

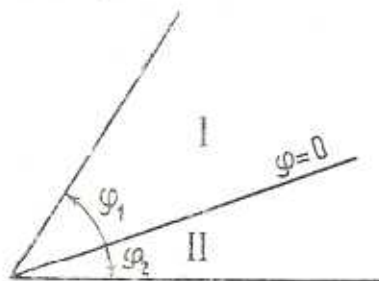
К. С. ЧОБАНЯН, Р. К. АЛЕКСАНЯН

### ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ПОВЕРХНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТЕЛА

Исследование напряженного состояния окрестности угловой точки поперечного сечения скручиваемого составного стержня рассмотрено в работах [1, 2]. В работе [3] исследовано напряженное состояние окрестности вершины составного клина, находящегося в условиях плоской деформации. Поведение напряжений в составных полуплоскости и слое рассмотрено в работах [4–5].

В настоящей статье рассматриваются термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела, находящегося в условиях плоской деформации.

1. Рассмотрим составное тело, состоящее из двух соединенных между собой по боковым поверхностям цилиндрических тел с различными теплофизическими и упругими характеристиками (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предполагается, что боковая поверхность составного цилиндра свободна от внешних нагрузок и связей, начальные напряжения отсутствуют. Тело подвергается стационарному температурному воздействию. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии плоской деформации.

Поместим начало полярной системы координат в точке пересечения контура поперечного сечения составного цилиндра с линией раздела областей поперечного сечения, соответствующих различным материалам, а полярную ось  $\varphi = 0$  направим по линии раздела, считая ее прямолинейной.

Задача плоской деформации термоупругости приводится к решению бигармонических уравнений для функции напряжений

$$\Delta \Delta \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

Выражения компонентов напряжений через функции напряжений имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(i)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}, & \varepsilon_z^{(i)} &= \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} \\ \varepsilon_{rz}^{(i)} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right), & (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия для свободной боковой поверхности цилиндра через функции напряжений следующие:

$$\begin{aligned} \Phi_1|_{z=\pm z_1} &= 0, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=\pm z_1} &= 0 \\ \Phi_2|_{z=\pm z_2} &= 0, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=\pm z_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

На линии раздела  $z=0$  должны выполняться условия равенства взаимодействий

$$\Phi_1 \Big|_{z=0} = \Phi_2 \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (1.4)$$

Зависимости между термоупругими деформациями и напряжениями имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(i)} &= \frac{1}{E_i} [\varepsilon_r^{(i)} - \nu_i \varepsilon_z^{(i)}] + \alpha_i T_i \\ \varepsilon_z^{(i)} &= \frac{1}{E_i} [\varepsilon_z^{(i)} - \nu_i \varepsilon_r^{(i)}] + \alpha_i T_i \\ \varepsilon_{rz}^{(i)} &= \frac{1}{2G_i} \varepsilon_{rz}^{(i)} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $E_i$ ,  $G_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\alpha_i$ , ( $i=1, 2$ ) — модули упругости, сдвига, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейных температурных расширений составляющих материалов.

Используя соотношения между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (1.5')$$

и (1.2), из условий непрерывности  $\frac{\partial u}{\partial r}$  и  $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$  на линии раздела получаем [7]

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{m_1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - (1-m_1) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \Big|_{z=0} &= \nu \left[ \frac{m_2}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{m_2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \right. \\ &\left. - (1-m_2) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} \right] + 2G_1 (\alpha_2 T_2 - \alpha_1 T_1) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{m_1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} + \frac{1+m_1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z \partial r^2} - \frac{2-m_1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \\
 & = \mu \left[ \frac{m_2}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z^3} + \frac{1+m_1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z \partial r^2} - \frac{2-m_2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right] + \\
 & \quad + 2G_1 \left( \frac{x'_2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{x'_1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad m_i = 1 - \nu_i, \quad x'_i = \alpha_i(1 - \nu_i), \quad (i = 1, 2)$$

Для идеального теплового контакта между частями цилиндра имеем температурные условия

$$T_1|_{z=0} = T_2|_{z=0}, \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

В условиях (1.6) и (1.7) температурные условия соответственно приводятся к виду

$$2G_1(x'_2 T_2 - x'_1 T_1) = 2G_1(x'_2 - x'_1) \quad (1.8)$$

$$2G_1 \left( \frac{x'_2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{x'_1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) = 2G_1 \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} (x'_2 \gamma - x'_1) \quad (1.9)$$

где  $\gamma = \frac{k_1}{k_2}$ ,  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ) — коэффициенты теплопроводности,  $T_1$  и  $\frac{\partial T_1}{\partial z}$  — значения температуры и ее производной на линии контакта.

