

П. И. СЕМЕНОВ

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОРТОТРОПНЫХ  
ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ СДВИГА

Вопрос учета деформаций сдвига давно привлекал внимание исследователей. В работах [1, 2] со ссылкой на С. П. Тимошенко упоминаются Кулон, Понселе, Ренкин, Грасгоф, Бах, Карман, Зеевальд и другие, которые рассматривали различные аспекты этого вопроса применительно к изгибу балок. К настоящему времени установлено, что для большинства обычных изотропных балок и стержневых систем влияние касательных напряжений невелико и лишь для очень коротких, а также тонкостенных балок, они могут иметь практическое значение.

По учету сдвига при расчете тонкостенных изотропных стержней в настоящее время имеется уже довольно много исследований. Отметим лишь те, которые имеют наиболее близкое отношение к настоящей статье.

Работы [3—9] являются обобщением и дальнейшим развитием теории В. З. Власова. Статические и физические уравнения записываются также, как и по Власову (с использованием гипотезы о неизменяемости контура), а в уравнении совместности деформаций учитывается влияние сдвига. Полученная система уравнений решается методом последовательных приближений. В первом приближении получается решение В. З. Власова (без учета сдвига), во втором и последующих выявляется влияние сдвига на напряжения и перемещения. Эта методика распространена на задачи устойчивости и неразрезные балки.

Авторы [10—13] исходят из уравнений цилиндрической оболочки, которые после введения ряда допущений упрощаются. Методика распространена на задачи динамики и устойчивости. Показано, что сдвиги больше влияют на перемещения оси стержня, чем на напряжения.

В работах [14—16] перемещения с учетом сдвига определяются графоаналитическим методом, где учитываются также нормальные напряжения поперечного обжатия (путем введения коэффициентов  $K_2$  и  $K_3$ ) балки. Двутавровое сечение заменяется эквивалентным прямоугольным, при этом вводятся коэффициенты  $K_3$  и  $K_1$ . Степень точности такой замены анализируется автором.

С появлением новых полимерных материалов, в том числе композитных (стеклопластики, текстолиты, древесно-слоистые пластики и др.), обладающих сравнительно небольшой сдвиговой жесткостью и прочностью, учет деформаций сдвига в расчетах конструкций приобрел новое важное в практическом отношении значение. Учет сдвига

при расчете анизотропных пластин и оболочек производится многими авторами, в том числе С. Г. Лехницким, С. А. Амбарцумяном, В. И. Королевым.

Напряженно-деформированное состояние балок прямоугольного сечения из ориентированных стеклопластиков изучалось авторами [1, 2]. Принимая стеклопластик как однородную ортотропную среду, они построили решение в тригонометрических рядах так, что на торцах граничное условие  $\tau_z = 0$  удовлетворяется для каждой точки, а не интегрально, как в большинстве существующих решений. Авторы не задавали заранее закон распределения касательных напряжений по высоте балки, а получали его в процессе решения. Оказалось, что практически совпадающие результаты можно получить более простым путем, если предварительно принять параболическое распределение касательных напряжений, которое дает элементарная теория. В работах [1, 2] имеются полезные числовые примеры, а также результаты испытаний балок из различных полимерных материалов.

По учету сдвигов ортотропных тонкостенных стержней работ очень мало. В [17] рассмотрен ортотропный тонкостенный стержень. Решение дается в рядах Фурье. Оценка влияния сдвига дана на конкретном примере в работе [18]. Отмечается, что в случае ортотропного кругового тонкостенного стержня сдвиги могут оказывать значительное влияние на перемещения даже при большой длине стержня.

1. В настоящей статье рассматривается тонкостенный стержень типа складки, состоящий из отдельных прямоугольных пластин или оболочек, которые будем называть элементами стержня. В поперечном сечении каждый элемент (полоска) имеет прямоугольную или трапециевидальную форму. Материал полосок предполагается однородным ортотропным, но упругие постоянные каждой полоски различны, т. е. стержень в целом является неоднородным. Расчет такого стержня без учета деформаций сдвига изложен в работе [19]. Заданное неоднородное сечение приводится к однородному путем замены действительных толщин  $\delta_j$  полосок некоторыми приведенными  $\bar{\delta}_j$ , причем

$$\bar{\delta}_j = \delta_j \frac{A_j}{E} \quad (1.1)$$

где  $E$  — произвольный модуль Юнга,  $A_j$  — модуль упругости  $j$ -го элемента, вычисляемый по уравнению

$$A_j = A_{33j} = \frac{a_{11j}}{a_{11j}a_{33j} - a_{13j}^2} = \frac{E_{3j}}{1 - \nu_{13j}\nu_{31j}} \quad (1.2)$$

