

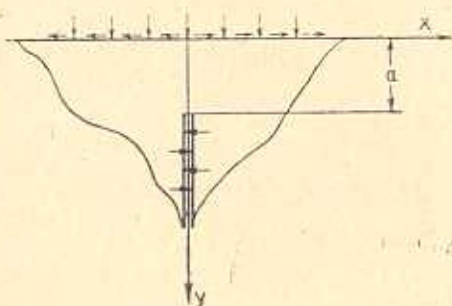
Վ. Ս. ԹՈՆՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼԿՈՒՅԱՆ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ
С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Исследованию плоской смешанной задачи теории упругости для плоскости и полуплоскости с разрезом посвящено много работ, о которых подробно изложено в обзорном докладе И. Снеддона [1].

В настоящей статье рассматривается задача плоской теории упругости для изотропной полуплоскости, которая на расстоянии „а“ от горизонтальной границы имеет вертикальный полубесконечный разрез. На горизонтальной границе полуплоскости задан вектор напряжений, а на вертикальном разрезе — нормальное давление. Задача решена методом Фурье. Решение задачи сведено к „парным“ интегральным уравнениям, которые в дальнейшем сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказано, что последнее уравнение можно решить методом последовательных приближений. В частных случаях, когда $a \rightarrow \infty$ или $a \rightarrow 0$, соответственно получается первая основная задача плоской теории упругости для полуплоскости и квадранта.

Рассмотрим задачу плоской теории упругости для изотропной полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом, когда на горизонтальной границе дан вектор напряжения, а на полубесконечном разрезе — нормальное давление (фиг. 1).



Фиг. 1.

В силу симметрии граничных условий относительно оси Oy можно ограничиться рассмотрением только правой половины упругой полуплоскости (квадранта). Решение поставленной задачи состоит в нахождении одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$ в области $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, удовлетворяющей граничным условиям

$$\sigma_y(x, 0) = f_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = f_2(x) \quad (0 < x < \infty) \quad (1)$$

$$\sigma_x(0, y) = f(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (a < y < \infty) \quad (2)$$

и условиям симметрии

$$u(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 < y < a) \quad (3)$$

Будем искать решение задачи в виде суммы двух интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \int_0^{\infty} [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) dx + \\ & + \int_0^{\infty} [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \quad (0 \leq x < \infty; 0 \leq y < \infty) \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\beta)$ и $D(\beta)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий на $y = 0$ и $x = 0$. Используя известные формулы для определения напряжений и перемещений [2], получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y) = & - \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) dx + \\ & + \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \\ \varepsilon_y(x, y) = & \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) dx - \\ & - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \\ \tau_{xy}(x, y) = & \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) dx - \\ & - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta \quad (5) \\ u(x, y) = & \frac{1}{E} \left\{ \int_0^{\infty} \alpha [(1+\nu)A(\alpha) + (1-\nu)B(\alpha) + \alpha x(1+\nu)B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \beta [(1+\nu)C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y(1+\nu)D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta \right\} - a_0 y + b_0 \end{aligned}$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ - \int_0^{\infty} \alpha [(1+\nu)A(x) - 2B(x) + \alpha x(1+\nu)B(x)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) dx + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \beta [(1+\nu)C(\beta) + (1-\nu)D(\beta) + \right. \\ \left. + \beta y(1+\nu)D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \right\} + a_0 x + c_0$$

Закрепляя бесконечно удаленную точку, будем иметь $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Удовлетворяя граничным условиям (1), получим

$$C(\beta) = - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx \\ D(\beta) = \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx - \\ - \frac{2c}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} x^2 [A(x) - B(x) + \alpha x B(x)] e^{-\alpha x} dx \right\} \sin(\beta x) dx \quad (6)$$

Используя условия (2) и (3), для неизвестных функций $A(x)$ и $B(x)$ получим следующие „парные“ интегральные уравнения [3]:

$$\int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \sin(\alpha y) d\alpha = 0 \quad (0 < y < a) \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 A(\alpha) \sin(\alpha y) d\alpha = F(y) \quad (a < y < \infty)$$

$$A(x) = B(x) \quad (8)$$

где

$$F(y) = -f(y) + \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} d\beta \quad (9)$$

Подобные „парные“ интегральные уравнения рассматривались в работе [4].