Таким образом, определение напряжений и деформаций, вызванных в составных упругих телах стационарным температурным полем, приводится к решению уравнений (1.1) при условиях (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7).

2. Местное решение уравнений (1.1) с неоднородными условиями (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7) ищется в виде

$$\Phi_i = F_i + \Psi_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

где  $F_i$  — частные решения (1.1), (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), а  $\Psi_i$  — общее решение соответствующей однородной задачи.

Местное распределение температуры в окрестности вершины составного сектора определяется в следующем виде:

$$T_i = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n} V_{in}(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\gamma_n} U_{in}(\varphi) + T_0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

где  $\gamma_n$  — положительные корни уравнения

$$(\eta + 1) \sin \gamma (\varphi_1 + \varphi_2) + (1 - \eta) \sin \gamma (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (2.3)$$

а  $\beta_n$  — числа, не совпадающие с корнями уравнения (2.3) и удовлетворяющие условию теоремы Мюнтца-Саса [8].

Частное решение, соответствующее членам первого ряда (2.2), ищем в виде

$$F_{in}^{(1)} = r^{\beta_n + 2} f_{in}(\varphi) \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (1.1), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), получаем для  $f_{in}$  ( $i = 1, 2$ ) дифференциальные уравнения

$$f_{in}^{IV} + 2(\beta_n^2 + 2\beta_n + 2)f_{in}'' + \beta_n^2(\beta_n + 2)^2 f_{in} = 0 \quad (2.5)$$

контурные условия

$$\begin{aligned} f_{1n}(\varphi_1) = 0, \quad f_{1n}'(\varphi_1) = 0, \quad f_{2n}(-\varphi_2) = 0, \quad f_{2n}'(-\varphi_2) = 0 \\ f_{1n}(0) = f_{2n}(0), \quad f_{1n}'(0) = f_{2n}'(0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

и условия сопряженности решений

$$\begin{aligned} (\beta_n + 2)[m_1(\beta_n + 2) - (\beta_n + 1)]f_{1n}(0) + m_1 f_{1n}'(0) = \\ = \mu \{ (\beta_n + 2)[m_2(\beta_n + 2) - (\beta_n + 1)]f_{2n}(0) + \\ + m_2 f_{2n}'(0) \} + 2G_1 V_{1n}(0)(x_2' - x_1') \\ m_1 f_{1n}'''(0) + [(\beta_n + 2)(2m_1 - 1 + m_1\beta_n + \beta_n) + 2]f_{1n}''(0) = \\ = \mu \{ m_2 f_{2n}'''(0) + [(\beta_n + 2)(2m_2 - 1 + m_2\beta_n + \beta_n) + \\ + 2]f_{2n}''(0) \} + 2G_1 V_{1n}'(0)(x_2'\gamma_1 - x_1') \end{aligned} \quad (2.6')$$

Решение уравнений (2.5) будет

$$\begin{aligned} f_{in}(\varphi) = A_{in}' \cos \beta_n \varphi + B_{in}' \sin \beta_n \varphi + C_{in}' \cos (\beta_n + 2) \varphi + \\ + D_{in}' \sin (\beta_n + 2) \varphi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Удовлетворяя условиям (2.6) и (2.6'), для искоемых коэффициентов  $A_{in}'$ ,  $B_{in}'$ ,  $C_{in}'$ ,  $D_{in}'$  получаем линейную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} A_{1n}' \cos \beta_n \varphi_1 + B_{1n}' \sin \beta_n \varphi_1 + C_{1n}' \cos (\beta_n + 2) \varphi_1 + D_{1n}' \sin (\beta_n + 2) \varphi_1 = 0 \\ - A_{1n}' \beta_n \sin \beta_n \varphi_1 + B_{1n}' \beta_n \cos \beta_n \varphi_1 - C_{1n}' (\beta_n + 2) \sin (\beta_n + 2) \varphi_1 + \\ + D_{1n}' (\beta_n + 2) \cos (\beta_n + 2) \varphi_1 = 0 \\ A_{2n}' \cos \beta_n \varphi_2 - B_{2n}' \sin \beta_n \varphi_2 + C_{2n}' \cos (\beta_n + 2) \varphi_2 - D_{2n}' \sin (\beta_n + 2) \varphi_2 = 0 \\ A_{2n}' \beta_n \sin \beta_n \varphi_2 + B_{2n}' \beta_n \cos \beta_n \varphi_2 + C_{2n}' (\beta_n + 2) \sin (\beta_n + 2) \varphi_2 + \\ + D_{2n}' (\beta_n + 2) \cos (\beta_n + 2) \varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

