых значениях углов контакта.

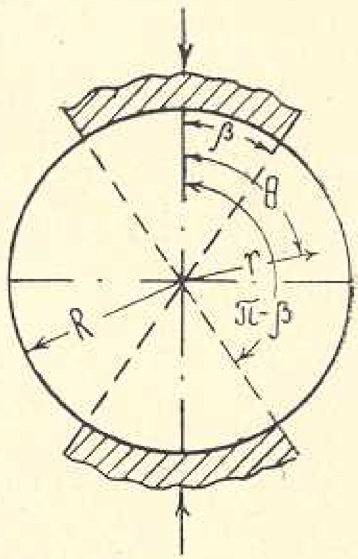
1. Граничные условия для рассматриваемой задачи в сферических координатах r, φ, θ выражаются следующими соотношениями:

$$u_r\big|_{r=R} = -\delta(\theta) \quad \text{при}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \beta \quad \text{и} \quad \pi-\beta \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad (1.1)$$

$$\tau_{r\theta}\big|_{r=R} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad (1.2$$

$$\sigma_r\big|_{r=R} = 0 \quad \text{при} \quad \beta < \theta < \pi-\beta \qquad (1.3)$$



Фиг. 1.

В. Ф. Бондарева [2] получила в квадратурах решение задачи о деформировании упругого шара нормальными нагрузками $\sigma(\theta)$. Решение уравнений равновесия в перемещениях имеет следующий вид:

$$u_r(r, \theta) = \frac{R}{2\pi G}\int\limits_0^\pi \sigma(\alpha) H_r(r/R, \theta, \alpha)\sin\alpha d\alpha \qquad (1.4)$$

где

$$H_r(x, \theta, \alpha) = \frac{1-2\nu}{1+\nu}\frac{\pi x}{2} + \frac{1-x^2}{2x}\left(2x\frac{\partial U}{\partial x} + U\right) +$$

$$+2(1-\nu)\frac{1+x^2}{x}U+\frac{1}{x}\operatorname{Re}\int_0^1\left(\frac{Px^2+Q}{y^{1+n_1}}+\frac{1}{y^2}\right)U(xy)\,dy$$

$$U(x,\,\theta,\,\alpha)=\frac{K(k)}{h}-\frac{\pi}{2}(1+x\cos\theta\cos\alpha) \tag{1.5}$$

$$h^2=(1-x)^2+4x\sin^2\frac{\theta+\alpha}{2}$$

$$k^2=\frac{4x\sin\theta\sin\alpha}{h^2},\quad x=r/R$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Константы P и Q зависят только от коэффициента Пуассона ν.

$$P=4\nu^2-6\nu+2+i\frac{8\nu^3-12\nu^2+\nu+3}{\sqrt{3-4\nu^2}}$$

$$Q=4\nu^2-2\nu-1+i\frac{8\nu^3-4\nu^2-5\nu+2}{\sqrt{3-4\nu^2}}$$

$$2n_1=-(1+2\nu)+i\sqrt{3-4\nu^2}$$

Удовлетворяя с помощью (1.4) граничным условиям (1.1) — (1.3) получим для определения контактного давления $q(\theta)=-\sigma(\theta)$ при $r=R$ и $0\leqslant\theta\leqslant\beta$ следующее интегральное уравнение первого рода:

$$\delta(\theta)=\frac{R}{2\pi G}\left[\int_0^\beta q(\alpha)H_r(1,\,\theta,\,\alpha)\sin\alpha\,d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi-\beta}^{\pi}q(\alpha)H_r(1,\,\theta,\,\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\right] \tag{1.6}$$

2. Преобразуем уравнение (1.6). Сделав во втором интеграле правой части замену переменных $\alpha=\pi-\alpha'$ и учитывая, что $q(\alpha)=q(\pi-\alpha)$, получим

$$\delta(\theta)=\frac{R}{2\pi G}\int_0^\beta q(\alpha)[H_r(1,\,\theta,\,\alpha)+H_r(1,\,\theta,\,\pi-\alpha)]\sin\alpha\,d\alpha \tag{2.1}$$

Полагая

$$\alpha=\beta t,\quad \theta=\beta\tau,\quad q(\beta t)=p(t),\quad \delta(\beta\tau)=f(\tau)$$

имеем

$$f(\tau)=\frac{R\beta}{2\pi G}\int_0^1 p(t)[H_r(1,\,\beta\tau,\,\beta t)+H_r(1,\,\beta\tau,\,\pi-\beta t)]\sin\beta t\,dt \tag{2.2}$$

$$0\leqslant\tau\leqslant1$$

На основании (1.4) — (1.5) можно показать, что

$$\beta\left[H_r(1,\ \beta\tau,\ \beta t) + H_r(1,\ \beta\tau,\ \pi-\beta t)\right] =$$
$$= 4(1-\nu)\left[\frac{K\left(\dfrac{2\sqrt{\tau t}}{\tau+t}\right)}{\tau+t} - F(\beta,\ \tau,\ t)\right] \tag{2.3}$$

где $F(\beta,\ \tau,\ t)$ — непрерывная при всех $0\leqslant\tau,\ t\leqslant 1$ функция, стремящаяся к нулю при $\beta\to 0$.

Таким образом, уравнение (2.2) можно представить в виде

$$\int\limits_0^1 Q(t)\,K\left(\frac{2\sqrt{\tau t}}{\tau+t}\right)\frac{tdt}{\tau+t} = \frac{\pi\Delta}{2R}f(\tau) + \int\limits_0^1 Q(t)\,F(\beta,\ \tau,\ t)\,tdt \tag{2.4}$$
$$0\leqslant\tau\leqslant 1$$

Здесь обозначено

$$\Delta = G(1-\nu)^{-1},\quad Q(t) = p(t)\,t^{-1}\sin\beta t$$

Эффективные приближенные решения интегрального уравнения (2.4) при достаточно малых β могут быть получены с помощью методов, описанных в работе [3].

Вычисления показали, что уже при $\beta=7^\circ$ контактное давление отличается от давления, подсчитанного по теории Герца, более, чем на 5%.

Поступила 28 X 1970

Վ. Ա. ԿԱՐՊԵՆԿՈ

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳՆԴԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Դիտարկված է երկու միատեսակ, սիմետրիկ դասավորված կոշտ դրոշմների առանձգական գնդի վրա ազդման խնդիրը։ Ենթադրվում է, որ դրոշմներից դուրս գնդի մակերևույթը ազատ է լարումներից, իսկ դրոշմների տակ բացակայում են շոշափող լարումները։

Խնդիրը բերված է առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման՝ կոնտակտային ճնշման նկատմամբ։ Ուսումնասիրված են հավասարման կորիզի հիմնական հատկությունները և նշված է նրա մոտավոր լուծման հնարավոր սխեմա՝ կոնտակտի անկյան փոքր արժեքների դեպքում։

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEN FOR AN ELASTIC BALL

V. A. KARPENKO

Summary

A problem on pressing two identical rigid and symmetrically spaced punches in an elastic ball is considered.

The problem is reduced to an integral equation of the first kind with respect to contact pressure. The basic characteristics of the equation kernel are studied and a possible pattern for its rough solution with small values of contact angles is specified.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
2. *Бондарева В. Ф.* О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, т. 33, вып. 6, 1969.
3. *Александров В. М.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, т. 31, вып. 6, 1967.