

В. Ц. ГНУНИ, Г. З. МИКАЕЛЯН

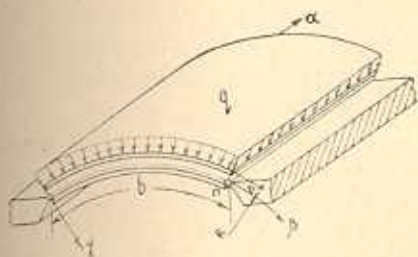
## ВЫПУЧИВАНИЕ ДЛИННЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Пусть гибкая слоистая цилиндрическая панель шарнирно закреплена по длинным краям и нагружена нормальной равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (фиг. 1). Предполагается, что закрепление краев является нецентральной по отношению к толщине и изгиб панели происходит по цилиндрической поверхности.

1. Основные соотношения и уравнения. Уравнение равновесия панели имеет вид [1, 2]

$$\left(D - \frac{K^2}{C}\right) \frac{d^4 w}{d\beta^4} - T_2 \frac{d^2 w}{d\beta^2} = \frac{T_2}{R} + q \quad (1.1)$$

где  $w$  — прогиб,  $T_2$  — постоянное усилие в координатной поверхности панели\*,



Фиг. 1.

$$C = \sum_{i=1}^n B^i (\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B^i [(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) - 2\Delta (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n B^i [(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) - 3\Delta (\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) + 3\Delta^2 (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

$B^i = \frac{E^i}{(1 - \nu_i^2)}$ ,  $E^i$ ,  $\nu^i$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона

$i$ -ого слоя,  $\delta_i$  — расстояние  $i$ -ого слоя от внешней поверхности панели.

Если усилие  $T_2$  — сжимающее ( $T_2 = -T$ ), уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{d^4 w}{d\beta^4} + \lambda^2 \frac{d^2 w}{d\beta^2} = -\frac{\lambda^2}{R} + \frac{qC}{DC - K^2}, \quad (1.2)$$

где

\* Вообще говоря,  $T_2 = T_2(\beta)$ , однако, как показано в работе [3], изменением  $T_2$  по ширине можно пренебрегать, когда прогибы панели превосходят толщину в два-три раза.

$$\lambda^2 = \frac{TC}{DC - K^2}.$$

Решением (1.2) при условиях

$$w = 0, \quad M = \frac{1}{C} \left[ (DC - K^2) \frac{d^2 w}{d\beta^2} + KT \right] = 0, \quad (\beta = 0, \beta = b)$$

будет

$$w = \left[ \frac{K}{C} + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{q}{T} - \frac{1}{R} \right) \right] \left( \frac{\cos \lambda \left( \beta - \frac{b}{2} \right)}{\cos \frac{\lambda b}{2}} - 1 \right) - \left( \frac{q}{T} - \frac{1}{R} \right) \frac{b - \beta}{2} \beta \quad (1.3)$$

когда  $\sin \lambda b \neq 0$ .

В случае же  $\sin \lambda b = 0$

$$w = c_1 \sin \lambda \beta + \left[ \frac{K}{C} + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{q}{T} - \frac{1}{R} \right) \right] (\cos \lambda \beta - 1) - \left( \frac{q}{T} - \frac{1}{R} \right) \frac{b - \beta}{2} \beta \quad (1.4)$$

Таким образом, при  $\lambda b = 2\pi n$  имеет место несимметричное выпучивание панели.

Из соотношений (1.3), (1.4) для прогиба панели в центре получается

$$\xi = \frac{w}{h} \Big|_{\beta = \frac{b}{2}} = \omega \left( \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right) + \frac{1}{32\varphi^4} \left[ 2 \left( \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right) - \varphi^2 \right] (q^* - 4\varphi^2 k) \quad (1.5)$$

а из условия несмещаемости опор панели —

$$\begin{aligned} & [q^* + 4\varphi^2(4\varphi^2\omega - k)]^2 [2\varphi^3 + 3(5\varphi - 5\text{tg}\varphi + \varphi\text{tg}^3\varphi)] + \\ & + 16\varphi^2 [q^* + 4\varphi^2(4\varphi^2\omega - k)] [(k - 4\omega\varphi^2 - 12\omega)\varphi^3 + \\ & + 3(k\varphi - k\text{tg}\varphi - 4\omega\varphi^3 + 8\omega\varphi^2\text{tg}\varphi)] + \\ & + 256\varphi^6 \left[ 12 \frac{DC - K^2}{C^2 h^2} - \omega(k - 2\omega\varphi^2 - 12\omega) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$q^* = \frac{qCb^3}{(DC - K^2)h}, \quad k = \frac{b^2}{Rh}$$

$$\varphi = \frac{b\lambda}{2} = \sqrt{\frac{TC}{DC - K^2}} \frac{b}{2}, \quad \omega = \frac{K}{Ch} \quad (1.7)$$

— соответственно безразмерные параметры нагрузки, кривизны, усилия и эксцентриситета закрепления.

