ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 3, 1971 Механика

А. А. ЛИВШИЦ, В. А. ЛИВШИЦ

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОСВЯЗНЫХ И НЕОДНОСВЯЗНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН, СЖАТЫХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

1. Расчет на устойчивость пластин, сжатых произвольной нагрузкой, является актуальной задачей прикладной теории упругости. В данной работе предлагается для расчета пластин на устойчивость с учетом плоского поля напряжений использовать метод коллокации.

Рассмотрим устойчивость тонкой упругой пластины под действием произвольной нагрузки в своей плоскости. Упругая поверхность пластины в момент потери устойчивости описывается уравнением

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{h}{D}\left[\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] = 0 \tag{1}$$

где w — прогиб, h — толщина, D — цилиндрическая жесткость пластины; σ_x, σ_y, τ_{xy} — напряжения в срединной поверхности пластины, причем сжимающие напряжения приняты положительными.

Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} пропорциональны некоторому параметру λ и являются функциями координат: $\sigma_x = \lambda f_1(x, y)$, $\sigma_y = \lambda f_2(x, y)$, $\tau_{xy} = \lambda f_3(x, y)$.

Функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ находятся в результате решения плоской задачи для рассматриваемых областей при заданной нагрузке и соответствующих контурных условиях.

Таким образом, решение задачи устойчивости состоит из двух этапов—решения плоской задачи и решения собственно задачи устойчивости. Решение плоских задач для рассматриваемых далее областей и нагрузок дано в [1], [2] и использовано в данной работе.

Граничные условия для края пластины, параллельного оси y, могут быть записаны следующим образом:

для свободно опертого края:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

для защемленного края:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

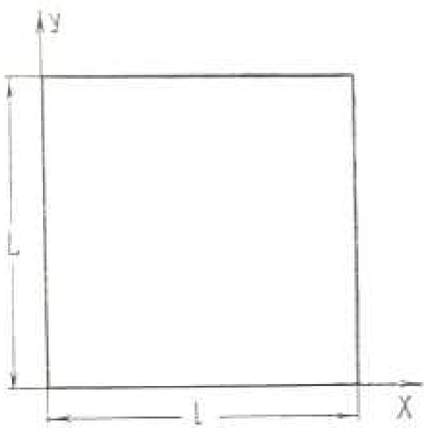
для края, защемленного по дуге окружности $\rho = c$:

$$w = \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \tag{4}$$

2. Задача устойчивости для односвязных пластин (фиг. 1) решалась методом коллокации. Решение разыскивалось в виде аппроксимирующего ряда

$$w = \sum_{m,\, n=1,2,3\ldots} \sum a_{mn} X_m(x)\, Y_n(y) \tag{5}$$

Функции X_m и Y_n выбирались таким образом, чтобы приближенное решение (5) точно удовлетворяло граничным условиям.



Фиг. 1.

Подставляя (5) в (1) и следуя методу коллокации, запишем:

$$\sum_{m,\, n=1,2,3\ldots} \sum \Big\{ X_m^{\mathrm{IV}}(x_p)\, Y_n(y_p) + 2X_m''(x_p)\, Y_n''(y_p) + X_m(x_p)\, Y_n^{\mathrm{IV}}(y_p) +$$

$$+ \lambda \frac{h}{D} \left[f_1(x_p, y_p)\, X_m''(x_p)\, Y_n(y_p) + f_2(x_p, y_p)\, X_m(x_p)\, Y_n''(y_p) + \right.$$

$$\left. + 2 f_3(x_p, y_p)\, X_m'(x_p)\, Y_n'(y_p) \right] \Big\} = 0 \tag{6}$$

где x_p и y_p — координаты точки коллокации P.

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_{mn}. Приравняв нулю определитель этой системы, получим уравнение относительно параметра λ, минимальный корень которого дает величину критического значения параметра $\lambda_{кр}$.

В качестве аппроксимирующих функций использовались косинус-биномы, предложенные М. М. Филоненко-Бородичем [3]. Если стороны $x = 0$, $x = l$ свободно оперты

$$X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{7}$$

Если стороны $x = 0$ и $x = l$ защемлены,

$$X_m = \cos \frac{(m-1)\pi x}{l} - \cos \frac{(m+1)\pi x}{l} \tag{8}$$

Если сторона $x = 0$ защемлена, а сторона $x = l$ свободно оперта

$$X_m = \cos \frac{(m-0.5)\pi x}{l} - \cos \frac{(m+0.5)\pi x}{l} \tag{9}$$

Функции для $Y_n(y)$ аналогичны. Полнота этих функций доказана в работе [3].

