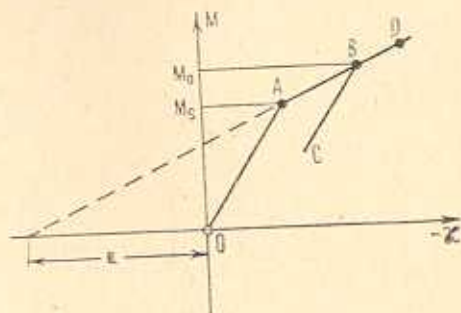


Р. М. КИРАКОСЯН

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ НЕВЕСОМОЙ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ГРУЗА

В работах [1, 2] в квазистатической постановке рассматривалась задача упруго-пластического деформирования балок под действием подвижных нагрузок. Настоящая работа посвящается динамическому деформированию невесомой упруго-пластической балки под действием сосредоточенного груза, движущегося с большой скоростью от одного ее конца к другому. Исследуются всевозможные варианты изменений упруго-пластических областей во время движения груза, и в рамках теории малых упруго-пластических деформаций [3] задача сводится к задачам Коши для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений относительно прогиба загруженного сечения балки. Приводится численный пример.

1. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения длиной  $l$ , с единичной шириной и высотой  $2h$ , свободно лежащую на двух опорах. Поместим начало прямоугольных декартовых координат в центре одного из опорных сечений и направим ось абсцисс  $x$  вдоль оси балки, а ось ординат  $w$  — вертикально вниз.



Фиг. 1.

В качестве зависимостей между кривизной изогнутой оси  $x$  и значением изгибающего момента балки  $M$  будем принимать кусочно-линейные соотношения упрочняющегося материала [3, 4], полученные на основе теории малых упруго-пластических деформаций с использованием гипотезы плоских сечений (фиг. 1).

I. Соотношения упругого изгиба (участок „ОА“)

$$\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{3M}{2Eh^3}, \quad 0 \leq M \leq M_e = \frac{2}{3} Eh^2 \epsilon_e \quad (1.1)$$

( $E$  — модуль Юнга,  $\varepsilon_s$  — предел упругих деформаций материала,  $M_s$  — предел упругих изгибающих моментов сечения).

## II. Соотношения упруго-пластического изгиба

а) случай нагружения (участок „ $AB$ “) или повторного нагружения, вызывающего новые пластические деформации (участок „ $BD$ “)

$$\chi = a + bM, \quad M > M_s \quad (1.2)$$

( $a$  и  $b = -a/M_s - 3/2Eh^2$  — механико-геометрические характеристики сечения балки);

б) случай разгрузки или повторного нагружения, не вызывающего новых пластических деформаций (участок „ $BC$ “ или „ $CB$ “)

$$\chi = -\frac{a}{M_s} (M_0 - M_s) - \frac{3M}{2Eh^2} \quad (1.3)$$

$$M_0 - 2M_s \leq M \leq M_0, \quad M_0 - 2M_s \leq 0$$

( $M_0$  — значение изгибающего момента, с которого начинается разгрузка).

Пусть балка свободна от начальных напряжений и деформаций и подвергается действию сосредоточенного груза  $P_0$ , который с большой скоростью  $v = \text{const}$  (здесь имеется в виду горизонтальная составляющая скорости) движется по балке от одной ее опоры  $\eta = 0$  к другой  $\eta = l$ . Пренебрегая собственной массой балки, для изгибающих моментов сечения балки  $\eta$  в момент времени  $t$  будем иметь

$$M(\eta, t) = \begin{cases} \frac{P(t)(l-vt)}{l} \eta, & 0 \leq \eta \leq vt \\ \frac{P(t)(l-\eta)}{l} vt, & vt \leq \eta \leq l \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$P(t) = P_0 \left[ 1 - \frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \Big|_{\eta=vt} \right] =$$

$$= P_0 \left[ 1 - \frac{1}{g} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] \quad (1.5)$$

$g$  — ускорение силы тяжести,  $f$  — прогиб балки в ее загруженном сечении  $\eta = vt$ .

Этот случай отличается от квазистатического случая, рассмотренного в работе [1] только тем, что вместо известной силы здесь фигурирует переменная сила  $P(t)$ , выраженная через неизвестные ускорения оси балки формулой (1.5).