где  $a_{ikj}$  — упругие постоянные (коэффициенты деформаций)  $j$ -ой полоски,  $E_{3j}$  — модуль Юнга при растяжении-сжатии вдоль стержня,  $\nu_{13j}$ ,  $\nu_{31j}$  — коэффициенты Пуассона, каждый из которых характеризует поперечное сокращение по направлению, соответствующему первому индексу, от растягивающей силы по направлению, соответствующему второму индексу.

Нормальные  $\sigma_j$  и касательные  $\tau_j$  напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_j = \frac{A_j}{E} \left( \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_w} w \right) \quad (1.3)$$

$$\tau_j = -\frac{1}{\delta_j} \left( q_{0z} - q_z \frac{\bar{F}_0}{F} + \frac{M_x \bar{S}_{0x}}{J_x} + \frac{M_y \bar{S}_{0y}}{J_y} + \frac{B' \bar{S}_{0w}}{J_w} \right) \pm \frac{2HT_j}{J_j T} t \quad (1.4)$$

где  $\bar{F}$ ,  $\bar{J}_x$ ,  $\bar{J}_y$ ,  $\bar{J}_w$  — геометрические характеристики (площадь и моменты инерции) приведенного сечения,

$\bar{F}_0$ ,  $\bar{S}_{0x}$ ,  $\bar{S}_{0y}$ ,  $\bar{S}_{0w}$  — площадь и статические моменты отсеченной части приведенного сечения,

$N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $B$ ,  $H$  — усилия (продольная сила, изгибающие моменты, бимомент и крутящий момент чистого кручения),

$q_z = -N'$  — интенсивность продольной поверхностной нагрузки,

$q_{0z}$  — поверхностная нагрузка, действующая на отсеченную часть единичной длины стержня,

$T_j = G_j J_{dj}$  — жесткость  $j$ -го элемента при чистом кручении,

$T$  — то же всего стержня,

$t$  — расстояние (по толщине элемента) от срединной поверхности до произвольной точки,

$G_j$ ,  $J_{dj}$  — модуль сдвига в плоскости полоски и момент инерции ее при чистом кручении. В работе [19] приведены формулы (3.5) и (3.6) для  $J_{dj}$ .

Последнее слагаемое в формуле (1.4) представляет собой касательные напряжения чистого (сен-венанова) кручения, распределенные по толщине по линейному закону (с нулевой точкой на срединной поверхности). Остальные слагаемые этой формулы — касательные напряжения изгиба и стесненного кручения; они постоянны по толщине элемента.

2. По методу Мора любое (обобщенное) перемещение  $\delta_{ik}$  выражается виртуальной работой внутренних сил, то есть

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \int_{F_j} \frac{\sigma_{ij} \tau_{jk}}{A_j} dz dF + \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \int_{F_i} \frac{\tau_{ij} \tau_{jk}}{G_i} dz dF \quad (2.1)$$

где  $l$  — длина стержня,  $n$  — число элементов, составляющих профиль,  $i, k$  — номера состояний стержня.

Подставим сюда выражения (1.3) и (1.4), снабдив напряжения и усилия индексами  $i$  и  $k$ , и проинтегрируем, помня, что усилия зависят лишь от  $z$ , а геометрические характеристики от  $z$  не зависят. При вычислении первого слагаемого выражения (2.1) будем иметь в виду,

что координаты  $1, x, y, z$  являются главными, и интегралы по площади сечения, содержащие произведения указанных координат, обращаются в нуль.

В результате получим общую формулу перемещений:

$$\begin{aligned}
 \delta_{ik} = & \int \frac{N_i N_k dz}{EF} + \int \frac{M_{xi} M_{xk} dz}{E J_x} + \int \frac{M_{yi} M_{yk} dz}{E J_y} + \\
 & + \int \frac{B_i B_k dz}{E J_z} + \int \frac{H_i H_k dz}{T} + \\
 & + \mu_{xx} \int \frac{M'_{xi} M'_{xk} dz}{GF} + \mu_{xy} \int \frac{M'_{yi} M'_{yk} dz}{GF} + \mu_{xz} \int \frac{M'_{xi} B'_k dz}{GF p} + \\
 & + \mu_{yx} \int \frac{M'_{yi} M'_{xk} dz}{GF} + \mu_{yy} \int \frac{M'_{yi} M'_{yk} dz}{GF} + \mu_{yz} \int \frac{M'_{yi} B'_k dz}{GF p} + \\
 & + \mu_{zx} \int \frac{B'_i M'_{xk} dz}{GF p} + \mu_{zy} \int \frac{B'_i M'_{yk} dz}{GF p} + \mu_{zz} \int \frac{B'_i B'_k dz}{GF^2} + \\
 & + \mu_{0x} \int \frac{q_{zi} M'_{xk} dz}{Gp} + \mu_{0y} \int \frac{q_{zi} M'_{yk} dz}{Gp} + \mu_{0z} \int \frac{q_{zi} B'_k dz}{GF} + \\
 & + \mu_{x0} \int \frac{M'_{xi} q_{zk} dz}{Gp} + \mu_{y0} \int \frac{M'_{yi} q_{zk} dz}{Gp} + \mu_{z0} \int \frac{B'_i q_{zk} dz}{GF} + \\
 & + \mu_{00} \int \frac{q_{zi} q_{zk} dz}{G} + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zi} \bar{S}_{0x} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{xk} dz}{J_x} + \\
 & + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zi} \bar{S}_{0y} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{yk} dz}{J_y} + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zi} \bar{S}_{0z} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{B'_k dz}{J_z} + \\
 & + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zk} \bar{S}_{0x} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{xi} dz}{J_x} + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zk} \bar{S}_{0y} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{yi} dz}{J_y} + \\
 & + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zk} \bar{S}_{0z} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{B'_i dz}{J_z} + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zk} \bar{F}_0 dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{q_{zi} dz}{F} + \\
 & + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zi} q_{0zk} dF}{G_j \delta_j^2} \right) dz + \int \left( \sum_{j=1}^n \int_{F_j} \frac{q_{0zi} \bar{F}_0 dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{q_{zk} dz}{F} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

где  $G$  — произвольный модуль сдвига,  $p$  — периметр срединной линии профиля.

Интегрирование производится по всей длине стержня.

Первые пять слагаемых этой формулы определяют перемещение тонкостенного стержня без учета деформаций сдвига, все остальные — от сдвига. Последующие девять слагаемых дают перемещение от касательных напряжений при изгибе и стесненном кручении. Остальные 16 слагаемых представляют собой перемещения от касательных напряжений, возникающих при действии продольной поверхностной распределенной нагрузки.

Коэффициенты  $\nu_{ab} = \nu_{ba}$  сдвига определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \nu_{xx} &= \frac{G\bar{F}}{J_x^2} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x}^2 dF}{G_i \delta_i^2}, & \nu_{xy} &= \frac{G\bar{F}}{J_x J_y} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x} \bar{S}_{0y} dF}{G_i \delta_i^2} \\ \nu_{yy} &= \frac{G\bar{F}}{J_y^2} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0y}^2 dF}{G_i \delta_i^2}, & \nu_{x0} &= \frac{G\bar{F}p}{J_x J_0} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x} \bar{S}_{00} dF}{G_i \delta_i^2} \\ \nu_{y0} &= \frac{G\bar{F}p}{J_y J_0} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0y} \bar{S}_{00} dF}{G_i \delta_i^2}, & \nu_{00} &= \frac{G\bar{F}^2}{J_0^2} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{00}^2 dF}{G_i \delta_i^2} \quad (2.3) \\ \nu_{0x} &= \frac{Gp}{J_x \bar{F}} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x} \bar{F}_0 dF}{G_i \delta_i^2}, & \nu_{0y} &= \frac{Gp}{J_y \bar{F}} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0y} \bar{F}_0 dF}{G_i \delta_i^2} \\ \nu_{00} &= \frac{G}{J_0} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{00} \bar{F}_0 dF}{G_i \delta_i^2}, & \nu_{00} &= \frac{G}{\bar{F}^2} \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \frac{\bar{F}_0^2 dF}{G_i \delta_i^2} \end{aligned}$$

В случае однородного ортотропного стержня надо в предыдущих формулах принимать  $G_i = G$ ,  $A_i = A$ , что приведет к отбрасыванию черточек в выражениях геометрических характеристик.

Несколько необычные „жесткости“ в формуле (2.2) приняты с таким расчетом, чтобы коэффициенты сдвига получились безразмерными.

Отметим, что интегрирование производится по действительной площади  $F_i$  элемента, а не по приведенной  $\bar{F}_i$ . Поэтому под интегралами записано  $dF$ , а не  $d\bar{F}$ .

