ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 3, 1971 Механика

О. М. САПОНДЖЯН

ПОСТРОЕНИЕ КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ

В работе указывается способ построения функций, конформно отображающих область кольца на некоторые двусвязные области, ограниченные простыми контурами. При построении приближенных отображающих функций применен известный метод Л. В. Канторовича [1].

Построенные отображающие функции могут применяться при решении ряда задач теории упругости и пластичности [2].

В качестве примера применения построенных функций рассмотрена задача о кручении призматического стержня с сечением, ограниченным извне окружностью, а изнутри—прямолинейным разрезом.

§1. Отображение области кольца на область с прямолинейным разрезом

1. Обозначим комплексную координату области кольца через $\zeta = \rho e^{i\theta}$, а области с разрезом (область G) через $z = x + iy$. Внутренний радиус кольца пусть будет $\rho = \lambda < 1$, а внешний — $\rho = 1$. В области G имеется прямолинейный разрез вдоль конечного отрезка прямой, уравнение которой пусть будет $y = mx$ ($m = \text{const}$) или в комплексной форме

$$\bar{z} = \frac{(1 - im)^2}{1 + m^2} z \qquad (\bar{z} = x - iy) \tag{1.1}$$

Конформное отображение области кольца на область G осуществляется рядом Лорана. Используя только условие перехода внутренней окружности кольца на разрез (1.1), указанный ряд приводим к виду

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{1}^{\infty} \left[a_k \zeta^k + \frac{(1 + im)^2}{1 + m^2} \bar{a}_k \frac{\lambda^{2k}}{\zeta^k} \right] \tag{1.2}$$

где $a_1 \neq 0$, $\operatorname{Im} a_1 = 0$.

Функция (1.2) обеспечивает наличие разреза (1.1) в G независимо от значения коэффициентов a_k. Последние определяются из условия перехода внешней окружности кольца на внешний контур области G.

2. В качестве первого примера определения a_k рассмотрим случай, когда область G есть бесконечная полоса с разрезом вдоль отрезка оси x длиной $2d$ (фиг. 1). В этом случае в (1.2) надо положить $m=0$, $\overline{a}_k = a_k$, $a_{2k}=0$. Из условия перехода контура $y=b$ на внешнюю полуокружность кольца при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, то есть из условия

$$\sum_{1}^{\infty} a_{2k+1}(1-\lambda^{4k+2}) \sin(2k+1)\theta = b$$

определяем коэффициенты

$$a_{2k+1} = \frac{4b}{\pi(2k+1)(1-\lambda^{4k+2})}$$

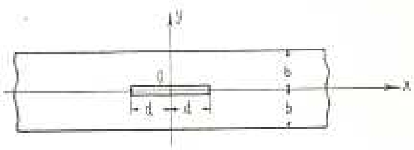
При этом отображающая функция (1.2) примет вид

$$z = \omega(\zeta) = \frac{4b}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\zeta^{2k+1} + \dfrac{\lambda^{4k+2}}{\zeta^{2k+1}}}{(2k+1)(1-\lambda^{4k+2})} \tag{1.3}$$

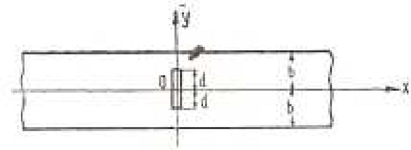
Отсюда при $\zeta = \lambda$ для половины длины разреза будем иметь

$$d = \frac{8b}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)(1-\lambda^{4k+2})} \tag{1.4}$$

Придавая параметру λ различные значения в интервале $0 < \lambda < 1$, находим соответствующие значения d.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

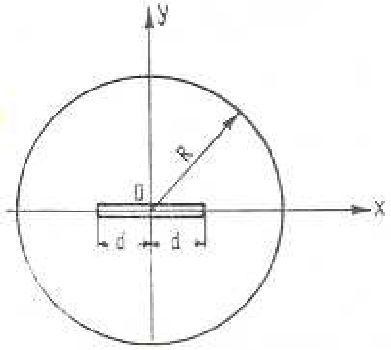
В случае, когда разрез длиной $2d$ проведен вдоль отрезка оси y и симметрично расположен относительно оси x (фиг. 2), отображающая функция (1.2) примет вид

$$z = \omega(\zeta) = \frac{4b}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\zeta^{2k+1} - \dfrac{\lambda^{4k+2}}{\zeta^{2k+1}}}{(2k+1)(1+\lambda^{4k+2})} \tag{1.5}$$

откуда, при $\zeta = i\lambda$, будем иметь

$$d = \frac{8b}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k+1}}{(2k+1)(1+\lambda^{4k+2})} \tag{1.6}$$

3. Рассмотрим случай, когда область G есть круг с диаметральным разрезом длиной $2d < 2R$, симметрично расположенным относительно центра круга, принятого за начало координат (фиг. 3). Ось x проходит вдоль разреза.



Фиг. 3.

