ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

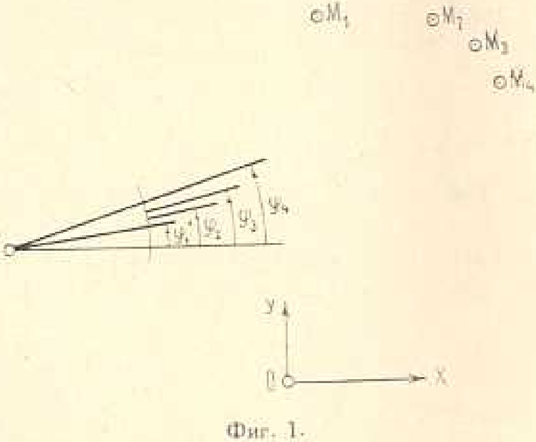
С. Б. ГАРАНЯН, К. Х. ШАХБАЗЯН

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РОБЕРТСА-ЧЕБЫШЕВА ПРИ СИНТЕЗЕ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА

Преобразование Робертса-Чебышева используется при синтезе, в основном, для выбора компактного варианта механизма, удовлетворяющего заданным требованиям.

В некоторых случаях это преобразование позволяет также выявить эквивалентность различных постановок задач синтеза, тем самым давая возможность решать задачу в той постановке, которая окажется более эффективной с точки зрения простоты решения.

1. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим следующую задачу: спроектировать плоский шарнирный четырехзвенник так, чтобы при заданных четырех углах наклона кривошипа точка оси шатуна занимала соответственно данные четыре положения (фиг. 1).



Фиг. 1.

Покажем, что подобные задачи приводятся к задаче синтеза по четырем положениям оси шатуна.

Предположим, что решением задачи получен некоторый шарнирный четырехзвенник и для него произведено преобразование Робертса-Чебышева (фиг. 4). Как видно из чертежа, угол наклона кривошипа начального механизма равен углу наклона шатуна одного из преобразованных механизмов. Кроме того, по теореме Робертса-Чебышева шатунная точка каждого из этих механизмов проходит через одни и те же точки плоскости.

Таким образом, становятся известными четыре угла наклона и четыре положения точки оси шатуна преобразованного механизма. Если по этим данным произвести синтез (это будет синтез по заданным четырем положениям оси шатуна) и получить некоторый шарнирный четырехзвенник, то его преобразованный механизм будет решением первоначально поставленной задачи.

С математической точки зрения задачи синтеза по положениям оси шатуна являются интерполяционными задачами с наперед заданными узлами интерполяции. Подобные задачи решались рядом авторов [1], [2], [3], [4] разными методами.

Приводимый ниже аналитический способ решения задачи позволяет:

а) свести решение задачи к одному кубическому уравнению,

б) исходя из заданных величин задачи, установить область несуществования механизма в виде условий, при которых кубическое уравнение имеет всего один действительный корень,

в) вычислить координаты круговой точки (и его центра), радиус-вектор которой относительно заданной точки M составляет с шатуном произвольный постоянный угол.

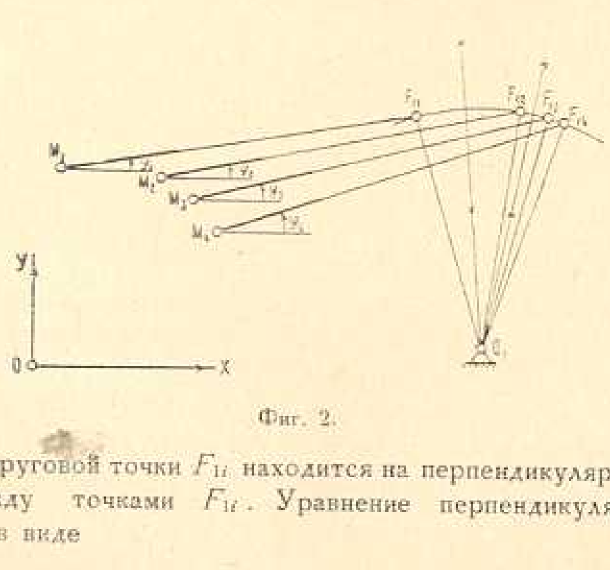
2. Обозначим заданные значения углов наклона оси кривошипа через φ_i, заданные точки — через M_i, искомые положения одной из круговых точек оси шатуна — через F_{1i}, а длины отрезков $M_i F_{1i}$ — через l $(M_i F_{1i} = l)$, где $i = 1, 2, 3, 4$.