Просчет осуществлялся в 12 приближениях, то есть удерживалось 1, 2, 3, $\cdots$, 12 членов ряда (5) и уравнение (6) удовлетворялось соответственно в 1, 2, 3, $\cdots$, 12 точках.

Необходимо отметить, что результаты, полученные при небольшом числе точек коллокации, отличаются весьма существенно, но при числе членов ряда (5) свыше 9, решение детерминировано не меняется, колеблясь в пределах 12%.

Нагрузка задается в виде

$$\sigma_x(0, y) = \sigma_x(l, y) = \lambda \bar{y}^{2i}$$

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_y(x, L) = 0$$

$$\tau_{xy}(0, y) = \tau_{xy}(l, y) = \tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(x, L) = 0 \tag{10}$$

где

$$\bar{y} = \frac{2y}{L} - 1$$

Таким образом, были получены решения для нагрузок 1, $\bar{y}^2$, $\bar{y}^4$, $\bar{y}^6$, y^8 при $\frac{l}{L} = 1.0$. Предполагается, что произвольная симметричная нагрузка такова, что ее можно представить в виде суммы составляющих нагрузок вида $\alpha_i \bar{y}^{2i}$, где $\alpha_i \geqslant 0$ — коэффициенты. Тогда с помощью найденных критических значений параметра $\lambda_{кр}$ для составляющих нагрузок можно получить нижнюю оценку значения критического параметра для произвольной сложной нагрузки. Эта оценка вытекает из доказанного П. Ф. Папковичем свойства выпуклости граничных поверхностей в линейных бифуркационных задачах, к классу которых относится и рассматриваемая задача.

Пусть задана сложная нагрузка σ^*, которая с точностью до коэффициента пропорциональности λ может быть разложена в ряд по составляющим нагрузкам σ_i, для которых минимальные значения критических параметров известны:

$$\varphi^* = \lambda \sum_i \alpha_i \varphi_i$$

$$\varphi^*_{кр} = \lambda^*_{кр} \sum_i \alpha_i \varphi_i \qquad (11)$$

Тогда, согласно теореме П. Ф. Папковича

$$\lambda^*_{кр} > \frac{1}{\sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda_{i\,кр}}} \qquad (12)$$

Полученные результаты для различных закреплений и нагрузок сведены в табл. 1

Табл. 1

	Нагрузка				
	1	$\bar{y}^2$	$\bar{y}^4$	$\bar{y}^6$	$\bar{y}^8$
	4	16.6	31.4	43.4	56.8
	4.85	20.8	39.6	58.7	75.7
	5.78	22.7	40.1	56.7	71.8
	6.25	25.4	45.6	67.4	86
	6.74	26	48.5	70.6	91.4
	7.77	23.5	56	76.5	94.5
	8.13	29.6	55.4	77.3	97.1
	8.23	35	63.5	88.2	111
	10.36	39	69.6	97.5	123

3. Задача устойчивости для двухсвязных пластин (фиг. 2) также решалась методом коллокации. Решение для защемленной по обеим контурам пластины ищем в виде

$$w = \sum_{m,\, n=0,1,2\ldots} \sum a_{mn} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\rho^2 - c^2)^2 x^m y^n \qquad (13)$$

Очевидно, что решение (13) точно удовлетворяет граничным условиям (3), (4) на наружном и внутреннем контурах.