Из (1.2) для рассматриваемого случая имеем

$$z = \omega(\zeta) = \sum_0^\infty a_{2k+1}\left(\zeta^{2k+1} + \frac{\lambda^{4k+2}}{\zeta^{2k+1}}\right) \tag{1.7}$$

Уравнением внешнего контура области G будет $z\bar{z} = R^2$. Внеся в это уравнение (1.7) и приняв $\zeta = e^{i\theta}$, приходим к бесконечной системе уравнений относительно a_{2k+1}:

$$\sum_{k=0}^\infty (1+\lambda^{8k+4})\, a_{2k+1}^2 = R^2$$

$$\sum_{k=0}^\infty (1+\lambda^{8k+4n+4})\, a_{2k+1}\, a_{2k+2n+1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{4k+2} a_{2k+1}\, a_{2n-2k-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

Решая эти уравнения с точностью до λ^8 методом последовательных приближений [1], находим

$$a_1 = R(1-\lambda^4+2\lambda^8), \qquad a_3 = -R\lambda^2(1-2\lambda^4)$$

$$a_5 = R\lambda^4(1-2\lambda^4), \qquad a_7 = -R\lambda^6, \qquad a_9 = R\lambda^8$$

Пользуясь этими значениями, из (1.7) получим

$$z = R\Big[(1-\lambda^4+2\lambda^8)\left(\zeta+\frac{\lambda^2}{\zeta}\right) - \lambda^2(1-2\lambda^4)\left(\zeta^3+\frac{\lambda^6}{\zeta^3}\right) +$$

$$+ \lambda^4(1-2\lambda^4)\left(\zeta^5+\frac{\lambda^{10}}{\zeta^5}\right) - \lambda^6\left(\zeta^7+\frac{\lambda^{14}}{\zeta^7}\right) + \lambda^8\left(\zeta^9+\frac{\lambda^{18}}{\zeta^9}\right)\Big] \tag{1.8}$$

Приняв в (1.8) $\zeta = \lambda$, с принятой точностью находим

$$d = 2R\lambda\,(1 - 2\lambda^4 + 5\lambda^8) \tag{1.9}$$

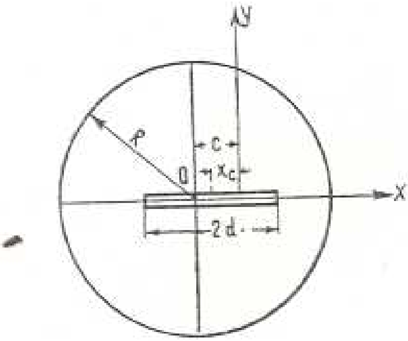
4. Рассмотрим теперь случай, когда область G есть круг с несимметричным относительно центра круга диаметральным разрезом длиной $2d < 2R$. Направив ось x вдоль разреза (фиг. 4) и приняв $m = 0$, $\overline{a}_k = a_k$, из (1.2) получим

$$z = \omega(\zeta) = \sum_1^\infty a_k \left(\zeta^k + \frac{\lambda^{2k}}{\zeta^k} \right) \tag{1.10}$$

Уравнение внешнего контура области G представим в комплексной форме

$$z\overline{z} + c\,(z + \overline{z}) = R^2 - c^2 \tag{1.11}$$

где c — расстояние от центра круга до начала координат.



Фиг. 4.

Внеся (1.10) при $\zeta = e^{i\vartheta}$ в (1.11) и обозначив

$$\nu = \frac{c}{R}, \qquad a_k = Ru_k$$

приходим к бесконечной системе уравнений

$$u_1 = (1 + \lambda^4)^{-1/2} \left\{ 1 - \nu^2 - \left[(1 + \lambda^8)\,u_2^2 + (1 + \lambda^{12})\,u_3^2 + \cdots \right] \right\}^{1/2}$$

$$u_{2n} = -u_1^{-1}(1 + \lambda^{4n+2})^{-1} \left\{ (1 + \lambda^{4n+6})\,u_2 u_{2n-1} + \right.$$

$$+ \sum_{k=2}^\infty \left[(1 + \lambda^{8k+4n-2})\,u_{2k} u_{2k+2n-1} + (1 + \lambda^{8k+4n-6})\,u_{2k-1} u_{2k+2n-2} \right] +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda^{4k-2} u_{2k-1} u_{2n-2k} + \lambda^{4k} u_{2k} u_{2n-2k-1}) + \nu\,(1 + \lambda^{4n-2})\,u_{2n-1} \right\}$$

$$u_{2n-1} = -u_1^{-1}(1+\lambda^{4n+4})^{-1}\Big\{(1+\lambda^{4n+8})u_2u_{2n+2} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(1+\lambda^{8k+4n})u_{2k}u_{2k+2n} + (1+\lambda^{8k+4n-4})u_{2k-1}u_{2k+2n-1}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(\lambda^{4k-2}u_{2k-1}u_{2n-2k+1} + \lambda^{4k}u_{2k}u_{2n-2k}) + \nu(1+\lambda^{4n})u_{2n}\Big\}$$

$$u_0 = 0 \quad (n = 1,\ 2, \cdots)$$

Из этой системы уравнений методом последовательных приближений [1] могут быть найдены значения конечного числа коэффициентов u_k.

Определив эти коэффициенты для нечетных „k“ с точностью до $\lambda^m\nu^n$ при $m+n=4$ $(m=0,\ 2,\ 4;\ n=0,\ 2,\ 4)$, а для четных „$k$“ с точностью до $\lambda^m\nu^n$ при $m+n=5$ $(m=0,\ 2,\ 4;\ n=1,\ 3,\ 5)$ и приняв за исходное значение $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = \cdots = 0$, отображающую функцию (1.10) представим в виде

$$z = R\Big[(1-\nu^2-\nu^2\lambda^2-\lambda^4)\left(\zeta+\frac{\lambda^2}{\zeta}\right) - (\nu+2\nu\lambda^2-\lambda^3-$$

$$-4\lambda^2\nu^3)\left(\zeta^2+\frac{\lambda^4}{\zeta^2}\right) + (\nu^2-\lambda^2+5\nu^2\lambda^2-\nu^4)\left(\zeta^3+\frac{\lambda^6}{\zeta^3}\right) +$$

$$+(2\nu\lambda^2-\nu^3+4\nu\lambda^4-8\nu^3\lambda^2+\nu^5)\left(\zeta^4+\frac{\lambda^8}{\zeta^4}\right) -$$

$$-(3\nu^2\lambda^2-\lambda^4-\nu^4)\left(\zeta^5+\frac{\lambda^{10}}{\zeta^5}\right) +$$

$$+(4\nu^3\lambda^2-3\nu\lambda^4-\nu^5)\left(\zeta^6+\frac{\lambda^{12}}{\zeta^6}\right)\Big] \tag{1.12}$$