Предположим

$$\max_{\substack{\eta \in [0, l] \\ t \in [0, l/v]}} M(\eta, t) > M_s \quad (1.6)$$

тогда балка будет испытывать деформирование упруго-пластического изгиба\*.

Как известно [5], решение рассматриваемой упругой задачи (когда условие (1.6) не соблюдается) сводится к решению задачи Коши для уравнения Стокса относительно прогиба загруженного сечения  $f(t)$

$$f''(t) + \frac{2Eh^3lg}{P_0v^2t^2(l-vt)^2} f(t) - g = 0, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{l}{v}\right) \quad (1.7)$$

с начальными условиями

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \left(f''(0) = \frac{P_0lgv^2}{P_0lv^2 + Eh^3g}\right) \quad (1.8)$$

(Для конкретности считается, что в момент входа груза  $t=0$  балка неподвижна).

Из (1.5) с учетом (1.8) для значения силы, действующей в самом начале движения  $t=0$ , находим

$$P(0) = P_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{Eh^3g}{P_0lv^2}}\right) < P_0 \quad (1.8')$$

Имея в виду непрерывность  $P(t)$  при  $t \geq 0$ , попутно заметим, что подвижный груз в начале своего движения действует на балку с силой, меньшей своего собственного веса. Причем эта сила настолько мала, насколько велики деформативность балки и скорость движения по ней груза.

Очевидно, что в случае упруго-пластического деформирования, когда условие (1.6) удовлетворяется, всегда существует первичный период упругого деформирования балки. Область пластических деформаций начнется с определенного момента времени  $t_0$  [1]

$$t_0 = \frac{l}{2v} - \frac{l}{2v} \sqrt{1 - \frac{8Eh^2z_s}{3lP(t_0)}} \quad (1.9)$$

В дальнейшем, с движением силы, область пластических деформаций будет распространяться, охватывая все новые и новые упругие сечения балки. Характер распространения упруго-пластической области существенным образом зависит от характера процесса нагружения.

Вопрос нагружения и разгрузки отдельных частей балки в квазистатической задаче решается очень просто [1]. В этом случае граница раздела областей нагружения и разгрузки совпадает с загруженным сечением  $\eta = vt$  и с движением силы правая часть балки

$$vt < \eta < l \quad (1.10)$$

нагружается, а остальная, левая часть

\* Так как условие (1.6) в себе содержит неизвестную силу  $P(t)$ , его проверка заранее невозможна. Это следует сделать в ходе решения задачи.

$$0 < \eta < vt \quad (1.11)$$

— разгружается. Дело значительно усложняется при динамическом деформировании балки, когда за счет инерционных эффектов значение силы меняется со временем.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Из выражений изгибающих моментов (1.4) видно, что левая (1.11) и правая (1.10) части балки нагружаются или разгружаются, если функции  $P(t)(l-vt)$  и  $tP(t)$  соответственно возрастают или убывают. Для иллюстрации некоторых специфических особенностей процесса нагружения динамически деформируемой балки в таблице 1 представлены некоторые результаты численного решения упругой задачи (1.7), (1.8) на машине „Наири“.

Таблица 1

$$E=10^6 \text{ кг/см}^2, \quad h=5 \text{ см}, \quad l=300 \text{ см}, \quad \varepsilon_s=10^{-3}, \quad v=1000 \text{ см/сек.}$$

$$(M_s=16667 \text{ кг.см})$$

$P_0=222 \text{ кг}$					$P_0=300 \text{ кг}$				
$vt$ см	$P(t)$ кг	$P(t)vt$ кг.см	$P(t)(l-vt)$ кг.см	$M(vt)-M_s$ кг.см	$vt$	$P(t)$	$P(t)vt$	$P(t)(l-vt)$	$M(vt)-M_s$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	150.03	1500	43509	-15216	86	268.39	23081	57435	-202
30	163.54	4906	44156	-12251	88	271.47	23889	57552	215
40	170.96	6838	44450	-10740	100	291.09	29109	58218	2739
50	178.87	8943	44717	-9942	148	393.64	58259	59833	12851
60	187.30	11238	44952	-7676	150	398.92	59838	59838	13252
70	196.30	13741	45149	-6132	152	404.29	61452	59835	13649
80	205.91	16473	45300	-4586	238	643.99	153270	39927	15009
90	216.18	19456	45398	-3047	240	639.21	153410	38353	14015
100	227.14	22714	45428	-1524	242	632.15	152980	36665	12909
110	238.83	26271	45378	-28	256	474.13	121377	20862	1135

Из второго и четвертого столбцов видно, что в случае  $P_0=222 \text{ кг}$  с течением времени значение силы настолько быстро возрастает, что сечения, оставшиеся позади силы, вместо того, чтобы разгружаться (что имеет место в квазистатическом случае), нагружаются.