Подставляя (13) в (1), получаем исходное уравнение для определения критического параметра:

$$384x^{m+4}y^nB_3^2 - 384x^my^{n+4}B_2^2 + 128x^{m+2}y^{n+2}(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + 4B_1B_2 +$$

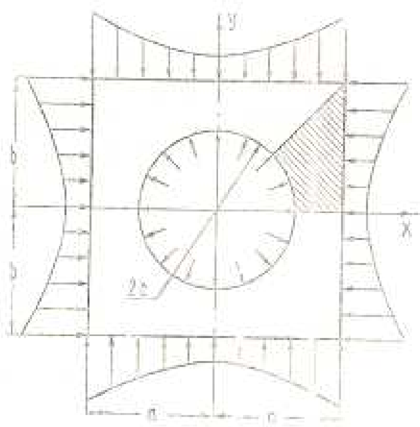
$$+ 4B_1B_3 + 8B_2B_3) + 64x^{m+2}y^nB_3[(2n+1)(B_1^2 + B_2^2 + 4B_1B_2) +$$

$$+ 2(3m + n + 5)B_1B_3 + (6m + 4n + 11)B_2B_3] +$$

$$+ 64x^my^{n+2}B_2[(2m+1)(B_1^2 + B_3^2 + 4B_1B_3) + 2(m + 3n + 5)B_1B_2 +$$

$$
\begin{aligned}
&+(4m+6n+11)B_2B_3]+8x^m y^n[3(2n^2+2n+1)B_1^2B_2^2+\\
&+3(2m^2+2m+1)B_1^2B_3^2+2(3m^2+3n^2+4mn+5m+5n+4)B_2^2B_3^2+\\
&+4(4mn+2m+2n+1)B_1^2B_2B_3+8(3n^2+2mn+m+\\
&+4n+2)B_1B_2^2B_3+8(3m^2+2mn+4m+n+2)B_1B_2B_3^2]+\\
&+16x^{m+2}y^{n-2}n(n-1)B_3^2(B_1^2+B_2^2+4B_1B_2)+\\
&+16x^{m-2}y^{n+2}m(m-1)B_2^2(B_1^2+B_3^2+4B_1B_3)+\\
&+8x^m y^{n-2}n(n-1)B_1B_2B_3[(2n-1)B_1B_2+\\
&+(2m+1)B_1B_3+2(m+n)B_2B_3]+\\
&+8x^{m-2}y^n m(m-1)B_1B_2B_3[(2n+1)B_1B_2+(2m-1)B_1B_3+2(m+n)B_1B_3]+\\
&+x^m y^{n-4}n(n-1)(n-2)(n-3)B_1^2B_2^2B_3^2+\\
&+x^{m-4}y^n m(m-1)(m-2)(m-3)B_1^2B_2^2B_3^2+\\
&+2x^{m-2}y^{n-2}mn(m-1)(n-1)B_1^2B_2^2B_3^2+\\
&+\sigma_x B_3^2[8x^{m+2}y^n(B_1^2+B_2^2+4B_1B_2)+\\
&+4(2m+1)x^m y^n B_1B_2(B_1+B_2)+\\
&+m(m-1)x^{m-2}y^nB_1^2B_2^2]+\sigma_y B_2^2[8x^m y^{n+2}(B_1^2+B_3^2+4B_1B_3)+\\
&+4(2n+1)x^m y^n B_1B_3(B_1+B_3)+n(n-1)x^m y^{n-2}B_1^2B_3^2]+\\
&+2\tau_{xy}B_2B_3[8x^{m+1}y^{n+1}(B_2B_3+2B_1^2+2B_1B_2+2B_1B_3)+\\
&+4x^{m+1}y^{n-1}B_1B_3(B_1+B_2)+4x^{m-1}y^{n+1}B_1B_2(B_1+B_3)+\\
&+mnx^{m-1}y^{n-1}B_1^2B_2B_3]=0
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

где для краткости записи обозначено $B_1=x^2+y^2-c^2$; $B_2=x^2-a^2$; $B_3=y^2-b^2$. Рассмотрим устойчивость квадратной пластины под



Фиг. 2.

действием симметричной двухосной полиномиальной нагрузки на наружном контуре типа $\bar{y}^{2i}$. В этом случае силовая симметрия и симметрия области относительно осей x, y и диагоналей $x = \pm y$ позволяет рассматривать не всю область, а подобласть, ограниченную лучами $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$ (на фиг. 2 заштрихована). При этом необходимо исследовать четыре возможные формы потери устойчивости: 1 — симметричную относительно всех четырех осей; 2 — симметричную относительно осей x, y и антисимметричную относительно диагоналей $x = \pm y$; 3 — антисимметричную относительно осей x, y и симметричную относительно диагоналей $x = \pm y$; 4 — антисимметричную относительно всех четырех осей. Ход решения во всех четырех случаях одинаков, разница заключается в том, что в каждом случае в ряду (13) удерживаются члены, обладающие соответствующей симметрией.