$$A'_{1n} + C'_{1n} - A'_{2n} - C'_{2n} = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & (\beta_n + 1) [A'_{1n} (4m_1 - \beta_n - 2) - C'_{1n} (\beta_n + 2)] - \nu (\beta_n + 1) \times \\ & \times [A'_{2n} (4m_2 - \beta_n - 2) - C'_{2n} (\beta_n + 2)] = 2G_1 V_{1n}(0) (\alpha'_2 - \alpha'_1) \\ & \beta_n (\beta_n + 1) [B'_{1n} (4m_1 + \beta_n) + (\beta_n + 2) D'_{1n}] - \nu \beta_n (\beta_n + 1) [B'_{2n} (4m_2 + \beta_n) + \\ & + D'_{2n} (\beta_n + 2)] = 2G_1 V_{1n}(0) (\alpha'_2 \gamma - \alpha'_1) \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается частное решение, соответствующее членам второго ряда  $T_i$  ( $i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} F_{in}^{(2)} = r^{in+2} [L'_{in} \cos \gamma_n \varphi + M'_{in} \sin \gamma_n \varphi + \\ + N'_{in} \cos (\gamma_n + 2) \varphi + P'_{in} \sin (\gamma_n + 2) \varphi] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты, входящие в (2.9), определяются из (2.8), если заменить  $A'_{in}$ ,  $B'_{in}$ ,  $C'_{in}$ ,  $D'_{in}$ ,  $V_{in}(0)$  и  $V'_{in}(0)$  соответственно величинами  $L'_{in}$ ,  $M'_{in}$ ,  $N'_{in}$ ,  $P'_{in}$ ,  $U_{in}(0)$ ,  $U'_{in}(0)$ .

Частное решение, соответствующее члену  $T_0$  в (2.3), будет

$$F_{i0} = r^2 f_{i0}(\varphi) \quad (i = 1, 2) \quad (2.10)$$

Общее решение однородных уравнений (1.1) при однородных условиях, соответствующих (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), возьмем в виде [3]

$$\begin{aligned} W_{in} = r^{\lambda_n-1} [A_{in} \cos (\lambda_n - 1) \varphi + B_{in} \sin (\lambda_n + 1) \varphi + \\ + C_{in} \cos (\lambda_n + 1) \varphi + D_{in} \sin (\lambda_n + 1) \varphi] \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — корни уравнения

$$\begin{aligned} & (\nu - 1)^2 (\sin^2 \lambda \varphi_1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1) (\sin^2 \lambda \varphi_2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2) + \\ & + 4\nu m_1 m_2 [\sin^2 \lambda (\varphi_1 + \varphi_2) - \lambda^2 \sin^2 (\varphi_1 + \varphi_2)] - \\ & - 4(\nu - 1) [\nu m_2 (\sin^2 \lambda \varphi_1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1) \sin^2 \lambda \varphi_2 - m_1 (\sin^2 \lambda \varphi_2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2) \sin^2 \lambda \varphi_1] + \\ & + 4(\nu m_2 - m_1) [\nu m_2 (\sin^2 \lambda \varphi_1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1) - \\ & - m_1 (\sin^2 \lambda \varphi_2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2)] = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

с положительными действительными частями.

Коэффициенты  $A_{in}$ ,  $B_{in}$ ,  $C_{in}$ ,  $D_{in}$  ( $n = 1, 2$ ) выражаются через один из них при помощи однородной системы (2.8), если соответствующее  $\lambda_n$  является простым корнем уравнения (2.12).