Используя результаты работы [3], для $A(x)$ получим

$$\frac{\pi}{2} \alpha A(\alpha) = \int_0^{\infty} r^2(r) J_0(\alpha r) dr \quad (10)$$

где

$$\psi(r) = \int_r^{\infty} \frac{F(y)}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy \quad (11)$$

$J_l(x)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.
Подставляя значения функции $F(y)$ из (9) в (11), получим

$$\psi(r) = \varphi_1(r) + F_1(r) \quad (12)$$

где

$$\varphi_1(r) = - \int_r^{\infty} \frac{f(y) dy}{(y^2 - r^2)^{3/2}} - \int_0^{\infty} \frac{f_1(x) dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad (13)$$

$$F_1(r) = \int_0^{\infty} \beta^2 [\beta r K_1(\beta r) - r K_0(\beta r)] D(\beta) d\beta \quad (14)$$

При получении формул (12), (13), (14) были использованы значения следующих интегралов [3], [5]:

$$\int_r^{\infty} \frac{e^{-\beta y} dy}{(y^2 - r^2)^{3/2}} = K_0(r\beta), \quad \int_r^{\infty} \frac{y e^{-\beta y} dy}{(y^2 - r^2)^{3/2}} = r K_1(r\beta)$$

$$\int_0^{\infty} K_0(\beta r) \cos(\beta x) d\beta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

где $K_l(\beta r)$ — функции Макдональда.

Учитывая значение интеграла [5]

$$\int_0^{\infty} x e^{-\beta x} \sin(\beta x) dx = \frac{2\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

вторую формулу (6) можно представить в следующем виде:

$$D(\beta) = \frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx - \frac{4}{\pi\beta} \int_0^{\infty} \frac{x^4 A(x)}{(x^2 + \beta^2)^2} dx \quad (15)$$

Подставляя значение $A(x)$ из (10) в (15), получим

$$D(\beta) = \frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{8}{\pi^2 \beta^2} \int_a^{\infty} \varphi_1(r) r \left[K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right] dr - \\
 & - \frac{8}{\pi^2 \beta^2} \int_a^{\infty} F_1(r) r \left[K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right] dr \quad (16)
 \end{aligned}$$

При получении формулы (16) было учтено, что [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 f_0(xr)}{(x^2 + \beta^2)^2} dx = K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r)$$

Исключая $F_1(r)$ из соотношений (16) и (14), для определения функции $D(\beta)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$G(\gamma) = \Omega(\gamma) + \int_0^{\infty} G(\beta) K(\gamma, \beta) d\beta \quad (17)$$

где

$$G(\gamma) = \gamma^2 D(\gamma) \quad (18)$$

$$K(\gamma, \beta) = \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_a^{\infty} r \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] \left[K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right] dr \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \Omega(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\gamma x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\gamma x) dx - \\
 & - \frac{8\gamma}{\pi^2} \int_a^{\infty} \varphi_1(r) r \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] dr \quad (20)
 \end{aligned}$$

Для решения уравнения (17) покажем, что

$$\int_0^{\infty} |K(\gamma, \beta)| d\beta < 1$$

Имеем, что

$$\begin{aligned}
 |K(\gamma, \beta)| &= \left| \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_a^{\infty} r \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] \left[K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right] dr \right| < \\
 &< \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_a^{\infty} r \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] \left[K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right] dr <
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} r \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] \left[K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right] dr = \right. \\ & = \frac{8}{\pi^2} \gamma \frac{\beta^4 - \gamma^4 - 4\gamma^2\beta^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{(\beta^2 - \gamma^2)^3} = \frac{8}{\pi^2} \frac{\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 4 \ln \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}}{\beta \left| \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} \right|^3} \end{aligned}$$

или

$$|K(\gamma, \beta)| < \frac{8}{\pi^2} \frac{\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 4 \ln \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}}{\beta \left| \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} \right|^3} \quad (21)$$