Задача решалась в 9 приближениях, то есть удерживалось 1, 2, 3, $\cdots$, 9 членов ряда (13). Решения, полученные для 7 членов ряда (13), оказались вполне удовлетворительными и в дальнейших приближениях детерминировано не менялись, колеблясь в пределах 15%. Во всех вариантах первая форма потери устойчивости оказалась минимальной.

Полученные значения критического параметра $K_{кр}$ для первой формы при различном соотношении $\frac{c}{a}$ и для различных нагрузок приведены в табл. 2, причем $K_{кр}$ определяется из выражения $t_{кр} = K_{кр} \frac{D}{hc^2}$.

Табл. 2

Нагрузка	$\frac{c}{a}$				
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1	19	41	84	166	322
$\bar{x}^2$	60.2	129	263	518	1000
$\bar{x}^4$	103	221	452	885	1710
$\bar{x}^6$	148.1	318	647	1268	2440
$\bar{x}^8$	195	417	846	1660	3190

Надо заметить, что влияние соотношения $\frac{c}{a}$ на величину критического параметра носит двоякий характер. С одной стороны, увеличение $\frac{c}{a}$ вызывает рост напряжений и, следовательно, уменьшает значение критического параметра. С другой стороны, увеличение

$\frac{c}{a}$ уменьшает линейный размер, на котором происходит выпучивание, и, следовательно, увеличивает значение критического параметра. Из табл. 2 видно, что влияние второго фактора существенно сильнее, и величина критического параметра растет с увеличением $\frac{c}{a}$.

4. Выводы, обсуждение результатов.

а) При решении задачи был использован метод коллокаций. К числу достоинств этого метода следует отнести его простоту. Благодаря этому удалось создать программу, реализующую алгоритм решения задач устойчивости пластин на ЭЦВМ, полностью исключающую подготовительную работу вычислителей. Кроме того, метод коллокаций позволяет создать достаточно универсальную программу для задач, рассмотренных выше, так как в этом случае решение задачи устойчивости зависит не от вида выражений для напряжений, то есть от функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, а от значений напряжений в точках коллокации. При этом можно использовать результаты решений плоской задачи, полученные в различной форме разными авторами. Таким образом, например, была решена задача устойчивости квадратной пластины, сжатой между жесткими плитами. При решении плоской задачи [5] было положено, что две противоположные стороны пластины свободны от напряжений, а на двух других отсутствуют перемещения. Значение параметра критической силы для свободно опертой пластины $K_{кр} = 3.96$.

К недостаткам метода следует отнести, возможно, относительно медленную сходимость.

б) Неравномерное поле напряжений в пластине может возникнуть не только от действия неравномерной нагрузки на контуре, но и в температурной задаче, при действии неравномерного магнитного поля на стальную пластину, а также в случае действия равномерной нагрузки на пластину переменной толщины или пластину с вырезами. Разработанная методика определения критических сил позволяет учитывать действительное поле напряжений в пластине независимо от его происхождения, при этом напряжения являются функциями обеих координат и подлежат определению из плоской задачи. Тем не менее в некоторых работах [6], [7] задача устойчивости решается в нестрогой постановке, то есть не учитывается действительное напряженное состояние в пластине. Естественно возникает вопрос о погрешности из-за неучета действительного поля напряжений, совершаемой при определении критических сил. Очевидно, что эта погрешность зависит от ряда факторов и для различных задач различна. В случае действия неравномерной нагрузки на контуре односвязной пластины, эта погрешность тем больше, чем значительней закон внешней нагрузки отличается от прямолинейного и зависит от расположения нагрузки. В табл. 3 приведены значения критического параметра с учетом и без учета действительного напряженного состояния свободно опертой и защемленной пластин при различных нагрузках. При определении критического параметра без учета действительного поля напряжений было положено, что закон изменения внешней нагрузки на контуре не меняется в теле пластины, то есть если на контуре $\sigma_x(0, y) = \sigma_x(l, y) = \varphi(y)$, то и в любом параллельном сечении пластины $x = c$, $\sigma_x(c, y) = \varphi(y)$. Таким образом, нормальные напряжения в этом случае зависят только от одной координаты, а касательные напряжения равны нулю.