Приняв в (1.12) $\zeta = \pm\lambda$, с принятой точностью находим

$$2d = 4R\lambda(1-\nu^2-2\lambda^4) \tag{1.13}$$

а для абсциссы срединной точки разреза будем иметь

$$x_c = -2R\lambda^2\nu(1+2\lambda^2-\nu^2) \tag{1.14}$$

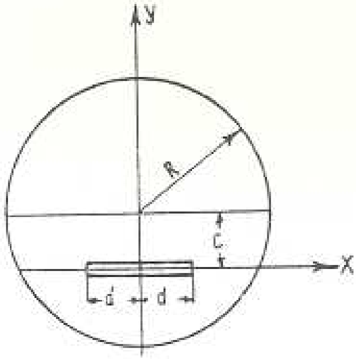
5. Рассмотрим также случай, когда область G есть круг с разрезом, показанным на фиг. 5.

В случае, когда область G симметрична только относительно оси y и ось x проведена вдоль разреза, отображающая функция (1.2) приведется к виду

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{1}^{\infty} \left[a_{2k-1}\left(\zeta^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\zeta^{2k-1}}\right) + i a_{2k}\left(\zeta^{2k} - \frac{\lambda^{4k}}{\zeta^{2k}}\right)\right] \qquad (1.15)$$

Уравнение внешнего контура области G представим в комплексной форме

$$z\bar{z} + ic(z - \bar{z}) = R^2 - c^2$$



Фиг. 5.

В это уравнение внеся (1.15) при $\zeta = e^{i\theta}$, приходим к бесконечной системе уравнений

$$u_1 = (1+\lambda^4)^{-1/2}\{1 - \nu^2 - [(1+\lambda^8)u_2^2 + (1+\lambda^{12})u_3^2 + \cdots]\}^{1/2}$$

$$u_{2n} = u_1^{-1}(1+\lambda^{4n+2})^{-1}\Big\{(1+\lambda^{4n+6})u_2 u_{2n+1} -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty}[(1+\lambda^{8k+4n-6})u_{2k-1}u_{2k+2n-3} - (1+\lambda^{8k+4n-2})u_{2k}u_{2k+2n-1}] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda^{4k-2}u_{2k-1}u_{2n-2k} + \lambda^{4k}u_{2k}u_{2n-2k-1}) - \nu(1-\lambda^{4n-2})u_{2n-1}\Big\}$$

$$u_{2n+1} = -u_1^{-1}(1+\lambda^{4n+4})^{-1}\Big\{(1+\lambda^{4n+8})u_2 u_{2n+2} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}[(1+\lambda^{8k+4n-4})u_{2k-1}u_{2k+2n-1} + (1+\lambda^{8k+4n})u_{2k}u_{2k+2n}] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}(\lambda^{4k-2}u_{2k-1}u_{2n-2k+1} - \lambda^{4k}u_{2k}u_{2n-2k}) - \nu(1-\lambda^{4n})u_{2n}\Big\}$$

$$u_0 = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

где

$$u_k = \frac{a_k}{R}, \qquad \nu = \frac{c}{R}$$

Из приведенной бесконечной системы уравнений методом последовательных приближений, с оговоренной выше точностью, определяем $u_1, u_2, \cdots, u_6$.

При этом отображающая функция (1.15) будет иметь вид

$$z = \sum_1^3 \left| a_{2k-1}\left(\zeta^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\zeta^{2k-1}}\right) + ia_{2k}\left(\zeta^{2k} - \frac{\lambda^{4k}}{\zeta^{2k}}\right)\right| \tag{1.16}$$

где

$$\begin{gathered} a_1 = R(1-\nu^2+\nu^2\lambda^2-\lambda^4), \quad a_2 = -R(\nu-2\nu\lambda^2-\nu^3+4\nu^3\lambda^2) \\ a_3 = -R(\nu^2+\lambda^2-5\nu^2\lambda^2-\nu^4), \quad a_4 = R(2\nu\lambda^2+\nu^3-2\nu\lambda^4-8\nu^3\lambda^2-\nu^5) \\ a_5 = R(\lambda^4+3\nu^2\lambda^2+\nu^4), \quad a_6 = -R(3\nu\lambda^4-4\nu^3\lambda^2+\nu^5) \end{gathered} \tag{1.17}$$

Приняв в (1.16) $\zeta = \lambda e^{i\theta}$, получим значение абсциссы произвольной точки разреза

$$x = 2\sum_1^3 [a_{2k-1}\lambda^{2k-1}\cos(2k-1)\theta - a_{2k}\lambda^{2k}\sin 2k\theta] \tag{1.18}$$

Для половины длины разреза имеем $d = x_{\max}$.

Если принять, например, $\nu = \lambda = 0.25$, то из (1.18) найдем $d = 0.468R$ при $\theta = 6°41'$.

§2. Отображение области кольца на область, ограниченную извне окружностью, а изнутри правильным многоугольником и наоборот

1. Обозначим через $\omega_0(\zeta)$ функцию Кристоффеля-Шварца, конформно отображающую внешнюю область окружности радиуса $\rho = \lambda$ на внешнюю область правильного многоугольника. Эта функция разлагается в ряд

$$z_0 = \omega_0(\zeta) = c\left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{mk} a_{mk-1}}{\zeta^{mk-1}}\right) \tag{2.1}$$

где c — постоянный параметр, m — число сторон многоугольника, a_{mk-1} — известные действительные постоянные, не зависящие от λ.