Представления (2.4) и (2.9) справедливы, когда между корнями  $\lambda_n$  уравнения (2.12) и  $\gamma_n + 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) нет совпадающих. При этом предположении определитель системы уравнений (2.8) или аналогичной системы для  $L'_{in}$ ,  $M'_{in}$ ,  $N'_{in}$ ,  $P'_{in}$  ( $i = 1, 2$ ) не равен нулю.

Функции напряжений для окрестности края соединения имеют следующие окончательные выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_i = r^2 f_{i0}(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n+2} [A'_{in} \cos \beta_n \varphi + B'_{in} \sin \beta_n \varphi + C'_{in} \cos(\beta_n + 2)\varphi + \\ + D'_{in} \sin(\beta_n + 2)\varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n+2} [L'_{in} \cos \gamma_n \varphi + M'_{in} \sin \gamma_n \varphi + \\ + N'_{in} \cos(\gamma_n + 2)\varphi + P'_{in} \sin(\gamma_n + 2)\varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n+1} [A_{in} \cos(\lambda_n - 1)\varphi + \\ + B_{in} \sin(\lambda_n - 1)\varphi + C_{in} \cos(\lambda_n + 1)\varphi + D_{in} \sin(\lambda_n + 1)\varphi] \quad (2.13) \end{aligned}$$

В последнем члене выражения (2.13) сумма распространяется на все корни уравнения (2.12), для которых  $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ .

Из представления функций  $\Phi_i(r, \varphi)$  в виде (2.13) видно, что, если  $0 < \operatorname{Re} \lambda_n < 1$  при приближении к угловой точке контура, напряжения неограниченно возрастают. Порядок особенности равен  $\operatorname{Re} \lambda_n - 1$ . Напряжения, соответствующие второму и третьему слагаемым (2.13), когда  $r \rightarrow 0$ , стремятся к нулю. Напряжения, соответствующие первому члену (2.13), не зависят от  $r$ .

Таким образом, особенности напряжений в задачах плоской деформации теории термоупругости обусловлены особенностями напряжений в соответствующих однородных задачах плоской деформации теории упругости.

Общее исследование вопросов затухания и возрастания напряжений при приближении к краю поверхности соединения составного нагруженного тела приведено в работе [3].

3. Если при общем нагружении около края соединения отсутствуют особенности напряжений, то есть  $\operatorname{Re} \lambda_n > 1$ , преобладающими напряжениями являются напряжения, соответствующие первому члену в выражении (1.13). Этот член соответствует постоянной температуре, отличной от температуры, при которой произведено соединение.

Подставляя (2.10) в (1.1), (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), получаем

$$f_{i0}^{iv} + 4f_{i0}'' = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

$$f_{10}(\varphi_1) = 0, \quad f'_{10}(\varphi_1) = 0, \quad f_{20}(-\varphi_2) = 0, \quad f'_{20}(-\varphi_2) = 0$$

$$f_{10}(0) = f_{20}(0), \quad f'_{10}(0) = f'_{20}(0) \quad (3.2)$$

$$2(2m_1 - 1)f_{10}(0) + m_1 f'_{10}(0) - \mu [2(2m_2 - 1)f_{20}(0) + m_2 f'_{20}(0)] = \\ = 2G_1 T_0 (\alpha'_2 - \alpha'_1)$$

$$m_1 [f''_{10}(0) + 4f'_{10}(0)] + \mu m_2 [f''_{20}(0) + 4f'_{20}(0)] = 0$$

Решение уравнений (3.1) будет

$$f_{\theta_i} = A_i + B_i \varphi + C_i \cos 2\varphi + D_i \sin 2\varphi \quad (i = 1, 2) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получаем

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 \varphi_1 + C_1 \cos 2\varphi_1 + D_1 \sin 2\varphi_1 &= 0 \\ B_1 - 2C_1 \sin 2\varphi_1 + 2D_1 \cos 2\varphi_1 &= 0 \\ A_2 - B_2 \varphi_2 + C_2 \cos 2\varphi_2 + D_2 \sin 2\varphi_2 &= 0 \\ B_2 + 2C_2 \sin 2\varphi_2 + 2D_2 \cos 2\varphi_2 &= 0 \\ A_1 + C_1 - A_2 - C_2 &= 0 \\ B_1 + 2D_1 - B_2 - 2D_2 &= 0 \\ (2m_1 - 1) A_1 - C_1 - \mu(2m_2 - 1) A_2 + \mu C_2 &= G_1 T_0 (z'_2 - z'_1) \\ m_1 B_1 - \mu m_2 B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решая систему уравнений (3.4) и подставляя полученные значения для  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  в (2.10), имеем