3. Для тонкостенного двутавра найдем характеристики, связанные с изгибом и кручением (фиг. 1). Сначала образуем приведенное сечение, вычислив по (1.1) приведенные толщины  $\bar{\delta}_j$ .

Для данного сечения получаем

$$\bar{z}_0 = \frac{b_2}{2} \frac{2b_1\bar{\delta}_1 + b_2\bar{\delta}_2}{b_1\bar{\delta}_1 + b_2\bar{\delta}_2 + b_3\bar{\delta}_3}$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{\delta}_1 b_1^3 b_2}{12 \bar{J}_y}$$

$$\bar{J}_x = \bar{\delta}_1 b_1 z_1^2 + \bar{\delta}_3 b_3 z_0^2 + \frac{\bar{\delta}_2}{3} (z_0^3 + z_1^3)$$

$$\bar{J}_y = \frac{1}{12} (\bar{\delta}_1 b_1^3 + \bar{\delta}_3 b_3^3) \quad (3.1)$$

$$\bar{J}_w = \frac{1}{12} (\bar{x}_1^2 \bar{\delta}_1 b_1^3 + \bar{x}^2 \bar{\delta}_3 b_3^3)$$

$$T = \frac{1}{3} (G_1 b_1 \bar{\delta}_1^3 + G_2 b_2 \bar{\delta}_2^3 + G_3 b_3 \bar{\delta}_3^3)$$

$$\bar{F} = b_1 \bar{\delta}_1 + b_2 \bar{\delta}_2 + b_3 \bar{\delta}_3$$

$$p = b_1 + b_2 + b_3$$

Построив эюры  $x$ ,  $y$ ,  $w$  (фиг. 1-а, в, д), находим

$$\bar{S}_{0y1} = \frac{\bar{\delta}_1}{2} \left( \frac{b_1^2}{4} - x^2 \right), \quad \bar{S}_{0y2} = 0, \quad \bar{S}_{0y3} = -\frac{\bar{\delta}_3}{2} \left( \frac{b_3^2}{4} - x^2 \right)$$

$$\bar{S}_{0x1} = \bar{\delta}_1 z_1 \left( \frac{b_1}{2} - x \right) \quad (x \geq 0)$$

$$\bar{S}_{0x3} = \bar{\delta}_3 z_0 \left( \frac{b_3}{2} - x \right)$$

$$\bar{S}_{0x1} = -\bar{\delta}_1 z_1 \left( \frac{b_1}{2} + x \right) \quad (x \leq 0)$$

$$\bar{S}_{0x3} = -\bar{\delta}_3 z_0 \left( \frac{b_3}{2} + x \right)$$

$$\bar{S}_{0x2} = \bar{\delta}_2 b_2 z_1 + \frac{\bar{\delta}_2}{2} (z_1^2 - y^2)$$

Фиг. 1. Эюры для определения коэффициентов сдвига двутавра.

Эюры статических моментов отсеченной части показаны на фиг. 1-б, з, е.

Производя интегрирование в пределах сечения каждого элемента и подставив результаты в формулы (2.3), получим

$$\begin{aligned} \mu_{xx} &= \frac{G\bar{F}}{\bar{J}_x^2} \left\{ \frac{\bar{\delta}_1^2 b_1^3 z_1^2}{12G_1\bar{\delta}_1} + \frac{\bar{\delta}_2^2 b_2^3 \bar{z}_0^2}{12G_2\bar{\delta}_2} + \frac{b_2}{G_2\bar{\delta}_2} \left[ b_1^2 \bar{\delta}_1^2 z_1^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{b_1 b_2 \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 z_1}{3} (2z_1 - \bar{z}_0) + \frac{b_1^2 \bar{\delta}_1^2}{60} (8z_1^2 - 9z_1 \bar{z}_0 + 3\bar{z}_0^2) \right] \right\} \\ \mu_{yy} &= \frac{G\bar{F}}{120\bar{J}_y} \left( \frac{b_1^3 \bar{\delta}_1^2}{G_1\bar{\delta}_1} + \frac{b_2^3 \bar{\delta}_2^2}{G_2\bar{\delta}_2} \right) \\ \mu_{zz} &= \frac{G\bar{F}^2}{120\bar{J}_z} \left( \frac{b_1^3 \bar{\delta}_1^2}{G_1\bar{\delta}_1} + \frac{b_2^3 \bar{\delta}_2^2}{G_2\bar{\delta}_2} \right) \\ \mu_{yz} &= \frac{G\bar{F}p\bar{z}}{120\bar{J}_y\bar{J}_z} \left( -\frac{b_1^3 \bar{\delta}_1^2}{G_1\bar{\delta}_1} + \frac{b_2^3 \bar{\delta}_2^2}{G_2\bar{\delta}_2} \right) \\ \mu_{xy} &= \mu_{xz} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из второй и третьей формулы (3.2) получаем соотношение