Иногда (2.1) принимают за приближенное выражение функции, конформно отображающей область кольца радиусами $\rho = \lambda < 1$ и $\rho = 1$ на область G, ограниченную изнутри правильным многоугольником, а извне окружностью L. Точность такого приближения, очевидно, зависит от значения λ. Чем меньше λ, тем больше точность приближения.

Условие перехода внешней окружности кольца на окружность L выражается формулой

$$\omega_0(e^{i\theta})\,\omega_0(e^{-i\theta}) = R^2 \tag{2.2}$$

где R — радиус окружности L.

Из (2.2), с учетом (2.1), получим

$$1+\lambda^{2m}a_{m-1}^2+\cdots+2\lambda^m a_{m-1}\cos m\theta+$$

$$+2\lambda^{2m}a_{2m-1}\cos 2m\theta+\cdots=\frac{R^2}{c^2} \tag{2.3}$$

Это уравнение будет точно выполняться тогда, когда все коэффициенты a_{mk-1} равны нулю, что можно было предвидеть заранее. Приближенно (2.3) будет выполняться, если пренебречь в нем членами, содержащими множитель λ в степени m и больше. При этом из (2.3) получим

$$c=R \tag{2.4}$$

При указанной точности кривую L можно принять за окружность радиуса R.

Для повышения точности приближения кривой L к окружности радиуса R воспользуемся отображающей функцией

$$z=\omega_0(\zeta)-c\lambda^m a_{m-1}\zeta^{m+1} \tag{2.5}$$

Тогда взамен (2.3) будем иметь

$$1+2\lambda^{2m}a_{m-1}^2+\cdots+2\lambda^{2m}a_{2m-1}\cos 2m\theta+\cdots=\frac{R^2}{c^2} \tag{2.6}$$

Это уравнение приближенно удовлетворится, если в нем пренебречь членами, содержащими множитель λ в степени $2m$ и больше. При этом из (2.6) получится опять (2.4). Можно показать, что с той же точностью удовлетворяется условие перехода внутренней окружности кольца на внутренний контур области G.

Таким образом, функция (2.5), с учетом (2.4), с точностью $1+\lambda^{2m}\approx 1$ осуществляет условие перехода контуров кольца на контуры области G.

Перепишем (2.5) в окончательном виде

$$z=\omega(\zeta)=R\left[\zeta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{mk}a_{mk-1}}{\zeta^{mk-1}}-\lambda^m a_{m-1}\zeta^{m+1}\right] \tag{2.7}$$

В качестве примера рассмотрим случай отображения области кольца на область, ограниченную изнутри квадратом, а извне — окружностью.

За приближенное выражение функции, конформно отображающей внешность окружности радиуса $\rho=\lambda$ на внешность квадрата, с достаточной точностью можно принять первые три члена функции (2.1) при $m=4$:

$$z_0=c\left(\zeta-\frac{\lambda^4}{6\zeta^3}+\frac{\lambda^8}{56\zeta^7}\right) \tag{2.8}$$

Отображающая функция (2.7) примет вид

$$z = R\left(\zeta - \frac{\lambda^4}{6\zeta^3} + \frac{\lambda^8}{56\zeta^7} + \frac{\lambda^4}{6}\zeta^5\right) \tag{2.9}$$

2. Обозначим через $\omega_0(\zeta)$ функцию Кристоффеля-Шварца, отображающую область единичного круга на область правильного многоугольника. Эта функция разлагается в ряд Тейлора

$$\omega_0(\zeta) = c\left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1}\zeta^{mk+1}\right) \tag{2.10}$$

где m — по-прежнему число сторон многоугольника, a_{mk+1} — известные действительные постоянные.

Аналогично случаю предыдущего пункта можно показать, что

$$z = \omega(\zeta) = \frac{R}{\lambda}\left[\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1}\zeta^{mk+1} - \frac{\lambda^{2m} a_{m+1}}{\zeta^{m-1}}\right] \tag{2.11}$$

является приближенным выражением функции, конформно отображающей область кольца радиусами $\rho = \lambda < 1$ и $\rho = 1$ на область G, ограниченную изнутри окружностью радиуса R, а извне—правильным многоугольником. Приближенность указанного выражения заключается в том, что условие перехода контуров кольца на контуры области G удовлетворяется с точностью $1 - \lambda^{2m} \approx 1$.

§ 3. Отображение области кольца на область, ограниченную изнутри правильным многоугольником с закругленными углами, а извне—замкнутой кривой, симметричной относительно осей симметрии указанного многоугольника

1. Известная функция

$$z = c\left[\zeta - \frac{\lambda^m}{(m-1)^2\zeta^{m-1}}\right] \tag{3.1}$$

конформно отображает внешность окружности радиуса $\rho = \lambda$ на внешность правильного m-угольника с закругленными углами. Коэффициент при втором члене (3.1) выбран из условия равенства нулю кривизны контура многоугольника в срединных точках его сторон [3].

Можно показать, что указанному условию удовлетворяет каждый член ряда

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk+1}\left[\zeta^{mk+1} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2}\frac{\lambda^{2mk+m}}{\zeta^{mk+m-1}}\right] \tag{3.2}$$

причем $a_1 \neq 0$. Непосредственно видно, что первый член (3.2) совпадает с (3.1). Согласно (3.2), когда точка ζ описывает окружность радиуса $\rho = \lambda$, точка z, независимо от значений коэффициентов a_{mk+1}, будет описывать правильный m-угольник с закругленными углами.