Можем записать (фиг. 2)

$$F_{1ix} = M_{ix} + l\cos\varphi_i \tag{1}$$

$$F_{1iy} = M_{iy} + l\sin\varphi_i \tag{2}$$

где $(F_{1ix};\ F_{1iy})$ и $(M_{ix};\ M_{iy})$ — соответственно абсциссы и ординаты точек F_{1i} и M_i.



Фиг. 2.

Центр круговой точки F_{1i} находится на перпендикуляре к середине отрезка между точками F_{1i}. Уравнение перпендикуляров можно представить в виде

$$(F_{1ix} - F_{1jx})(2X - F_{1ix} - F_{1jx}) + (F_{1iy} - F_{1jy})(2Y - F_{1iy} - F_{1jy}) = 0 \tag{3}$$

где $j = 1, 2, 3$; $i = 1 + j$.

Уравнение (3) позволяет произвести синтез по трем и четырем положениям оси шатуна.

Подставляя значения координат точек F_{1i} из уравнения (1) и (2) в уравнение (3), после надлежащих преобразований и группировки членов относительно x и y, получим

$$(A_j + lB_j)x + (C_j + lD_j)y + lE_j + R_j = 0 \tag{4}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} A_j &= M_{ix} - M_{jx} \\ B_j &= \cos\varphi_i - \cos\varphi_j \\ C_j &= M_{iy} - M_{jy} \\ D_j &= \sin\varphi_i - \sin\varphi_j \end{aligned} \tag{5}$$

$$E_j = M_{jx}\cos\varphi_j + M_{jy}\sin\varphi_j - M_{ix}\cos\varphi_i - M_{iy}\sin\varphi_i$$

$$R_j = \frac{M_{jx}^2 + M_{jy}^2 - (M_{ix}^2 + M_{iy}^2)}{2}$$

где $j = 1, 2, 3$; $i = 1 + j$.

В развернутом виде уравнение (4) представляет следующую систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} (A_1 + lB_1)x + (C_1 + lD_1)y + lE_1 + R_1 &= 0 \\ (A_2 + lB_2)x + (C_2 + lD_2)y + lE_2 + R_2 &= 0 \\ (A_3 + lB_3)x + (C_3 + lD_3)y + lE_3 + R_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Из первых двух уравнений системы (6) определяем x и y, которые после группировки относительно l представляются в виде:

$$x = \frac{l^2D' + l(C' + D'') + C''}{l^2B' + l(A' + B'') + A''} \tag{7}$$

$$y = \frac{l^2E' + l(R' + E'') + R''}{l^2B' + l(A' + B'') + A''} \tag{8}$$

где

$$A',\ B',\ C',\ D',\ E',\ R' \quad \text{и} \quad A'',\ B'',\ C'',\ D'',\ E'',\ R'' -$$

обозначения нижеследующих определителей второго порядка

$$A' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} \qquad A'' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$B' = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} \qquad B'' = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$C' = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ E_1 & E_2 \end{vmatrix} \qquad C'' = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ E_1 & E_2 \end{vmatrix} \qquad D'' = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}$$

$$E' = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \qquad E'' = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$R' = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \qquad R'' = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Подстановляя выражения (7) и (8) в последнее уравнение системы (6), получаем кубическое уравнение относительно части длины шатуна

$$Pl^3 + Kl^2 + Cl + D = 0 \tag{10}$$

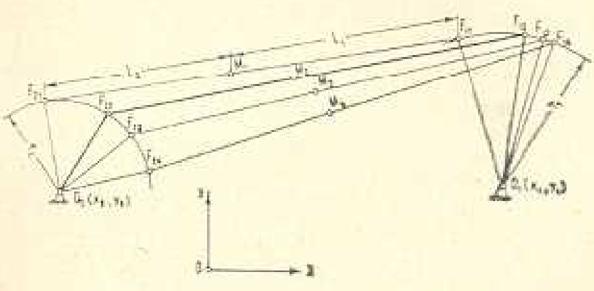
где

$$P = B_3D' + D_3E' + E_3B'$$

$$K = A_3D' + B_3(C' + D'') + C_3E' + D_3(R' + E'') + R_3B' + E_3(A' + B'')$$

$$D = A_3C'' + C_3R'' + R_3A'' \tag{11}$$

Уравнение (10) имеет либо один действительный корень и тогда задача не имеет решения, либо три, причем как показано в работе [4], отрицательным значениям корней соответствует левостороннее расположение их значений относительно точки M_i.