При получении формул (21) были использованы значения следующих интегралов [3]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r K_0(\gamma r) K_0(\beta r) dr &= \frac{\ln \frac{\beta}{\gamma}}{\beta^2 - \gamma^2} \\ \int_0^{\infty} r^2 K_0(\gamma r) K_1(\beta r) dr &= \frac{\gamma^2 - \beta^2 + 2\beta^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\beta(\beta^2 - \gamma^2)^2} \\ \int_0^{\infty} r^3 K_1(\gamma r) K_1(\beta r) dr &= 2 \frac{\beta^4 - \gamma^4 - 4\gamma^2\beta^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\beta\gamma(\beta^2 - \gamma^2)^3} \end{aligned}$$

Упростим неравенство (21). Для этого перейдем к новым переменным следующим образом: принимая, что $a \neq 0$, переменную интегрирования β заменим через $\xi = ae^z$, а переменную (параметр) γ заменим через $\eta = ae^\eta$. После таких преобразований неравенство (21) примет вид

$$|K(\gamma, \xi)| < \frac{8}{\pi^2} \frac{[e^{2(z-\eta)} - e^{-2(z-\eta)} - 4(z-\eta)]}{ae^z [e^{z-\eta} - e^{-(z-\eta)}]^3}$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} |K(\gamma, \beta)| d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\gamma, \xi)| d\xi < \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\operatorname{sh} 2(z-\eta) - 2(z-\eta)]}{\operatorname{sh}^3(z-\eta)} dz$$

Пользуясь значением интеграла [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = \frac{\pi^2}{2}$$

получим окончательно

$$\int_0^{\infty} |K(\gamma, \beta)| d\beta < 1$$

Очевидно, что функция $\Omega(\gamma)$ ограничена сверху и стремится к нулю, когда $\gamma \rightarrow \infty$.

Решая интегральное уравнение (17) методом последовательных приближений, получим выражения функции $G(\gamma)$. Далее, по формулам (18), (14), (12), (11) и (10) последовательно можно определить все искомые функции, а, следовательно, и напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

Напряжения и перемещения на линии $x=0$, выраженные через функции $G(\beta)$ и $\varphi_1(r)$, имеют вид

$$\begin{aligned} z_r(0, y) = & \frac{2}{\pi} y \frac{\varphi_1(a)}{(a^2 - y^2)^{1/2}} + \frac{2}{\pi} y \int_a^{\infty} \frac{\varphi_1(r) dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} - \frac{2}{\pi} y \int_0^{\infty} \frac{f_1(x) dx}{y^2 + x^2} + \\ & + \frac{2}{\pi} y \int_a^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} \int_0^{\infty} [\beta r K_1(\beta r) - 2K_0(\beta r)] G(\beta) d\beta + \\ & + \int_0^{\infty} (\beta y - 2) e^{-\beta y} G(\beta) d\beta \quad (0 < y < a) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} u(0, y) = & \frac{4}{\pi E} \int_a^{\infty} \frac{r \varphi_1(r) dr}{(y^2 - r^2)^{1/2}} + \frac{4}{\pi E} \int_a^{\infty} \frac{r dr}{(y^2 - r^2)^{1/2}} \int_0^{\infty} [\beta r K_2(\beta r) - \\ & - 2K_0(\beta r)] G(\beta) d\beta \quad (a < y < \infty) \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\varphi_1(a) = - \int_a^{\infty} \frac{f(v) dv}{(v^2 - a^2)^{1/2}} - \int_0^{\infty} \frac{f_1(u) du}{(a^2 + u^2)^{1/2}} \quad (24)$$

$$\varphi_1(r) = r \int_0^{\infty} \frac{f_1(u) du}{(u^2 + r^2)^{1/2}} - \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{f(v) v dv}{(v^2 - r^2)^{1/2}} \quad (25)$$

При получении (22) и (23) были использованы значения следующих интегралов [5]:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta = \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad \int_0^{\infty} J_0(\alpha r) \cos(\alpha y) d\alpha = \frac{1}{(r^2 - y^2)^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha r) \sin(\alpha y) d\alpha = \frac{1}{(y^2 - r^2)^{1/2}}$$

В частном случае, когда $a \rightarrow \infty$, получим известную задачу для полуплоскости без разреза. В этом случае интегральное уравнение (17) выпадает, и неизвестная функция $G(\gamma)$ приравнивается предельному значению свободного члена. Следовательно, решение этой задачи получается в замкнутом виде

$$G(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\gamma x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\gamma x) dx \quad (26)$$