Обобщенную функцию (3.2) можно использовать при отображении области кольца радиусами $\rho = \lambda < 1$ и $\rho = 1$ на область G, ограниченную изнутри правильным m-угольником с закругленными углами, а извне—некоторой замкнутой кривой L, симметричной относительно осей симметрии указанного m-угольника. Уравнение в комплексной форме кривой L получится из (3.2) при $\zeta = e^{i\theta}$:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk+1}\left[e^{i(mk+1)\theta} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2}\lambda^{2mk+m}e^{-i(mk+m-1)\theta}\right] \tag{3.3}$$

2. Рассмотрим случай отображения области указанного кольца на область G, ограниченную изнутри правильным m-угольником с закругленными углами, а извне—правильным m-угольником, оси симметрии которых совпадают.

При определении коэффициентов a_{mk+1} достаточно учесть уравнение той части контура внешнего m-угольника, для которой $-\frac{\pi}{m} < \theta < \frac{\pi}{m}$. В этом интервале $x = \text{const} = a$, следовательно, согласно (3.3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{mk+1}\left[\cos(mk+1)\theta - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2}\lambda^{2mk+m}\cos(mk+m-1)\theta\right] = a$$

$$\left(-\frac{\pi}{m} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{m}\right) \tag{3.4}$$

В промежутке $\left(-\frac{\pi}{m},\ +\frac{\pi}{m}\right)$ функции $\cos mn\theta\ (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ образуют полную систему, поэтому для определения a_{mk+1} умножим (3.4) на $\cos mn\theta d\theta$ и проинтегрируем результат от $-\frac{\pi}{m}$ до $+\frac{\pi}{m}$.

Обозначив при этом

$$(-1)^k a_{mk+1} = \frac{\pi a}{m\sin\frac{\pi}{m}} u_{mk+1} \tag{3.5}$$

приходим к бесконечной системе уравнений относительно u_{mk+1}:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+1)\,u_{mk+1}}{(mn-mk-1)(mn+mk+1)}\left[1 -\right.$$

$$-\frac{(mk+1)(mn-mk-1)(mn+mk+1)\lambda^{2mk+m}}{(mk+m-1)(mn-mk-m+1)(mn+mk+m-1)}\Bigg| = \alpha_n$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{3.6}$$

где

$$\alpha_0=-1, \quad \alpha_1=\alpha_2=\cdots=0 \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.6) можно найти приближенные значения конечного числа коэффициентов u_{mk+1}, и тем самым из (3.2), с учетом (3.5), определить приближенное выражение отображающей функции.

Покажем, что систему (3.6), при некотором ограничении значений параметра λ, можно привести к регулярному виду.

Легко проверить, что указанную систему можно видоизменить так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{mk+1}\Bigg|\frac{1}{mn-mk-1}-\frac{1}{mn+mk+1}-\frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2}\lambda^{2mk+m}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{mn-mk-m+1}-\frac{1}{mn+mk+m-1}\right)\Bigg| = 2\alpha_n \tag{3.8}$$

Заменив в (3.8) n на $n+1$ и вычтя полученную систему из (3.8) (известный прием, указанный в [1]), приходим к новой бесконечной системе уравнений, которую запишем в следующем виде:

$$u_{mn+1}=\frac{m-1}{1+\nu_n}\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} u_{mk+1}\Bigg[A_{k,n}-B_{k,n}-\frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2}\lambda^{2mk+m}\times$$

$$\times(C_{k,n}-D_{k,n})\Bigg]-\frac{2(m-1)}{m(1+\nu_n)}\alpha_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{3.9}$$

где

$$A_{k,n}=\frac{1}{(mn-mk-1)(mn-mk+m-1)} \tag{3.10}$$

$$B_{k,n}=\frac{1}{(mn+mk+1)(mn+mk+m+1)}$$

$$C_{k,n}=\frac{1}{(mn-mk-m+1)(mn-mk+1)}$$

$$D_{k,n}=\frac{1}{(mn+mk+m-1)(mn+mk+2m-1)}$$

$$\nu_n=\frac{m-1}{(2mn+1)(2mn+m+1)}-\frac{(mn+1)^2\lambda^{2mn+m}}{(mn+m-1)^2}\Bigg[1+$$

$$+\frac{m-1}{(2mn+m-1)(2mn+2m-1)}\Bigg] \tag{3.11}$$

Легко проверить, что при $k \neq n$

$$A_{k,n} > 0, \quad B_{k,n} > 0, \quad C_{k,n} > 0, \quad D_{k,n} > 0$$
$$A_{k,n} - B_{k,n} > 0, \quad C_{k,n} - D_{k,n} > 0 \tag{3.12}$$

и все эти величины стремятся к нулю, когда в отдельности $k,\ n \to \infty$.

Нетрудно доказать справедливость оценки

$$\mu_{k,n} = \frac{(mk+1)^2 \lambda^{2mk+m}}{(mk+m-1)^2} \frac{C_{k,n} - D_{k,n}}{A_{k,n} - B_{k,n}} \leqslant \lambda^m \frac{(mk+m-1)(mn-mk+m-1)}{(mk+1)(mn-mk-m+1)} \tag{3.13}$$

откуда

при $k < n$

$$\mu_{k,n} \leqslant \lambda^m \left(1 + \frac{m-2}{mk+1}\right) \left[1 + \frac{2(m-1)}{mn-mk-m+1}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^m (m-1)(2m-1) \tag{3.14}$$

при $k > n$

$$\mu_{k,n} \leqslant \lambda^m (m-1) \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15), потребовав выполнения неравенств

$$\mu_{k,n} \leqslant 1 \tag{3.16}$$

получим

$$\lambda \leqslant [(m-1)(2m-1)]^{-\frac{1}{m}} \tag{3.17}$$

Согласно (3.17) значения λ монотонно возрастают от 0,464 при $m=3$ до 1 при $m=\infty$.