Однако, нагружение левой части балки (1.11) прекращается и начинается ее разгрузка при  $vt=110 \text{ см} < \frac{l}{2}$ ,  $M(vt)-M_s=-28 \text{ кг.см} < 0$ , то есть раньше, чем наступит образование области пластических деформаций. Появление же пластических деформаций, что означает увеличение деформативности балки, временно влечет за собой уменьшение роста силы, действующей на балку. В силу этого участок (1.11) продолжит разгружаться и с появлением пластических деформаций.

Спустя некоторое время после перехода от упругого деформирования к упруго-пластическому, значение подвижной силы начнет возрастать более интенсивно, чем раньше. В связи с этим не исключена возможность появления повторного нагружения позади силы (участок (1.11)), которое может протекать как без появления, так и с появлением новых пластических деформаций.

Во втором примере ( $P_0 = 300 \text{ кт}$ ), как видно из шестого, девятого и десятого столбцов, область пластических деформаций появляется при  $vt = 88 \text{ см}$ , а нагружение сечений, оставшихся позади силы, прекращается намного позже, при  $vt = 152 \text{ см}$ . Это означает, что область пластических деформаций в промежутке  $88 \text{ см} < vt < 152 \text{ см}$  целиком нагружается, распространяясь как направо, так и налево. Из столбцов 7 и 8 видно, что в дальнейшем, когда сила достаточно подходит к другой опоре балки, ее значение настолько быстро убывает, что сечения перед силой (1.10) вместо того, чтобы нагружаться (что имеет место в квазистатическом случае), разгружаются. В данном случае разгрузка правой части балки (1.10) наступает при  $vt = 242 \text{ см}$ ,  $M(vt) - M_c = 14015 \text{ кт.см}$ , то есть намного раньше, чем сила успела бы дойти до правого края пластической области. Разумеется, что возможен и обратный случай, когда разгрузку правой части (1.10) опережает прекращение нарастания пластической области в сторону движения силы.

Несмотря на то, что во втором примере ( $P_0 = 300 \text{ кт}$ ) поведение упруго-пластических областей анализируется на базе решения упругой задачи, его качественные выводы о возможных вариантах процесса нагружения сохраняют свою силу и для истинного упруго-пластического случая. Это ясно, так как всегда можно подразумевать упрочняющийся упруго-пластический материал со сколь угодно незначительными пластическими свойствами  $\left(\frac{\sigma}{M_c} \ll \frac{3}{2} Eh^2\right)$ .

Вышеотмеченные специфические особенности характера процесса нагружения динамически деформируемой упруго-пластической балки существенно усложняют задачу. Дело в том, что связь между кривизной изогнутой оси и изгибающим моментом балки зависит от характера нагружения пластических областей, выяснение которого возможно лишь в ходе решения задачи.

На основе вышесделанного анализа в табл. 2 приводятся все возможные варианты поведения процесса нагружения отдельных частей балки.

Для конкретности, в настоящей работе будем ограничиваться случаем 1, когда пластическая область появляется раньше, чем наступает разгрузка левой части балки (1.11).

Как отмечалось выше, в начальный период движения груза до момента времени  $t_0$  (1.9), при котором в крайних волокнах загруженного сечения  $\gamma_0 = vt_0$  впервые достигается предел упругости, балка