Тогда

$$D(\beta) = \frac{G(\beta)}{\beta^2} = \frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx \quad (27)$$

$$A(x) = B(x) = 0 \quad (28)$$

$$C(\beta) = -\frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx \quad (29)$$

$$\sigma_x(0, y) = \frac{4!}{\pi} y \int_0^{\infty} \frac{x^2 f_1(x) dx}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^3 f_2(x) dx}{(x^2 + y^2)^2} \quad (30)$$

В другом частном случае, когда $a = 0$, получим первую основную задачу теории упругости для квадранта. В этом случае ядро и свободный член интегрального уравнения (17) принимает вид

$$K(\eta, \xi) = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{e^{\xi}} \frac{[e^{2(\xi-\eta)} - e^{-2(\xi-\eta)} - 4(\xi-\eta)]}{[e^{(\xi-\eta)} - e^{-(\xi-\eta)}]^2} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Omega(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\gamma x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\gamma x) dx + \\ &+ \frac{8\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} f(y) dy \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin(\gamma y) dx}{(x^2 + \gamma^2)^2} + \frac{8\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} f_1(x) dx \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-\gamma x}}{(x^2 + \gamma^2)^2} dx \end{aligned} \quad (32)$$

и интегральное уравнение (17) сводится к интегральному уравнению Винера-Хопфа, которое решается точно в квадратурах:

$$G_1(\gamma) = \Omega_1(\gamma) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^*(z) K^*(z)}{1 - K^*(z)} e^{i\gamma z} dz \quad (33)$$

Здесь искомая функция $G_1(\gamma)$ и свободный член $\Omega_1(\gamma)$ связаны с функциями $G(\gamma)$ и $\Omega(\gamma)$ соотношениями

$$G_1(\gamma) = G(e^\gamma), \quad \Omega_1(\gamma) = \Omega(e^\gamma)$$

а $\Omega^*(z)$ — трансформант Фурье функции $\Omega_1(\gamma)$,
 $K^*(z)$ — трансформант Фурье ядра (31)

$$\Omega^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1(\gamma) e^{-i\gamma z} d\gamma \quad (34)$$

$$K^*(z) = -\frac{8}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{2y} - e^{-2y} - 4y|}{|e^y - e^{-y}|^2} e^{-iyz} dy \quad (35)$$

Таким образом, первая основная задача для квадранта решается также в замкнутом виде.

В качестве примера рассмотрим случаи:

а) Горизонтальная граница полуплоскости свободна от внешних нагрузок, а в разрезе действует затухающее давление. В этом случае

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f(y) = -e^{-y} \tau_0$$

и формулы (24), (25) и (20) примут вид:

$$\varphi_1(r) = K_0(r), \quad \varphi_2(r) = -K_1(r)$$

$$\Omega(\gamma) = -\frac{8\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} r K_0(r) \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] dr$$

б) На конечной части (шириной $2b$) горизонтальной границы полуплоскости действует равномерно распределенная нормальная нагрузка, симметричная относительно разреза с интенсивностью q .

Тогда

$$f_1(x) = \begin{cases} -q & \text{при } 0 < x < b \\ 0 & \text{при } x > b \end{cases}$$

$$f_2(x) = 0, \quad f(y) = 0$$

и согласно формулам (24), (25) и (20) имеем

$$\varphi_1(r) = q \ln \frac{b + \sqrt{r^2 + b^2}}{r}; \quad \varphi_2(r) = q \frac{b}{r \sqrt{r^2 + b^2}}$$

$$\Omega(\gamma) = \frac{2}{\pi} \frac{q}{\gamma} \sin(\gamma b) - \frac{8\gamma}{\pi^2} q \int_0^{\infty} \ln \left[\frac{b + \sqrt{r^2 + b^2}}{r} \right] \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] r dr$$

Некоторые значения напряжений $\sigma_x(0, y)$ и перемещений $u(0, y)$, вычисленные по формулам (22) и (23) для различных точек вертикальной оси полуплоскости в зависимости от a и $\lambda = \frac{b}{a}$, приведены в табл. 1, 3 (случай а) и 2, 4 (случай б).