В случае, когда усилие  $T_2$  является растягивающим, полагая в (1.5) — (1.7)  $T_2 = -\bar{T}$ ,  $\varphi = i\bar{\varphi}$  и переходя от тригонометрических функций к гиперболическим, получим\*

$$\xi = \omega \left( \frac{1}{\operatorname{ch}\bar{\varphi}} - 1 \right) + \frac{1}{32\bar{\varphi}^4} \left[ 2 \left( \frac{1}{\operatorname{ch}\bar{\varphi}} - 1 \right) + \bar{\varphi}^2 \right] \times \\ \times (q^* + 4\bar{\varphi}^2 k) \quad (1.8)$$

$$[q^* + 4\bar{\varphi}^2(4\bar{\varphi}^2\omega + k)]^2 [2\bar{\varphi}^3 - 3(5\bar{\varphi} - 5\operatorname{th}\bar{\varphi} - \bar{\varphi}\operatorname{th}^2\bar{\varphi})] - \\ - 16\bar{\varphi}^2[q^* + 4\bar{\varphi}^2(4\bar{\varphi}^2\omega + k)] [(k + 4\omega\bar{\varphi}^2 - 12\omega)\bar{\varphi}^3 - \\ - 3(k\bar{\varphi} - k\operatorname{th}\bar{\varphi} + 4\bar{\varphi}^3\omega - 8\omega\bar{\varphi}^2\operatorname{th}\bar{\varphi})] - \\ - 256\bar{\varphi}^9 \left[ 12 \frac{DC - K^2}{C^2 h^2} - \omega(k + 2\omega\bar{\varphi}^2 - 12\omega) \right] = 0 \quad (1.9)$$

При  $k = 0$  из (1.5) — (1.9) получим аналогичные зависимости для длинной прямоугольной слоистой пластинки.

Существенно отметить, что усилие  $T$  в координатной поверхности пластинки в зависимости от нагрузки и от места шарнирного закрепления может быть сжимающим, растягивающим и равным нулю ( $q \neq 0$ ). Именно поэтому при рассмотрении цилиндрического изгиба слоистой пластинки, наряду с уравнениями (1.8), (1.9), должны быть использованы уравнения (1.5), (1.6), которыми характеризуется поведение пластинки при сжатии в ее координатной поверхности.

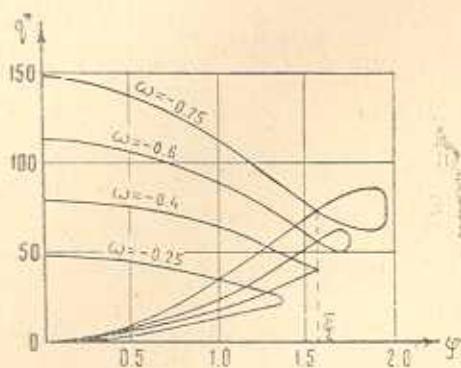
2. Выпучивание пластинки. Пусть при статическом приложении нагрузки  $q$  усилие  $T$  в координатной поверхности пластинки меняет знак. До некоторого значения нагрузки  $q = q_c < q_0$  изгиб пластинки сопровождается сжатием в ее координатной поверхности. При  $q = q_0$  усилие  $T$  равняется нулю и пластинка изгибается как свободно опертая, а при  $q = q_p > q_0$  изгиб пластинки сопровождается растяжением координатной поверхности. Очевидно, что под действием нагрузки  $q_c$  пластинка работает как оболочка, нагруженная давлением с выпуклой стороны, а под действием давления  $q_p$  — как оболочка, нагруженная давлением с вогнутой стороны.