Таблица 2

I. Пластическая область появляется раньше, чем наступает разгрузка левой части балки (1.11).	II. Левая часть балки (1.11) начинает разгружаться раньше, чем успевает повалиться область пластических деформаций.	
<p>а) Разгрузка правой части балки (1.10) наступает раньше, чем сила успевает достичь возрастающей пластической области в сторону движения силы.</p> <p>б) Разгрузка правой части балки (1.10) наступает после прекращения движения нарастающей пластической области.</p>	<p>1) Левая часть балки (1.11) или не испытывает деформирования повторного нагружения, или испытывает, но без сопровождения новых пластических деформаций.</p>	<p>2) Левая часть балки (1.11) испытывает деформирование временного повторного нагружения с появлением новых пластических деформаций.</p> <p>з) Левая пластическая область <math>\tau_2 &lt; \tau_1 &lt; \nu t</math> путем области полностью повторно нагружения, ходит неравновесный уровень частично переходит пер- разгрузки и временно нарастает лавово, включая и себя новые упругие сечения балки.</p>
	<p>а)</p> <p>б)</p>	<p>а)</p> <p>б)</p> <p>а)</p> <p>б)</p>

деформируется упруго, и задача сводится к задаче Коши для уравнения Стокса (1.7) с начальными условиями (1.8). При дальнейшем движении груза вокруг загруженного сечения  $\eta = vt$  образуется область пластических деформаций с границами [1]

$$\gamma_{12}(t) = \frac{2Elh^2\varepsilon_s}{3P(t)(l-vt)} < vt, \quad \gamma_{13}(t) = l - \frac{2Elh^2\varepsilon_s}{3P(t)vt} > vt \quad (1.12)$$

Так как балка целиком испытывает активное деформирование, область пластических деформаций  $\gamma_{12}(t) \leq \eta \leq \gamma_{13}(t)$  с течением времени расширится двусторонне ( $\gamma_{12}$  убывает,  $\gamma_{13}$  возрастает). Очевидно, что это продлится до некоторого момента времени  $t_1$ , при котором левая часть балки (1.11) перестанет нагружаться и начнет разгрузку.

Из первого выражения изгибающих моментов (1.4) для  $t_1$  получим

$$P'(t_1)(l-vt_1) - vP(t_1) = 0 \quad (1.13)$$

Пользуясь соотношениями упругого (1.1) и упруго-пластического активного изгиба (1.2), при этом имея в виду выражения изгибающих моментов (1.4), для активно деформируемой упруго-пластической балки получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$(t_0 < t < t_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} &= -\frac{3P(t)(l-vt)}{2Eh^3l} \eta, & 0 < \eta < \gamma_{12}(t) \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} &= a - \frac{aP(t)(l-vt)}{lM_s} \eta - \frac{3P(t)(l-vt)}{2Eh^3l} \eta, & \gamma_{12}(t) < \eta < vt \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial \eta^2} &= a - \frac{aP(t)(l-\eta)}{lM_s} vt - \frac{3P(t)(l-\eta)}{2Eh^3l} vt, & vt < \eta < \gamma_{13}(t) \\ \frac{\partial^2 w_4}{\partial \eta^2} &= -\frac{3P(t)(l-\eta)}{2Eh^3l} vt, & \gamma_{13}(t) < \eta < l \end{aligned} \quad (1.14)$$

В качестве начальных условий следует брать значения прогибов и их скоростей в момент времени  $t_0$ , а в качестве краевых условий — условия опирания концов балки  $\eta = 0$ ,  $\eta = l$  и ее неразрывности в сечениях  $\gamma_{12}(t)$ ,  $vt$  и  $\gamma_{13}(t)$ .

После момента времени  $t_1$  граница раздела областей разгрузки и нагружения совпадает с загруженным сечением  $\eta = vt$  и, следовательно, с движением силы левая часть балки (1.11) разгружается, а правая часть (1.10) продолжает нагружаться. При этом сечения участка

$$\gamma_{12}(t_1) < \eta < vt_1 \quad (1.15)$$

разгружаются от уровня

$$M_0(\eta, t_1) = \frac{P(t_1)(l-vt_1)}{l} \eta \quad (1.16)$$

достигаемого в момент времени  $t_1$ . Каждое сечение остальной части разгружаемой пластической области

$$vt_1 < \eta < vt \quad (1.17)$$

разгружается от уровня

$$M_0(\eta, t) \Big|_{t=\frac{\eta}{v}} = \frac{P\left(\frac{\eta}{v}\right)(l-\eta)}{l} \eta \quad (1.18)$$

который приобретает в момент времени  $t = \frac{\eta}{v}$ , при котором сила находится над этим сечением.