Из табл. 3 видно, что погрешность в зависимости от нагрузки и граничных условий достигает значительных величин и решение, полученное без учета истинного поля напряжений может не иметь ничего общего с действительным.

Табл. 3

		Нагрузка				
		1	$\bar{y}^2$	$\bar{y}^4$	$\bar{y}^6$	$\bar{y}^8$
	С учетом действ. напряж. состояния	4	16.8	31.4	45.4	58.8
	Без учета действ. напряж. состояния	4	29.6	83.6	197.2	364.6
	С учетом действ. напряж. состояния	10.36	39	69.6	97.5	124
	Без учета действ. напряж. состояния	10.36	132.2	601.7	1780	4350

в) Возвращаясь к проблеме наложения в задачах устойчивости, приведем примеры определения нижней оценки критического параметра.

Для односвязной квадратной пластины, свободно опертой по сторонам $x = 0$ и $x = l$ и защемленной по сторонам $y = 0$ и $y = L$, сжатой нагрузкой $\sigma_x(0, y) = \sigma_x(l, y) = 1 + \bar{y}^2$, $\sigma_y(x, 0) = \sigma_y(x, L) = \bar{x}^2$, используя формулу (12), получаем следующее значение нижней оценки критического параметра: $K_{кр} = 4.07$.

При определении этого параметра непосредственно методом коллокации (с использованием наложения решений плоской задачи) получаем $K_{кр} = 5.17$, что превышает величину нижней оценки на 4%.

Для двухсвязной пластины с $\frac{c}{a} = 0.5$, нагруженной двухосной нагрузкой $\sigma_x(a, y) = 1 + \frac{1}{3}\bar{y}^2 + \frac{2}{3}\bar{y}^4$; $\sigma_y(x, \pm a) = 1 + \frac{1}{3}\bar{x}^2 + \frac{2}{3}\bar{x}^4$, получаем величину нижней оценки критического параметра $K_{кр} = 33.3$. Значение критического параметра, определенного непосредственно методом коллокации $K_{кр} = 34.8$, что превышает значение нижней оценки на 4.5%.

Научно-исследовательский институт
Харьковского завода „Электротяжмаш"

Поступила 6 VII 1970

Ա. Լ. ԼԻՎՇԻՑ, Վ. Լ. ԼԻՎՇԻՑ

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԲԵՌՈՎ ՍԵՂՄՎԱԾ ՄԻԱԿԱՊ ԵՎ ՈՉ ՄԻԱԿԱՊ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է սալերի կայունությունը լարումների անհամասեռ դաշտի դեպքում։ Մոտավոր լուծում ստանալու համար օգտագործվում է կոլոկացիաների մեթոդը։

Ուղղանկյուն սալերի համար ստացված են կրիտիկական ուժերի արժեքները։

STABILITY OF SINGLE-BONDED AND NONSINGLE-BONDED RECTANGULAR PLATES COMPRESSED BY ARBITRARY LOAD

A. L. LIVSHITS, V. L. LIVSHITS

S u m m a r y

Stability of plates in a nonhomogeneous stress field is considered Collocation method is used to get an approximate solution. Critical force values are obtained for rectangular plates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барт А. Я., Лившиц А. Л., Лившиц В. Л.* К решению первой основной плоской задачи теории упругости. Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. 8, 1969.
2. *Лившиц А. Л., Лившиц В. Л.* Расчет на прочность плоских деталей методом ортогональных проекций. Машиностроение, № 8, 1969.
3. *Филоненко-Бородич М. М.* Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости. ПММ, 10, вып. 1. 1946.
4. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля. ч. II. Судстройиздат, М., 1941.
5. *Nisва Y., Kobayashi S.* Stresses in rectangular blocks compressed between rough plates. Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 33, № 241, 1967.
6. *Баритов А.* Исследование устойчивости прямоугольных пластин с прямоугольным отверстием, защемленных по внешнему и внутреннему контурам. Теория пластин и оболочек, Ереван, 1964.
7. *Mast P.* Elastic stability of flanges of typical prestressed single teeps. J. Prestr. Concrete Inst., 11, № 4, 1966.