Фиг. 3.

Получение трех действительных корней (l_1, l_2, l_3) уравнения (10) указывает на существование трех механизмов, удовлетворяющих требованиям эквивалентной, следовательно, и начальной задачи.

Выбирается из них самый удобный в условиях данной задачи.

Подставляя найденные корни l_j в уравнения (1), (2), (7) и (8), соответственно определим для каждого положения оси шатуна координаты искомых круговых точек (F_{jix}, F_{jiy}) и координаты (x_j; y_j) центров этих точек, причем $j = 1, 2, 3$.

С точки зрения компактности механизма, пусть как центры шарниров шатун-коромысло*, шатун-кривошип соответственно взяты точки F_{1i} и F_{2i}. Тогда остальные параметры механизма определяются по нижеследующим формулам:

длина шатуна

$$L = |l_1 - l_2| \tag{12}$$

длина коромысла

$$r_1 = \sqrt{(F_{1ix} - x_1)^2 + (F_{1iy} - y_1)^2} \tag{13}$$

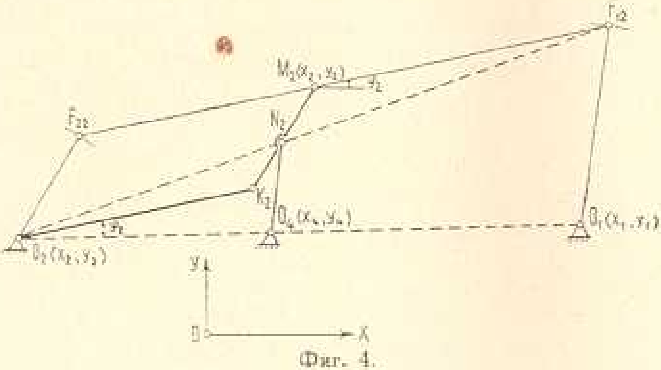
длина кривошипа

$$r_2 = \sqrt{(F_{2ix} - x_2)^2 + (F_{2iy} - y_2)^2} \tag{14}$$

длина стойки

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{15}$$

Механизм, удовлетворяющий требованиям первоначальной задачи, определяется преобразованием Робертса-Чебышева графически или аналитически.



Фиг. 4.

В последнем случае параметры механизма вычисляются из пропорциональности отрезков (фиг. 4) нижеследующими соотношениями:

длина шатуна

$$K_2N_2 = r_2 \frac{|l_2|}{L} \tag{16}$$

длина стойки

$$O_2O_4 = S \frac{|l_2|}{L} \tag{17}$$

длина коромысла

$$N_2O_4 = r_1 \frac{|l_2|}{L} \tag{18}$$

---

* Здесь и в дальнейшем ведомое звено условно названо коромыслом.

длина кривошипа

$$O_2K_2 = |l_2| \tag{19}$$

координаты центра вращения коромысла

$$x_4 = x_2 + \frac{|l_2|}{L}(x_1 - x_2) \tag{20}$$

$$y_4 = y_2 + \frac{|l_2|}{L}(y_1 - y_2) \tag{21}$$

Координаты центра вращения кривошипа определяются по уравнениям (7) и (8) при $l = l_2$.

Для иллюстрации предложенного способа синтеза остановимся на решении численного примера.

Пример: Заданы значения углов наклона оси кривошипа

$$\varphi_1 = 9°20'21''; \quad \varphi_2 = 11°41'18''; \quad \varphi_3 = 14°05'41''; \quad \varphi_4 = 19°15'41''$$

и координаты произвольной точки неподвижной плоскости $M_1(1; 9)$, $M_2(3.9; 8.8)$, $M_3(4.9; 8.2)$, $M_4(5.5; 7.2)$.

Требуется спроектировать шарнирный четырехзвенник, некоторая точка оси шатуна которой совпадает с заданными точками в положениях этой оси, соответствующих заданным положениям оси кривошипа.