Основные соотношения при  $q = q_c$  и  $q = q_p$  получаются из (1.5), (1.6) и (1.8), (1.9). При  $q = q_0$  имеем

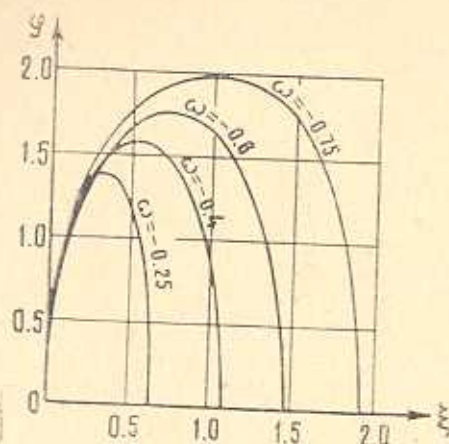
$$q_0^* = \lim_{\varphi \rightarrow 0} q_c^* = \lim_{\varphi \rightarrow 0} q_p^* = - \frac{3360}{17} \omega, \quad \xi_0 = \frac{5}{384} q_0^* \quad (2.1)$$

\* Здесь и в последующем значки над  $T$  и  $\varphi$  опущены.

Исследуем влияние эксцентricности шарнирного закрепления на характер выпучивания двухслойной пластинки, толщина каждого слоя которой  $\frac{h}{2}$ , в случае  $\frac{12(DC - K^2)}{C^2 h^2} = 1$ . При других значениях этого параметра характер выпучивания качественно не меняется. Отметим, что

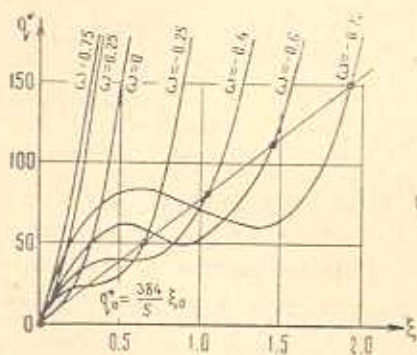


Фиг. 2.

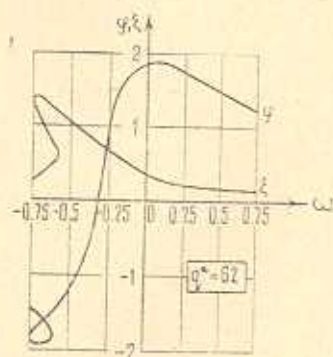


Фиг. 3.

соотношениями (1.6) — (1.9) и (2.1) устанавливаются зависимости между основными безразмерными параметрами задачи. Исследование характера этих зависимостей проводится следующим образом. Для любого заданного значения эксцентриситета  $\omega$  из (1.6), (1.9) находится



Фиг. 4.



Фиг. 5.

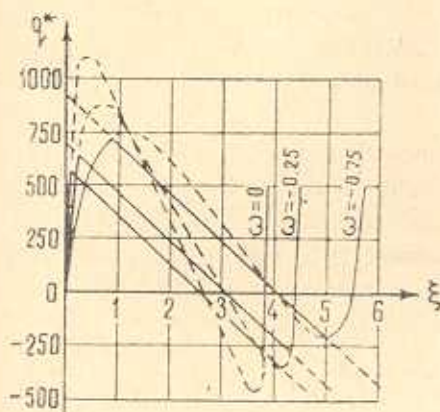
пара значений нагрузок  $q_c^*$ ,  $q_p^*$ , а затем из (1.5), (1.8) получаются соответствующие им значения прогибов  $\xi_c$ ,  $\xi_p$ . При  $q = q_0$  параметры  $q_0^*$  и  $\xi_0$  определяются из (2.1). На фиг. 2 — 4 приведены зависимости нагрузка-усилие, прогиб-усилие, нагрузка-прогиб при различных значениях  $\omega$ .

Рассматривая приведенные зависимости, замечаем, что при  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  пластинка теряет устойчивость хлопком. Наименьшее значение  $\omega$ , при котором появляется хлопок, равно  $\omega \approx -0.4$ . Наличие положительного эксцентриситета существенно увеличивает несущую способность пластинки при значениях нагрузки  $q_p^* < 500$ . Прогибы пластинки при  $q_p^* \leq 100$ ,  $\omega = 0.75$  получаются примерно в два раза меньше, чем при  $\omega = 0$  (случай центрального шарнирного закрепления). На фиг. 5 показано изменение прогибов и усилий, когда при неизменной нагрузке плоскость шарнирного закрепления краев параллельно перемещается по толщине.

3. Выпучивание панели. Исследуем влияние эксцентриситета шарнирного закрепления на выпучивание панели. Рассматривается как симметричное, так и несимметричное выпучивание панели. Пусть для двухслойной оболочки, толщина каждого слоя которой  $h/2$

$$k = 15, \quad \frac{12(DC - K^2)}{C^2 h^2} = 1$$

Задаваясь значением  $\varphi$ , определяем соответствующие значения  $q^*$  из (1.6) или (1.9) в зависимости от знака  $\varphi$ . По найденным значениям  $q^*$  из (1.5) или (1.8) находятся значения безразмерного прогиба  $\xi$ .