$$\mu_{zz} \bar{J}_z^2 = \mu_{yz} \bar{z}^2 \bar{J}_y^2 \bar{F} \quad (3.3)$$

которое можно использовать для проверки.

*Частный случай:* симметричный двутавр. Для этого профиля геометрические характеристики и коэффициенты сдвига получим из (3.1) и (3.2), положив  $b_1 = b_2$ ,  $\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2$ ,  $\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2$ ,  $\bar{z}_0 = z_1 = \bar{z} = \frac{b_2}{2}$ . Будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{J}_x &= \frac{\bar{\delta}_1 b_1 b_2^2}{2} + \frac{\bar{\delta}_2 b_2^3}{12}, \quad \bar{J}_y = \frac{\bar{\delta}_1 b_1^3}{6} \\ \bar{J}_z &= \frac{b_1^3 \bar{\delta}_1^2}{24}, \quad T = \frac{1}{3} (2G_1 b_1^2 \bar{\delta}_1 + G_2 b_2^2 \bar{\delta}_2) \\ \bar{F} &= 2b_1 \bar{\delta}_1 + b_2 \bar{\delta}_2, \quad p = 2b_1 + b_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mu_{xx} &= \frac{G\bar{F}b_2^2}{120\bar{J}_x} \left[ \frac{5b_1^3 \bar{\delta}_1^2}{G_1 \bar{\delta}_1} + \frac{b_2}{G_2 \bar{\delta}_2} (30b_1^2 \bar{\delta}_1^2 + 10b_1 b_2 \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 + b_2^2 \bar{\delta}_2^2) \right] \\ \mu_{yy} &= \frac{3G\bar{F}}{5G_1 b_1 \bar{\delta}_1}, \quad \mu_{zz} = \frac{2.4G\bar{F}^2}{G_1 \bar{\delta}_1 b_1 b_2^2} \\ \mu_{xy} &= \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Исследуем влияние геометрических и упругих параметров на величины коэффициентов сдвига. Вместо коэффициентов сдвига  $\mu_{ab}$  сим-

метричного двутавра удобнее изучить  $K_{ab}$ , которые входят как множители в формулы перемещений сдвига, причем

$$K_{yy} = \frac{v_{yy}}{GF}, \quad K_{\omega\omega} = \frac{v_{\omega\omega}}{GF^2}, \quad K_{xx} = \frac{v_{xx}}{GF}. \quad (4.1)$$

Эти коэффициенты зависят от упругих свойств материала стержня, от размеров профиля. Пусть площадь  $F$  поперечного сечения двутавра остается постоянной, а форма двутавра, т. е. площадь полки  $F_1$  и площадь стенки  $F_2$ , меняются. Найдем как меняются при этом  $K_{ab}$ . Рассмотрим каждый из них отдельно.

а. Коэффициент  $K_{yy}$ . Напомним, что  $K_{yy}$  является множителем в формуле перемещений сдвига при изгибе стержня в плоскости полки.

По (3.5) находим

$$K_y = C_{yy} f_1(\alpha) \quad (4.2)$$

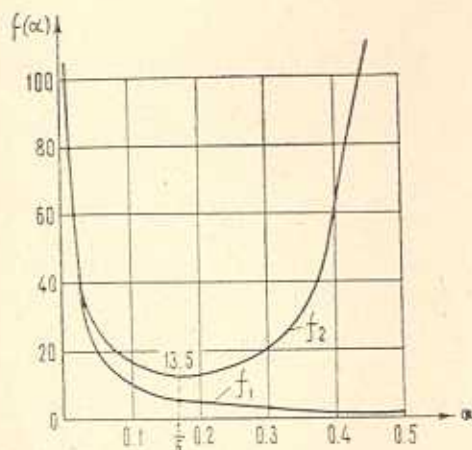
где

$$C_{yy} = \frac{3}{5G_1F} \quad (4.3)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \quad (4.4)$$

$$\alpha = \frac{F_1}{F} \quad (4.5)$$

График функции  $f_1(\alpha)$  приведен на фиг. 2. Он показывает, что при изгибе в плоскости полки двух двутавров одинакового сечения и материала перемещение сдвига широкополочного будет меньше, чем узкополочного.