По данным задачи определяются величины

$$\begin{array}{ll}
A_1 = 2.9 & B_1 = -0.00748 \\
A_2 = 1.0 & B_2 = -0.00937 \\
A_3 = 0.6 & B_3 = -0.02581 \\
C_1 = -0.2 & D_1 = 0.04031 \\
C_2 = -0.6 & D_2 = 0.04094 \\
C_3 = -1.0 & D_3 = 0.08618 \\
R_1 = -5.325 & E_1 = -3.154646 \\
R_2 = 0.7 & E_2 = -1.147501 \\
R_3 = 4.58 & E_3 = -0.816945
\end{array}$$

Подставляя эти значения в определители (9), получаем

$$\begin{array}{ll}
A' = 0.078416 & A'' = -1.54 \\
B' = 0.00007147 & B'' = 0.002614 \\
C' = -1.6632874 & C'' = -3.3350 \\
D' = 0.082895 & D'' = 0.246223 \\
E' = 0.020976 & E'' = 0.173107 \\
R' = 0.055131 & R'' = -7.355
\end{array}$$

$$C' + D' = -1.417064 \qquad R' + E' = 0.228238$$

$$A' + B' = 0.081030$$

По (11) определяются коэффициенты уравнения (10)

$$P = -0.000390231 \qquad K = 0.01913579$$

$$C = 0.00295875 \qquad D = -1.6992$$

При этих коэффициентах корни кубического уравнения (10) будут: $l_1 = 10.536789$; $l_2 = -8.746633$; $l_3 = 47.246928$.

С целью получения компактного механизма подставляем меньшие по абсолютной величине значения корней, в данном случае l_1 и l_2, в уравнения (1), (2), (7), (8), (12), (15), (13), (14) и последовательно определяем нижеследующие величины, вычисленные для первого положения оси шатуна:

$$F_{11x} = 11.397071, \qquad F_{11y} = 10.709910 \quad (\text{при } l = l_1)$$

$$F_{21x} = -7.630652, \qquad F_{21y} = 7.580597 \quad (\text{при } l = l_2)$$

$$x_1 = 13.361852, \qquad y_1 = 3.864690 \quad (\text{при } l = l_1)$$

$$x_2 = -6.865576, \qquad y_2 = 3.453650 \quad (\text{при } l = l_2)$$

$$L = 19.283422, \qquad S = 20.23199$$

$$r_1 = 7.121557, \qquad r_2 = 4.197265$$

Далее, по соотношениям (16), (17), (18), (19), (20), (21) последовательно определяются параметры требуемого механизма:

$$K_2N_2 = 1.903808, \qquad O_2O_4 = 9.176887$$

$$N_2O_4 = 3.230217, \qquad O_2K_2 = 8.746633$$

$$x_4 = 2.309242, \qquad y_4 = 3.540090$$

Координаты центра вращения (O_2) кривошипа определены по (7) и (8)

$$x_2 = -6.865576, \qquad y_2 = 3.453650$$

Полученный механизм $O_2K_2N_2O_4$ с чертящей точкой M изображен на фиг. 4.

Ереванский государственный университет
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 15 VI 1970

Ս. Բ. ԳԱՐԱՆՅԱՆ, Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

ՌՈԲԵՐՏՍԻ-ՉԵԲԻՇԵՎԻ ՁԵՎԱՓՈԽՄԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՔԱՌՕՂԱԿ ՀՈԴԱԿԱՊԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում տրված են այն քառօղակ մեխանիզմների նախագծման խնդրի գրաֆո-անալիտիկ և զուտ անալիտիկ լուծումները, որոնց շարժաթևի որևէ կետի նախապես տրված չորս դիրքերը պետք է համապատասխանեն շուռտվիկի առանցքի տրված չորս դիրքերին։

Օգտագործված է Ռոբերտսի-Չեբիշևի ձևափոխությունը խնդրի դրվածքը համարժեք դրվածքով փոխարինելու և վերոհիշյալ եղանակներով լուծելու համար։

Լուծված է մասնավոր թվային օրինակ։

APPLICATION OF THE ROBERTS TRANSFORMATION TO SYNTHESIS OF A FOUR-HINGE MECHANISM

S. B. GARANIAN, K. Kh. SHAKHBASIAN

S u m m a r y

This article presents a graphical-analytical and pure analytical so rution for a problem on a four-hinge mechanism where the given four positions of the crank axis correspond to the four positions of any point of the rod axis.

By the Roberts transformation the formulation of the problem isl eplaced by an equivalent formulation and the problem is solved by the above methods.

A numerical example is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Блох З. Ш., Добровольский В. В.* Синтез механизмов. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
2. *Бейер Р.* Кинематический синтез механизмов. Машгиз, М., 1959.
3. *Уилсон.* Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Тр. американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 2, 1965.
4. *Шахбазян К. Х., Таирян В. М.* Синтез плоского четырехшарнирного механизма при заданных направлениях оси шатуна. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 2, 1970.