Учитывая (3.17) и приняв $m > 2$, будем иметь оценку

$$\frac{(mn+1)^2}{(mn+m-1)^2} \lambda^{2mn-m} \left[1 + \frac{m-1}{(2mn+m-1)(2mn-2m-1)}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2m(m-1)}{(m-1)^{2n-2}(2m-1)^{2n-2}} \leqslant \frac{2m(m-1)}{(2m+1)^{2n-2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{m-1}{(2m+1)^{2n+1}} = \frac{m-1}{1 + \frac{2n+1}{1!} 2m + \frac{(2n+1)2n}{2!}(2m)^2 + \cdots} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{m-1}{(2mn+1)(2mn+2m-1)} \tag{3.18}$$

Сопоставив (3.11) с (3.18), получим

$$\nu_n > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} \nu_n = 0 \tag{3.19}$$

Пользуясь (3.10), (3.12), (3.13), (3.16) и (3.19), получим условие регулярности системы (3.9)

$$\frac{m-1}{1+\nu_n}\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\left|A_{k,n}-B_{k,n}-\frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2}\lambda^{2mk+m}\left(C_{k,n}-D_{k,n}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m-1}{1+\nu_n}\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}A_{k,n}=\frac{1}{1+\nu_n}\left[1-\frac{m-1}{m(mn+m-1)}\right]\leqslant 1 \qquad (3.20)$$

причем последний знак равенства имеет место при $n=\infty$.

При выводе (3.20) использовано значение суммы ряда [4]

$$\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{(mn-mk-1)(mn-mk+m-1)}=\frac{1}{m-1}\left[1-\frac{m-1}{m(mn+m-1)}\right]$$

Регулярная система (3.9), с учетом (3.7), позволяет найти значения конечного числа неизвестных u_{mk+1} с недостатком и избытком [1].

§ 4. Кручение стержня круглого поперечного сечения с разрезом, параллельным одному из диаметров круга

В качестве примера применения построенных отображающих функций рассмотрим задачу о кручении стержня с поперечным сечением в виде круга с разрезом, параллельным одному из диаметров круга (фиг. 5).

Задача кручения для двусвязной области легко решается, когда известна функция, конформно отображающая область кольца на эту двусвязную область [5]. Учитывая это, мы опускаем детали решения.

Будем пользоваться отображающей функцией (1.16). Функцию напряжений при кручении выберем в виде

$$\Phi=-\frac{\mu\tau}{2}z\bar{z}+\mu\tau R^2\Phi_0 \qquad (4.1)$$

где τ — относительный угол закручивания, Φ_0 — гармоническая функция

$$\Phi_0=A_0+\sum_{1}^{6}\left[\left(A_{2k}\rho^{2k}+B_{2k}\lambda^{4k}\rho^{-2k}\right)\cos 2k\theta-\right.$$

$$\left.-\left(A_{2k-1}\rho^{2k-1}-B_{2k-1}\lambda^{4k-2}\rho^{-2k+1}\right)\sin(2k-1)\theta\right] \qquad (4.2)$$

A_k, B_k — искомые постоянные.

Пользуясь контурными условиями задачи: $\Phi=0$ при $\rho=1$ и $\Phi=C_0$ при $\rho=\lambda$, учитывая при этом (1.16), (4.1) и (4.2), находим

$$C_0=\frac{\mu\tau}{2}\sum_{1}^{6}\left(1-\lambda^{2k}\right)^2 a_k^2$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{6} (1+\lambda^{4k})\, a_k^2$$

$$A_{2k} = R^{-2}(1-\lambda^{4k})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{6-2k} (1-2\lambda^{2m+4k}+\lambda^{4m+4k})\, a_m a_{2k+m} - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^m \lambda^{4k-2m} (1-\lambda^{2m})\, a_m a_{2k-m} \right]$$

$$B_{2k} = -R^{-2}(1-\lambda^{4k})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{6-2k} (1-2\lambda^{2m}+\lambda^{4m+4k})\, a_m a_{2k+m} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^m (1-\lambda^{4k-2m})\, a_m a_{2k-m} \right]$$

$$A_{2k-1} = -R^{-2}(1-\lambda^{4k-2})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{7-2k} (-1)^m (1-2\lambda^{2m+4k-2} + \right.$$

$$\left. + \lambda^{4m+4k-2})\, a_m a_{2k+m-1} - \sum_{m=1}^{2k-1} \lambda^{4k-2m-2} (1-\lambda^{2m})\, a_m a_{2k-m-1} \right]$$

$$B_{2k-1} = -R^{-2}(1-\lambda^{4k-2})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{7-2k} (-1)^m (1-2\lambda^{2m} + \right.$$

$$\left. + \lambda^{4m+4k-2})\, a_m a_{2k-m-1} + \sum_{m=1}^{2k-1} (1-\lambda^{4k-2m-2})\, a_m a_{2k-m-1} \right]$$

$$(k=1,\ 2, \cdots, 6)$$

Коэффициенты a_k определяются по (1.17). Таким образом, функция Φ полностью определена. Крутящий момент определяется по формуле

$$M = 2C_0F_0 + 2 \iint_F \Phi dxdy$$

Так как $F_0=0$ (площадь, ограниченная разрезом, равна нулю), то

$$M = 2 \iint_F \Phi dxdy = 2 \int_{\lambda}^{1} \int_{0}^{2\pi} \Phi(\rho, \theta)\, \omega(\rho e^{i\theta})\, \overline{\omega}(\rho e^{-i\theta})\, d\rho d\theta \qquad (4.3)$$

где

$$\omega(\rho e^{i\theta}) = \omega(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta}$$