$$F_{\theta_0} = \frac{Rr^2}{\Delta} (a_i + b_i \varphi + c_i \cos 2\varphi + d_i \sin 2\varphi) \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} R &= G_1 T_0 (z'_2 - z'_1) \\ \frac{1}{2} \Delta &= 2\mu m_2 (m_2 - \sin^2 \varphi_2) (2\sin^2 \varphi_1 - \varphi_1 \sin 2\varphi_1) + \\ &+ 2\mu m_2 \sin^2 \varphi_2 [2(1 - m_1) \sin^2 \varphi_1 + \varphi_1 (2m_1 - 1) \sin 2\varphi_1] + \\ &+ \mu m_1 m_2 \sin 2\varphi_1 (\sin 2\varphi_2 - 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2) + \\ &+ 2\mu m_1 \sin^2 \varphi_1 [2(1 - m_2) \sin^2 \varphi_2 + \varphi_2 (2m_2 - 1) \sin 2\varphi_2] + \\ &+ \mu m_1 m_2 \sin 2\varphi_2 (\sin 2\varphi_1 - 2\varphi_1 \cos 2\varphi_1) - \\ &- 2m_1 (m_1 - \sin^2 \varphi_1) (2\sin^2 \varphi_2 - \varphi_2 \sin 2\varphi_2) \\ a_1 &= 4\mu m_2 (\varphi_1 \sin 2\varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) \sin^2 \varphi_2 + \mu m_2 \sin 2\varphi_2 (2\varphi_1 \cos 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) - \\ &- 2m_1 (\varphi_2 \sin 2\varphi_2 - 2\sin^2 \varphi_2) \\ b_1 &= 2\mu m_2 [\sin 2(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2] \\ c_1 &= -4\mu m_2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 + \mu m_2 \sin 2\varphi_2 (2\varphi_1 \cos 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) + \\ &+ 2m_1 \cos 2\varphi_1 (\varphi_2 \sin 2\varphi_2 - 2\sin^2 \varphi_2) \\ d_1 &= 2\mu m_2 \sin 2\varphi_2 (\varphi_1 \sin 2\varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) + 2\mu m_2 \sin 2\varphi_1 \sin^2 \varphi_2 + \\ &+ 2m_1 \sin 2\varphi_1 (\varphi_2 \sin 2\varphi_2 - 2\sin^2 \varphi_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$a_2(m_1, \mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = a_1(-\mu m_2, -m_1, \varphi_2, \varphi_1)$$

$$b_2(\mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = b_1(m_1, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$c_2(m_1, \mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = c_1(-\mu m_2, -m_1, \varphi_2, \varphi_1)$$

$$d_2(m_1, \mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = d_1(\mu m_2, m_1, \varphi_2, \varphi_1)$$

При условии отсутствия концентрации напряжений местные термоупругие напряжения, возникающие в составном теле при равномерном нагревании, можно вычислить с помощью формул (1.2), принимая  $\Phi_i(r, \varphi) = F_{i0}(r, \varphi)$  ( $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим частный случай  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ . Из (3.6) получим

$$a_1 = a_2 = 4M \sin \varphi_1, \quad b_1 = b_2 = 0$$

$$c_1 = c_2 = -4M \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1 \quad (3.7)$$

$$d_1 = d_2 = -4M \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1$$

$$\Delta = 8M \sin \varphi_1 [m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1]$$

где

$$M = (m_1 - \mu m_2) \sin \varphi_1 + (m_1 \varphi_2 + \mu m_2 \varphi_1) \cos \varphi_1$$

Подставляя значения постоянных (3.7) в (3.5), получаем функции напряжений, выражения которых совпадают

$$F_{i0} = \frac{Rr^2 \sin^2(\varphi - \varphi_1)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1} \quad (i = 1, 2) \quad (3.8)$$

В этом частном случае напряжения на линии раздела разрывов не имеют.