Фиг. 2. Графики функций  $f_1(\alpha)$  и  $f_2(\alpha)$ , характеризующих коэффициенты сдвига  $K_{yy}$  и  $K_{\omega\omega}$ .

б. Коэффициент  $K_{\omega\omega}$ . Он используется при вычислении перемещений сдвига при стесненном кручении.



По (3.5) находим

$$K_{\text{opt}} = C_{\text{opt}} f_2(x) \quad (4.6)$$

$$C_{\text{opt}} = \frac{2.4\delta_2^2}{G_1 F^3} \quad (4.7)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x(1-2x)^2} \quad (4.8)$$

График функции  $f_2(x)$  приведен на той же фиг. 2. Эта функция имеет минимум  $f_{2,\text{min}} = f_2\left(\frac{1}{6}\right) = 13.5$ , то есть при  $x = \frac{1}{6}$  деформации сдвига при стесненном кручении будут наименьшими. Следовательно, с этой точки зрения соотношение  $\frac{F_1}{F} = \frac{1}{6}$  является оптимальным.

Асимптотами кривой являются вертикальные прямые  $x = 0$  и  $x = 0.5$ . Следовательно, при вырождении двутавра в полосу (стенку или полку) рассматриваемые перемещения сдвига неограниченно возрастают.

При малых значениях  $x$  кривые  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  практически сливаются.

в. Коэффициент  $K_{xx}$ . По формуле (3.5) получим

$$K_{xx} = C_{xx} \varphi(x, \beta, \gamma) \quad (4.9)$$

где

$$C_{xx} = \frac{1.2}{G_2 F} \quad (4.10)$$

$$\varphi(x, \beta, \gamma) = \frac{1}{(1-2x)^2 [6x + \beta(1-2x)]^2} \{5x^3\gamma + (1-2x) \times \\ \times [30x^2 + 10x\beta(1-2x) + \beta^2(1-2x)^2]\} \quad (4.11)$$

$$\beta = \frac{A_2}{A_1}, \quad \gamma = \frac{G_2 \delta_2^2}{G_1 \delta_1^2} \quad (4.12)$$

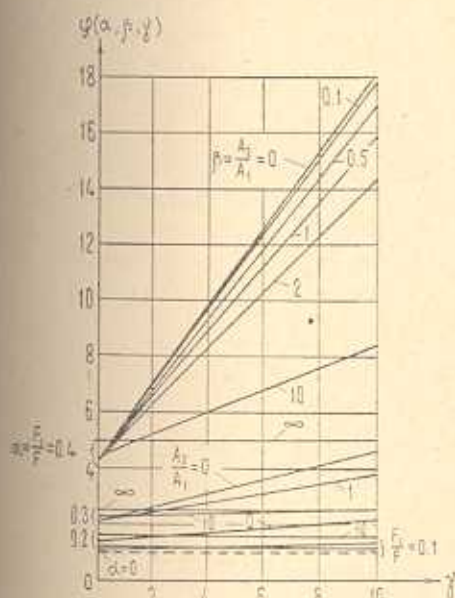
Для исследования довольно сложной функции (4.11) трех переменных установим границы изменения аргументов (теоретические)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x < 0.5 \\ 0 &\leq \beta < \infty \\ 0 &\leq \gamma < \infty \end{aligned} \quad (4.13)$$

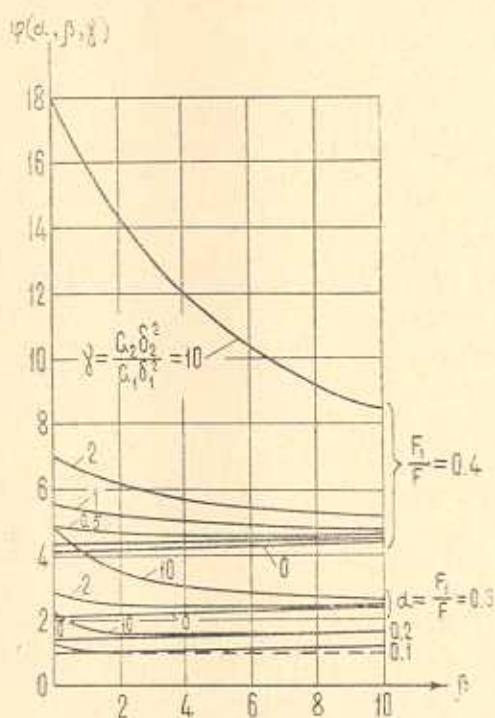
Не допускаются, кроме того, равенства  $x = 0$  и  $\beta = 0$  одновременно.