Касательные напряжения определим по формулам

$$\tau_{\rho} = -\frac{x\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + y\dfrac{\partial y}{\partial\theta} - R^2\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\theta}}{\rho\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2\right]^{1/2}}\mu\tau \tag{4.4}$$

$$\tau_{\theta} = \frac{x\dfrac{\partial x}{\partial\rho} + y\dfrac{\partial y}{\partial\rho} - R^2\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\rho}}{\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2\right]^{1/2}}\mu\tau \tag{4.5}$$

Согласно (1.16)

$$x = \sum_1^3\left[a_{2k-1}\left(\rho^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\rho^{2k-1}}\right)\cos(2k-1)\theta - \right.$$

$$\left. - a_{2k}\left(\rho^{2k} + \frac{\lambda^{4k}}{\rho^{2k}}\right)\sin 2k\theta\right]$$

$$y = \sum_1^3\left[a_{2k-1}\left(\rho^{2k-1} - \frac{\lambda^{4k-2}}{\rho^{2k-1}}\right)\sin(2k-1)\theta + \right.$$

$$\left. + a_{2k}\left(\rho^{2k} - \frac{\lambda^{4k}}{\rho^{2k}}\right)\cos 2k\theta\right]$$

Для получения числовых результатов рассмотрим случай

$$\nu = \lambda = 0.25$$

Из (1.17) имеем

$$a_1 = 0.93750000R, \quad a_2 = -0.20703125R$$

$$a_3 = -0.10156250R, \quad a_4 = 0.03613280R$$

$$a_5 = 0.01953125R, \quad a_6 = -0.00781250R$$

Далее находим

$$A_0 = 0.4686322, \quad A_1 = -0.2327116$$

$$A_2 = -0.0536258, \quad A_3 = 0.0259236$$

$$A_4 = 0.0137898, \quad A_5 = -0.0051192$$

$$A_6 = 0.0011763, \quad A_7 = -0.0004733$$

$$A_8 = -0.0000068, \quad A_9 = 0.0000002$$

$$A_{10} = A_{12} = 0, \quad A_{11} = 0$$

$$B_1 = -0.2082840, \quad B_2 = 0.9205706$$

$$B_3 = 0.4098398, \quad B_4 = -0.2447764$$

$$B_5 = -0.1140064, \quad B_6 = 0.0607212$$

$$B_7 = 0.0296006, \quad B_8 = -0.0085008$$

$$B_9 = -0.0029980, \quad B_{10} = 0.0009460$$

$$B_{11} = 0.0003052, \quad B_{12} = -0.0000610$$

Значение постоянного коэффициента C_0 не приводится, так как он исключен из выражения крутящего момента.

Из (4.3) находим

$$M = 0.4932\pi\mu\tau R^4 \tag{4.6}$$

Для сравнения и проверки точности вычислений приведем значения крутящего момента:

для круга радиуса R без разреза

$$M = 0.5\pi\mu\tau R^4 \tag{4.7}$$

для кольца с внешним радиусом R и с внутренним радиусом $0.5R$

$$M = 0.4688\pi\mu\tau R^4$$

для кольца с внешним радиусом R, внутренняя окружность которого проходит через крайние точки рассматриваемого разреза (внутренний радиус $\approx 0.56R$)

$$M = 0.4509\pi\mu\tau R^4$$

Согласно (4.6) и (4.7) рассматриваемый разрез не оказывает существенного влияния на значение крутящего момента.

Значения касательных напряжений τ_θ ($\tau_\rho = 0$) на внешнем контуре сечения ($\rho = 1$) и в точках разреза ($\rho = \lambda = 0.25$) приведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что наибольшее и наименьшее напряжения на внешнем контуре мало отличаются друг от друга (7%), при этом наибольшее напряжение отличается от наибольшего касательного напряжения круглого сечения без разреза ($= \mu\tau R$) на 4%.

Таким образом, рассматриваемый разрез не оказывает существенного влияния на величину и распределение касательных напряжений внешнего контура.

В точках разреза $y = \dfrac{\partial x}{\partial \rho} = 0$, вследствие чего формула (4.5) упрощается

$$\tau_\theta = -\frac{\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \rho}}{\left|\dfrac{\partial y}{\partial \rho}\right|} R^2\mu\tau \tag{4.8}$$

На концах разреза ($x = \pm 0.468R$, $\theta = 6°41'$ и $180° - 6°41'$)

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} = 0$$

Вследствие этого в указанных точках $\tau_\theta = \infty$.

Легко показать, что главный вектор касательных усилий, действующих в окрестности каждой из крайних точек разреза, стремится к нулю, то есть что в указанных точках имеет место концентрация напряжений

Таблица 1

ψ°	$\rho=0.25$	$\rho=1$	$\rho=1$	$\rho=0.25$	$\rho=1$
	x/R		y/R	$\tau_\theta/\mu\tau R$	$\tau_\theta/\mu\tau R$
−90	0	0	−0.7475	0,0126	0.9818
−80	0,0740	0.1376	−0.7407	0,0216	0.9786
−70	0,1462	0.2719	−0.7129	0,0487	0,9742
−60	0.2149	0.3981	−0.6670	0.0951	0,9790
−50	0.2785	0,5113	−0.6062	0.1629	0.9992
−40	0.3352	0.6099	−0,5362	0.2570	1,0273
−30	0.3837	0.6970	−0,4610	0.3891	1,0400
−20	0.4225	0.7771	−0.3797	0.5901	1,0210
−10	0.4502	0.8509	−0.2868	0.9693	0.9887
−5	0.4595	0,8842	−0.2345	1.3661	0.9773
0	0.4656	0.9140	−0.1779	2.3261	0.9726
+5	0.4683	0.9395	−0.1173	9.7421	0.9754
+6°41′	0.4680			∞	
+10	0.4676	0.9602	−0,0532	3.5177	0.9850
+15	0.4632	0.9758	0.0140	1,2593	0.9996
+20	0,4552	0.9866	0.0841	0.6378	1.0157
+25	0,4435	0.9928	0.1573	0.3314	1,0291
+30	0.4281	0.9944	0.2343	0.1402	1.0362
+35	0.4089	0.9910	0.3163	0.0046	1.0352
+40	0.3860	0.9811	0.4045	−0.0993	1.0276
+45	0.3595	0.9624	0.4997	−0.1826	1,0164
+55	0.2964	0.8858	0.7103	−0.3087	0,9965
+65	0.2213	0.7338	0.9312	−0.3962	0.9893
+75	0.1368	0.4915	1.1225	−0.4526	0.9918
+80	0.0921	0.3398	1.1914	−0.4701	0.9941
+90	0	0	1.2501	−0.4840	0.9966