Местные термоупругие напряжения определяются формулами

$$\sigma_\varphi = \frac{R \sin 2(\varphi_1 - \varphi)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1}, \quad \sigma_\varphi = R \frac{1 - \cos 2(\varphi - \varphi_1)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1}$$

$$\sigma_r = R \frac{1 + \cos 2(\varphi - \varphi_1)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu + 1) \sin^2 \varphi_1} \quad (3.9)$$

Вычислим интенсивность касательных напряжений

$$6\bar{\sigma}_i^2 = (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_\varphi^{(i)})^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^{(i)})^2 + 6\sigma_{r\varphi}^2 \quad (i = 1, 2) \quad (3.10)$$

где компонента напряжений  $\sigma_\varphi^{(i)}$  определяется по формуле

$$\sigma_\varphi^{(i)} = \nu_i (\sigma_r - \sigma_\varphi) - \alpha_i E_i T_0 \quad (i = 1, 2)$$

или

$$\sigma_\varphi^{(i)} = \frac{2\nu_i R}{N} - \alpha_i E_i T_0 \quad (3.11)$$

где

$$N = m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1$$



Подставляя (3.9) и (3.11) в (3.10), получим

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{R^2}{3N^2} [\bar{\sigma}_i^{(i)} - 2\bar{\sigma}_i^{(i)} + 4] \quad (i = 1, 2) \quad (3.12)$$

где

$$\bar{\sigma}_i^{(i)} = \frac{N}{R} \sigma_i^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

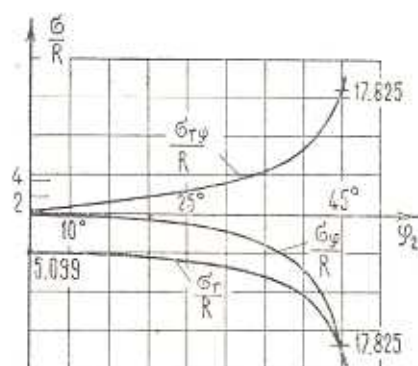
Таким образом, интенсивности касательных напряжений и нормальное напряжение  $\sigma_i$  в каждой из областей постоянны.

На фиг. 2 приведен график зависимостей местных термоупругих напряжений на поверхности соединения в окрестности ее края от угла  $\varphi_2$  в случае  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$  для составного элемента из стали I и меди II

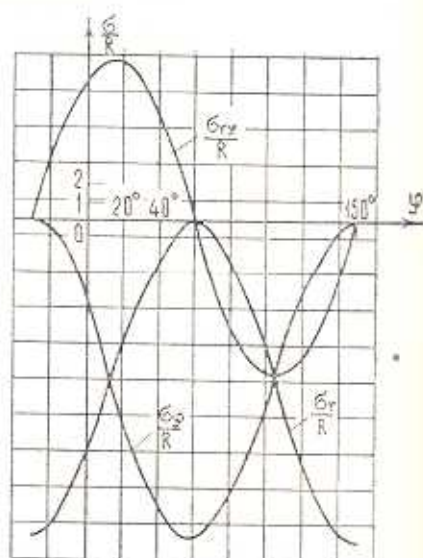
$$\mu = \frac{G_1}{G_2} = 1.67597, \quad \nu_1 = 0.293, \quad \nu_2 = 0.343,$$

$$\gamma_1 = 125 \cdot 10^{-7}, \quad \gamma_2 = 165 \cdot 10^{-7}$$

Продолжение этих графиков при  $\varphi_2 > 45^\circ$  не имеет смысла, так как входим в зоны концентрации напряжений в окрестности  $r = 0$ .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 3 приведены графики распределения температурных напряжений для соединения стали и меди при  $\varphi_1 = 150^\circ$ ,  $\varphi_2 = 30^\circ$ .

В случае  $\mu = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , соответствующем предельному значению  $\lambda = 1$ , формулы (3.9) не справедливы.

Определим перемещения в рассматриваемом частном случае.