Для графического представления функции  $\varphi(x, \beta, \gamma)$  положим, например,  $x = A = \text{const}$  и для полученной функции  $\varphi(A, \beta, \gamma)$  двух

переменных построим два вида семейств линий: на фиг. 3  $\varphi(A, B, \gamma)$  и на фиг. 4  $\varphi(A, \beta, D)$ , где  $B$  и  $D$  — постоянные. Наиболее полно на фиг. 3 представлено семейство для  $\alpha = 0.4$ , состоящее из семи прямых. Каждая прямая построена при определенном значении  $\beta$ , которое записано на соответствующей прямой. Из других семейств для упрощения чертежа показаны не все прямые. Семейство  $\alpha = 0$  вырождается в одну горизонтальную прямую, показанную на фигуре пунктиром.



Фиг. 3. Семейства линий  $\varphi(A, B, \gamma)$ .



Фиг. 4. Семейства кривых  $\varphi(A, \beta, D)$ .

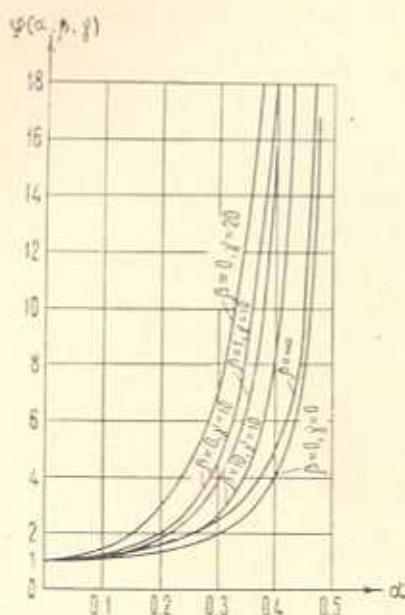
На фиг. 4 показаны семейства кривых второго вида. Все линии одного семейства имеют общую асимптоту. Для семейства  $\alpha = 0.4$  асимптотой является горизонтальная прямая  $\varphi = 5$ , для  $\alpha = 0.3$  —  $\varphi = 2.5$ , для  $\alpha = 0.2$  —  $\varphi = 1.667$ , для  $\alpha = 0.1$  —  $\varphi = 1.25$ . Пунктиром показана прямая  $\varphi = 1$ , представляющая собой вырожденное семейство  $\alpha = 0$ .

На фиг. 5 показано несколько кривых  $\varphi(\alpha, B, D)$ . При малых  $\alpha$  все линии располагаются настолько близко друг к другу, что полные семейства изобразить не представляется возможным. Асимптотой всех кривых является вертикальная прямая  $\alpha = 0.5$ . Эти графики показывают, что приблизительно при  $\alpha \geq 0.3$  функция  $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ , а следовательно, и перемещения сдвига, начинают быстро возрастать.

Из приведенных графиков можно заключить, что для уменьшения перемещений сдвига при изгибе двутавровой балки в плоскости стенки необходимо:

1) уменьшать геометрический параметр  $\alpha = \frac{F_1}{F}$ . Идеальным случаем будет  $\alpha=0$ , когда двутавр вырождается в прямоугольник (стенку).

2) увеличивать физический параметр  $\beta = \frac{A_2}{A_1}$ , то есть стремиться к увеличению модуля упругости  $A_2$  по сравнению с модулем упругости  $A_1$  полок. При  $\alpha \leq 0.3$  и  $\gamma \leq 10$  изменение  $\beta$  в пределах от 0 до  $\infty$  не вызывает больших изменений в перемещениях сдвига; коэффициент  $K_{sz}$  меняется в пределах от 1 до 4.687.



Фиг. 5. Кривые  $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ .

3) уменьшать физико-геометрический параметр  $\gamma$ . Это значит, что при фиксированном модуле сдвига  $G_2$  стенки надо увеличивать модуль сдвига  $G_1$  полок, увеличивать толщину  $\delta_1$  полок (при одновременном уменьшении ее ширины  $b_1$ ), уменьшать толщину  $\delta_2$  стенки при одновременном увеличении ее высоты.