В табл. 2 приведены значения касательных напряжений τ_θ ($\tau_\rho=0$), возникающих в точках оси симметрии сечения (в точках оси y).

Таблица 2

$\theta = -\pi/2$			$\theta = +\pi/2$		
ρ	y/R	$\tau_\theta/\mu\tau R$	ρ	y/R	$\tau_\theta/\mu\tau R$
0.25	0	0.0126	0.25	0	−0.4840
0.30	−0.0779	0.1619	0.30	0.0977	−0.3037
0.35	−0.1453	0.2752	0.35	0.1839	−0.1615
0.40	−0.2058	0.3665	0.40	0.2638	−0.0564
0.45	−0.2615	0.4436	0.45	0.3405	0.0409
0.50	−0.3138	0.5110	0.50	0.4156	0.1286
0.55	−0.3634	0.5776	0.55	0.4903	0.2144
0.60	−0.4109	0.6273	0.60	0.5655	0.2937
0.65	−0.4567	0.6795	0.65	0.6419	0.3758
0.70	−0.5012	0.7289	0.70	0.7200	0.4556
0.75	−0.5446	0.7763	0.75	0.8003	0.5383
0.80	−0.5870	0.8222	0.80	0.8832	0.6231
0.85	−0.6287	0.8670	0.85	0.9692	0.7153
0.90	−0.6696	0.9110	0.90	1.0587	0.8019
0.95	−0.7100	0.9545	0.95	1.1522	0.8976
1.00	−0.7498	0.9818	1.00	1.2501	0.9966

В этих точках

$$x = 0, \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad 0.25 \leqslant \rho \leqslant 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = 0, \ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \pm \sum_{1}^{3} (-1)^{k-1} a_{2k-1} (2k-1) \left(\rho^{2k-2} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\rho^{2k}} \right) \pm$$

$$\pm 2 \sum_{1}^{3} (-1)^{k} a_{2k} \left(\rho^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k}}{\rho^{2k+1}} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} = \pm 2 \sum_{1}^{6} (-1)^{k} \left(A_{2k} \rho^{2k-1} - \frac{\lambda^{4k} B_{2k}}{\rho^{2k+1}} \right) \mp$$

$$\mp \sum_{1}^{6} (-1)^{k-1} (2k-1) \left(A_{2k-1} \rho^{2k-2} + \frac{\lambda^{4k-2} B_{2k-1}}{\rho^{2k}} \right)$$

$$\tau_\theta = \frac{y \dfrac{\partial y}{\partial \rho} - R^2 \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \rho}}{\left| \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \right|} \mu\tau$$

Из двойных знаков верхний относится к значениям $y \geqslant 0$, а нижний—к значениям $y \leqslant 0$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 11 X 1970

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ԵՐԿԿԱՊ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՖՈՐՄ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԵՎ ԴՐԱՆՑԻՑ ՄԵԿԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ

Ամփոփում

Լորանի շարքի օգնությամբ կառուցված են օղակի տիրույթը մի քանի երկկապ տիրույթների վրա կոնֆորմ արտապատկերման ֆունկցիաները։ Դրանց կառուցումը համեմատաբար հեշտ է իրագործվում, երբ երկկապ տիրույթը ներսից սահմանափակված է ուղղագիծ ճեղքով, իսկ դրսից՝ պարզ կորագծով։ Դիտարկված են ուղղագիծ ճեղք ունեցող անվերջ շերտի և շրջանի տիրույթների արտապատկերման մի քանի դեպքեր։ Դիտարկված են նաև արտապատկերման այլ դեպքեր։

Ճեղք ունեցող շրջանի արտապատկերման ֆունկցիան, այն դեպքում, երբ ճեղքը զուգահեռ է շրջանի տրամագծերից մեկին, օգտագործվել է համապատասխան կտրվածք ունեցող ձողի ոլորման խնդիրը լուծելիս։

CONSTRUCTION OF SOME CONFORMAL MAPPING FUNCTIONS FOR DOUBLE-CONNECTED REGIONS AND THEIR APPLICATION TO THE TORSION PROBLEM

O. M. SAPONJIAN

Summary

This paper presents constructions of Laurent's series that map a circular ring onto some double-connected regions. Such transformations are comparatively easy to realize when the inner rim is a linear crack and the outer rim is a plane curve. Transformations of some cases of infinite strips and disks with a linear crack are considered. Other mappings are also presented.

The transformation of a circular ring onto the region of a circle with the crack which is parallel to the diameter is used to solve the corresponding problem of torsion.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, Л.-М., 1952.
2. *Угодчиков А. Г., Боков В. В., Кулагин Ю. М.* К решению плоских задач теории пластичности в криволинейных координатах. Методы решения задач упругости и пластичности. Горький, 1969.
3. *Нейман М. И.* Напряжения в балке с криволинейным отверстием. М., 1937.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.