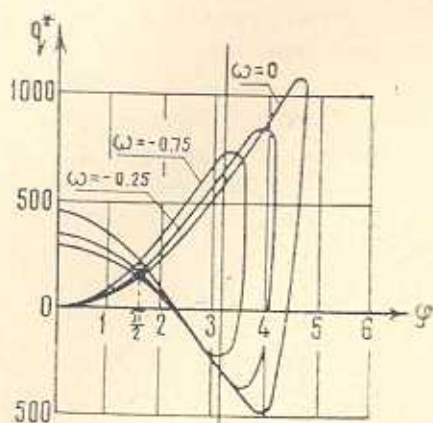


Фиг. 6.

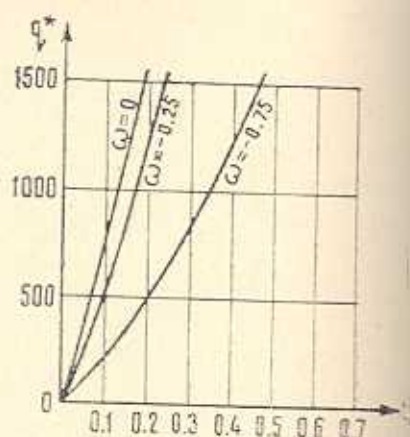
На фиг. 6 приведены кривые зависимости „нагрузка-прогиб“ для случаев симметричного и несимметричного выпучиваний. Случай  $\omega = 0$  отвечает центральному шарнирному закреплению оболочки. Сравнивая полученные кривые, замечаем, что наличие эксцентриситета существенно влияет на несущую способность оболочки. При перемещении опор от краев срединной поверхности к центру кривизмы несущая способность панели снижается. Первоначально с ростом нагрузки панель изгибается по симметричной форме, затем, когда параметр сжимающего усилия  $\varphi$  достигает значения  $\pi$ , происходит несимметричное выпучива-

ние по прямой (хлопок). Дальнейший изгиб панели происходит по симметричной форме.

На фиг. 7 представлена зависимость между нагрузкой  $q^*$  и параметром сжимающего усилия  $\varphi$ . Из графиков следует, что наличие эксцентриситета не вносит изменения в известное [4] необходимое условие для возможности хлопка. Как и в [4], хлопок возможен лишь при  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ .



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Вычисления показывают, что при скачкообразном изменении прогиба сжимающее усилие в координатной поверхности панели изменяется незначительно.

В случае действия давления со стороны вогнутости панели, прогибы являются монотонно возрастающими функциями давления (фиг. 8). При перемещении опор от краев срединной поверхности к центру кривизны несущая способность панели резко снижается. Прогибы панели под действием одной и той же нагрузки при  $\omega = -0.75$  получаются примерно в два раза больше, чем при  $\omega = -0.25$ .

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР,  
Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 24 VI 1970

Վ. Յ. ԳՆՈՒՆ, Զ. Զ. ՄԻԿԵԼՅԱՆ

ԵՐԿՈՐ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՍԱՇԵՐԻ ԵՎ ԲԱՅ ԳԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԿՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրված են երկար շերտավոր սալերի և բաց գլանալին թաղանթների ձկման մի բանի առանձնահատկությունները:

Յույց է արված, որ ոչ սիմետրիկ հավաքած սալերի և թաղանթների ձկման վարքի մեջ էական տարբերություն չկա:

ON THE BUCKLING OF LONG LAYERED PLATES  
AND CYLINDRICAL SHELLS

V. Ts. GNUNY, H. Z. MIKAEKIAN

## S u m m a r y

The peculiarity of the buckling of long layered plates and cylindrical shells is investigated.

It is shown that on buckling there is no essential difference between the behaviour of nonsymmetrically assembled layered plates and shells.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. *Гнунь В. Ц., Микаелян Г. Э.* Выдучивание длинной эксцентрично закрепленной пластинки под действием поперечной нагрузки. Докл. АН АрмССР, т. LI, №3, 1970.
4. *Муштарь Х. М., Галимов К. Э.* Нелинейная теория упругих оболочек. Таткингиздат, Казань, 1957.
5. *Болотин В. В.* Нелинейная теория упругой устойчивости „в большом“. Сб. Расчеты на прочность, вып. 3. Машгиз, М., 1958.
6. *Федосеева В. И.* Упругие элементы точного приборостроения. Оборонгиз, М., 1949.