Таблица 1

		$\sigma_x(0, y)$		
		σ_0		
a	y/a	1	2	5
0	0	0.0985	2.0961	-0.8587
1/8	1/8	0.1020	-1.5142	-0.5221
1/4	1/4	0.1393	-1.7284	-0.3635
3/8	3/8	0.1761	-1.6208	-0.2777
1/2	1/2	0.1977	-1.3884	-0.2251
5/8	5/8	0.2012	-1.0526	-0.1896
3/4	3/4	0.3138	-0.6432	0.1647
7/8	7/8	0.7432	-0.1532	0.1787

Таблица 2

		$\sigma_x(0, y)$			
		q			
λ	y/a	0.05	0.1	0.5	1
0	0	-1	-1	1.1463	1.2737
1/8	1/8	-0.0187	-0.1109	0.8435	0.9084
1/4	1/4	0.0049	-0.0063	0.8045	1.0145
3/8	3/8	0.0118	0.0182	0.7938	1.1308
1/2	1/2	0.0179	0.0334	0.8195	1.2743
5/8	5/8	0.0252	0.0491	0.8943	1.4766
3/4	3/4	0.0359	0.0710	1.0597	1.8219
7/8	7/8	0.0574	0.1142	1.5358	2.7228

Таблица 3

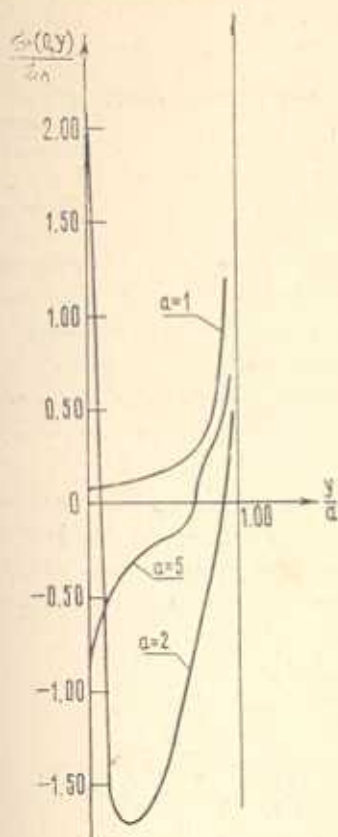
		$u(0, y) E$		
		$\alpha \sigma_0$		
a	y	1	2	5
$a+1$	$a+1$	0.3654	0.1097	0.0076
$a+2$	$a+2$	0.1812	0.1069	0.0099
$a+3$	$a+3$	0.1377	0.0998	0.0110
$a+4$	$a+4$	0.1282	0.0943	0.0114
$a+5$	$a+5$	0.1209	0.0894	0.0111
$a+6$	$a+6$	0.1197	0.0851	0.0105
$a+7$	$a+7$	0.0892	0.0822	0.0099

Таблица 4

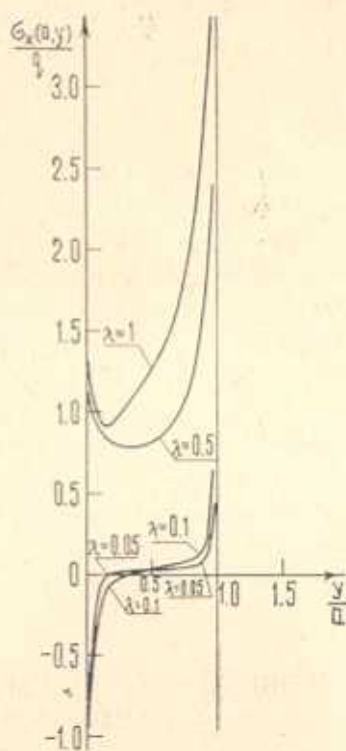
		$u(0, y) E$		
		$\frac{c}{aq}$		
λ	y	0.5	1	2
$a+1$	$a+1$	0.6347	1.2116	1.9796
$a+2$	$a+2$	0.7639	1.4748	2.4698
$a+3$	$a+3$	0.8402	1.6312	2.7741
$a+4$	$a+4$	0.8494	1.6554	2.8435
$a+5$	$a+5$	0.8497	1.6599	2.8753
$a+6$	$a+6$	0.8699	1.7030	2.9729
$a+7$	$a+7$	0.8833	1.7314	3.0433

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений $\sigma_x(0, y)$ вне разреза и перемещений $u(0, y)$ на разрезе (фиг. 2, 3, 4 и 5) приведены эпюры этих величин. Следует отметить, что эти эпюры составлены приближенно на основании расчетов, произведенных только для нескольких точек оси.