**Выводы:** 1 Основным параметром, от которого, главным образом, зависят перемещения сдвига двутавра, является геометрический параметр  $\alpha$ .

2. В общем случае загрузки (при косом изгибе и стесненном кручении) с точки зрения уменьшения перемещений сдвига целесообразно тонкостенный двутавр из ортотропного материала конструировать так, чтобы  $0.1 < \alpha < 0.3$ ;  $\gamma < 10$ .

Պ. Ի. ՍԵՄՅՈՆՈՎ

ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՉՈՂԵՐԻ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ՝ ՍԱՀՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Գիտարկված է առանձին տարրերից (շերտիկներ) կազմված ծալքի կամ թաղանթի տիպի բարակապատ ձող: Յուրաքանչյուր տարրի նյութը ենթադրվում է օրթոտրոպ, ընդ որում տարրեր տարրերի առաձգական հատկությունները տարրեր են (անհամասեռ ձող):

Հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքի օգնությամբ, սահքի զեֆորմացիաների հաշվառումով, ստացված է այդպիսի ձողի տեղափոխությունների ընդհանուր բանաձև:

EQUATIONS FOR DISPLACEMENTS OF ORTHOTROPIC  
THIN-WALLED BARS WITH CONSIDERATION FOR THE SHEAR

P. I. SEMYONOV

S u m m a r y

A thin-walled bar of a fould or shell type consisting of separate elements (strips) is considered.

The material of each element is supposed to be orthotropic, the properties of elasticity of various elements being different (the bar is non-homogeneous).

A general formula of displacements of such a bar with consideration for shear strain is obtained by means of the principle of possible displacements.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тарнопольский Ю. М., Розе А. В., Поляков В. А. Учет сдвигов при изгибе ориентированных стеклопластиков. Механика полимеров, № 2, 1965.
2. Тарнопольский Ю. М., Розе А. В., Кницис Т. Я. Изгиб защемленных балок из материалов, слабо сопротивляющихся сдвигу. Механика полимеров, № 4, 1967.
3. Воробьева Л. Н. Влияние сдвига срединной поверхности на величину деформаций и напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля с недеформируемым контуром. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 26 (40), 1955.
4. Воробьева Л. Н. К расчету цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, № 4, 1963.
5. Мищенко П. Д. Расчет тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига срединной поверхности. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 42/56, 1958.
6. Мищенко П. Д. Влияние сдвига на величину напряжений при изгибе тонкостенных балок. Там же. т. 78/92, 1958.

7. Мищенко П. Д. Влияние сдвига срединной поверхности на величину углов закручивания и напряжений при изгибом кручении тонкостенных стержней открытого профиля. Там же, т. 104, 1959.
8. Мищенко П. Д. К расчету тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига в срединной поверхности. Тр. Алтайского политехнического института, в. 3, 1967.
9. Садатов Т. С. К расчету неразрезных тонкостенных стержней на стесненное кручение и изгиб. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 163, 1966.
10. Гольденвейзер А. А. О теории тонкостенных стержней. ПММ, т. 13, в. 6, 1949.
11. Мещеряков В. Б. К вопросу определения прогибов и углов закручивания тонкостенных стержней с учетом сдвигов срединной поверхности. Тр. МИИТ, в. 193, 1964.
12. Мещеряков В. Б. С расчете коротких тонкостенных стержней. Там же, в. 236, 1967.
13. Мещеряков В. Б. Общие уравнения теории тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов. Там же, в. 260, 1968.
14. Гаврилюк Ю. М. Графоаналитичний спосіб обчислення додаткових прогибів балок прямокутного і тонкостінних перерізів. Довіді АН УРСР, № 11, 1965.
15. Гаврилюк Ю. М. О дальнейшем совершенствовании графоаналитического метода определения дополнительных деформаций тонкостенных балок. Вестник Львовского политехнического института. Вопросы современного строительства, № 19, 1967.
16. Гаврилюк Б. М. Об основных и дополнительных углах закручивания при стесненном кручении двутавра. Там же, № 7, 1965.
17. Воробьев А. Н. Расчет длинной цилиндрической оболочки с учетом сдвига срединной поверхности. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 136, 1963.
18. Воробьев А. Н. К расчету тонких цилиндрических оболочек открытого профиля. Изв. вузов. Строительство и архитектура, № 4, 1963.
19. Семенов П. И. Напряженно-деформированное состояние ортотропных тонкостенных стержней открытого профиля. Приклад. механ., т. 4, в. 4, 1968.