Подставляя (3.9) и (1.5') в (1.5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial r} &= \frac{R}{NE_i} [1 - \nu_i + (1 + \nu_i) \cos 2(\varphi_1 - \varphi)] + \alpha_i' T_0 \\ \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} &= \frac{R}{NE_i} [1 - \nu_i - (1 + \nu_i) \cos 2(\varphi_1 - \varphi)] + \alpha_i' T_0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r} &= -\frac{R}{NG_i} \sin 2(\varphi - \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$E_i = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2}, \quad \nu_i = \frac{\nu_i}{1 - \nu_i}, \quad \alpha_i' = \alpha_i (1 + \nu_i)$$

Интегрируя (3.13), при условии  $u_i, v_i|_{r=0} = 0$  получаем

$$u_i = \frac{Rr}{E_i N} [1 - \nu_i + (1 + \nu_i) \cos 2(\varphi_1 - \varphi)] + \alpha_i' T_0 r$$

$$v_i = \frac{Rr}{E_i N} (1 + \nu_i) \sin 2(\varphi_1 - \varphi) + C_i r$$

Постоянные интегрирования  $C_i$  ( $i=1, 2$ ) находим из условия  $\left. \frac{\partial v_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$

$$C_1 = -\frac{R}{E_1 N} (1 + \nu_1) \sin 2\varphi_1, \quad C_2 = -\frac{R}{E_2 N} (1 + \nu_2) \sin 2\varphi_2$$

Нетрудно заметить, что условия непрерывности перемещений на поверхности соединения выполняются.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 22 X 1970

Գ. Ս. ՉՈՐԱՅԱՆ, Պ. Կ. ԱՇԽԱՏՅԱՆ

ՉԵՐՄԱՌԱՋՄԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԲԱՂԱԳՐՅԱԿ ՄԱՐՄԵՆԻ ՄԻՋՄՈՒՆ  
ՄԱՍԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԵՋՐԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Գիտարկվում են շերտառածղական լարումները հարթ ղեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող և ստացրած շերտային աղղեցություն և ներարկված բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում:

Բիհարմոնիկ հավասարման առկական լուծումների օգնությամբ ստացված է լարումների ֆունկցիաների արտահայտությունը: Յուրյ է արված, որ շերտառածղականության տեսության հարթ ղեֆորմացիայի խնդիրներում լարումների եզակիությունները պայմանավորված են առածղականության տեսության համապատասխան խնդիրներում լարումների եզակիություններով արված արտաքին բեռի ղեզրում:

Պողպատից և պղնձից բաղադրյալ էլեմենտի համար  $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$  դեպքում բերված են միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում ջերմաոսածղական լարումների բաշխման գրաֆիկները: ջերմաոսածղական լարումների  $\varphi_2$  անկյունից կախվածության գրաֆիկները և ջերմաոսածղական լարումների բաշխման գրաֆիկները, երբ  $\varphi_1 = 150^\circ$ ,  $\varphi_2 = 30^\circ$ :

## THERMAL STRESSES IN THE VICINITY OF THE JOINT SURFACE BORDER OF A COMPOSITE BODY

K. S. CHOBANIAN, R. K. ALEXANIAN

### S u m m a r y

The thermoelastic stresses in the vicinity of the joint surface border of a composite body in conditions of plane deformation and subject to a stationary temperature action are considered.

An expression for the function of stresses is derived by means of local solutions of double Laplacian equations. It is proved that singularities of stresses in the problems of plane deformation of the theory of thermoelasticity are due to those in the corresponding problems of the theory of elasticity with a given external load.

The diagrams of dependence of local thermoelastic stresses in the vicinity of the joint surface border on the angle  $\varphi_2$  in the case of  $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$  for a composite element of steel and copper as well as those of distribution of thermoelastic stresses for steel and copper when  $\varphi_1 = 150^\circ$ ,  $\varphi_2 = 30^\circ$  are given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С. Об особенностях распределения напряжений около угловых точек линии раздела и контура сечения скручиваемого составного стержня. Докл. на общем годичном собрании АН Арм. ССР, 1966.
2. Геворкян С. Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 4, 1968.
3. Чобанян К. С., Ширинян Р. А. Способ повышения вибропрочности соединения. Авт. свидетельство № 1397914, 25—27.
4. Боджи Д. В. Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. Прикл. Мех. Труды ASME, т. 35, сер. E, № 2, 1968.
5. Iyengar K. F. S. R., Alwar R. S. Stress analysis of a long compound bar. „J. of applied Mathem. and physics“, ZAMP, v. 14, 1963.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.-М., ГТТИ, 1934.
7. Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН Арм. ССР, т. 32, № 2, 1961.
8. Винер Н. и Пели Р. Преобразования Фурье в комплексной области. Изд. „Наука“, М., 1964.