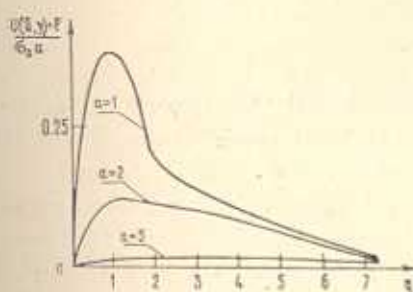
Как показывают вычисления (табл. 1, 2) и построенные графики (фиг. 2, 4), закон распределения напряжения $\sigma_x(0, y)$ существенно отличается от закона распределения соответствующего напряжения для полуплоскости без разреза, если разрез находится достаточно близко от горизонтальной границы.



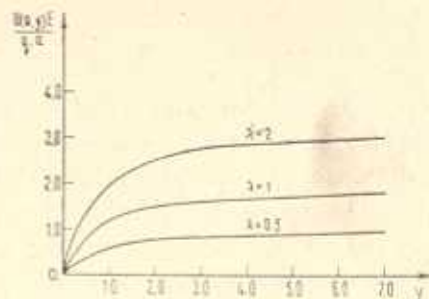
Фиг. 2.



Фиг. 4.



Фиг. 3.



Фиг. 5.

Когда разрез находится достаточно далеко от горизонтальной границы, закон распределения этого же напряжения качественно совпадает с законом распределения соответствующего напряжения для полуплоскости без разреза. Числовые результаты получены на ЭВМ „Наири“ в институте математики и механики АН АрмССР В. Ширваняном.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 2 XI 1970

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

ՈՒՂԱԶՈՒԿ ԿԻՍԱՍԱՆՎԵՐՁ ՃԵՂՔՈՎ ԿԻՍԱԶԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻ
ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում դիտարկվում է հորիզոնական եզրից « a » հեռավորության վրա կիսաանվերջ ուղղաձիգ ճեղք ունեցող կիսահարթության խնդիրը: Հորիզոնական եզրի վրա տրված է լարումների վեկտորը, իսկ ուղղաձիգ ճեղքի ափսրին՝ նորմալ ճնշումը: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Թանկորման գործակիցների որոշումը բերվել է «գույգ» ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որն իր հերթին բերվել է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման:

Ցույց է տրված, որ վերջին հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով: Մասնավոր դեպքում, երբ $a \rightarrow \infty$ կամ $a \rightarrow 0$, ցույց է տրված, որ ստացվում են համապատասխանաբար առանց ճեղքի կիսահարթության և քառորդ հարթության համար առաջին եզրային խնդիրների լուծումները:

Բերված է թվային օրինակ:

A PROBLEM FOR A SEMI-PLANE WITH A VERTICAL
SEMI-INFINITE CRACK

V. S. TONOHAN, S. A. MELCUMIAN

S u m m a r y

The present paper deals with a problem of the theory of elasticity for an isotropic semi-plane with a vertical semi-infinite crack at a distance „ a ” of the horizontal boundary.

The stress vectors on the horizontal boundary of the semi-plane and the normal pressure on the vertical crack are specified. The problem is solved by the Fourier method. The determination of the integration coefficients is reduced to solving the dual integral equations which in their turn are reduced to solving Fredholm's integral equation of the second kind.

It is shown that the last-mentioned equation can be solved by the consecutive approximation method.

Particularly, when $a \rightarrow \infty$ or $a \rightarrow 0$, the solutions are obtained to the first boundary problem for the semi-plane without crack and the quarter-plane respectively.

A numerical example is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Снеддон И.* Решение задач теории упругости для трещины при помощи интегральных преобразований. Периодический сб. переводов иностранных статей, *Механика*, т. 119, № 1, 1970, 111—122.
2. *Мухомелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, Физматгиз, 1966.
3. *Тонян В. С.* О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. Изв. АН Арм.ССР, *Механика*, т. XXI, № 2, 1968.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. *ПММ*, т. 28, вып. 6, 1964.
5. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.