Ясно, что сечения участков (1.15) и (1.17) разгружаются до уровня

$$M(\eta, t) = \frac{P(t)(l-vt)}{l} \eta \quad (1.19)$$

соответствующего окончательному положению подвижной силы.

Разгрузка правой части балки (1.10) наступает в момент времени  $t_2$ , который согласно с выражением изгибающего момента (1.4) удовлетворяет уравнению

$$t_2 P'(t_2) + P(t_2) = 0 \quad (1.20)$$

Подвижная сила доходит до правого края пластической области в момент времени  $t_3$  [1]

$$t_3 = \frac{l}{2v} + \frac{l}{2v} \sqrt{1 - \frac{8Eh^2\varepsilon_x}{3P(t_3)}} \quad (1.21)$$

Как отмечалось выше, следует различать два возможных случая, случаи а) и б).

В первом случае разгрузка правой части балки (1.10) наступает не позже, чем сила успевает дойти до правого края пластической области, то есть

$$t_2 \leq t_3$$

В случае же б), наоборот, правая часть балки начинает разгружаться после прекращения нарастания пластической области направо, то есть  $t_2 > t_3$ .

Для конкретности положим

$$t_* = \min(t_2, t_3) \quad (1.22)$$

Тогда, имея в виду соотношения (1.1)–(1.4) и поведение пластических областей (1.15), (1.17) и

$$vt < \eta < \eta_3(t) \quad (1.23)$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений задачи в промежутке  $t_1 < t < t_*$ :



$$(t_1 < t < t_2)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = - \frac{3P(t)(l-vt)}{2Eh^3l} \eta, \quad 0 < \eta < \eta_2(t_1)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = a - \frac{a\eta}{lM_s} P(t_1)(l-vt_1) - \frac{3P(t)(l-vt)}{2Eh^3l} \eta, \quad \eta_2(t_1) < \eta < vt_1$$

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial \eta^2} = a - \frac{a\eta}{lM_s} P\left(\frac{\eta}{v}\right)(l-\eta) - \frac{3P(t)(l-vt)}{2Eh^3l} \eta, \quad vt_1 < \eta < vt$$

$$\frac{\partial^2 w_4}{\partial \eta^2} = a - \frac{avt}{lM_s} P(t)(l-\eta) - \frac{3P(t)(l-\eta)}{2Eh^3l} vt, \quad vt < \eta < \eta_3(t) \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 w_5}{\partial \eta^2} = - \frac{3P(t)(l-\eta)}{2Eh^3l} vt, \quad \eta_3(t) < \eta < l$$

Краевые условия и условия неразрывности балки следует сочетать с начальными условиями (значения прогибов и их скоростей в момент времени  $t_1$ ), определяемыми из решения предыдущей упруго-пластической задачи (1.14).

Аналогичным путем можно составить системы дифференциальных уравнений задачи как для промежутка  $t_* < t < \frac{l}{v}$ , так и для всех вариантов случая II.

Таким образом, решение динамической задачи упруго-пластического изгиба невесомой балки под действием движущегося сосредоточенного груза в данном случае сводится к последовательному интегрированию систем дифференциальных уравнений (1.14), (1.24) и так далее с соответствующими краевыми и начальными условиями. Вся трудность интегрирования уравнений этих систем заключается в том, что они справедливы в заранее неизвестных промежутках переменных и содержат неизвестную силу  $P(t)$ .

Естественно, что отмеченные дифференциальные уравнения настолько правильно опишут реальное движение балки, насколько приемлемым окажется пренебрежение влиянием инерции собственной массы балки на ее движение по сравнению с влиянием инерции сосредоточенного груза. Но инерция собственной массы балки и массы груза в зависимости от положения последнего по-разному влияют на движение балки. Например, когда груз подходит к другой опоре балки  $\eta = l$ , доминирующим является влияние инерции собственной массы балки независимо от того, насколько собственная масса меньше массы движущегося груза, а когда груз доходит до этой опоры или переходит ее  $\left(t > \frac{l}{v}\right)$  то динамическая задача в предположении невесомости балки вообще становится бессмысленной. Поэтому при предположении невесомости балки можно использовать решение задачи, когда груз

находится в средних частях ее пролета, при котором именно и возникают наибольшие прогибы и напряжения. Итак, займемся решением задачи в промежутке времени  $t_0 < t < t_*$ .

Проинтегрировав уравнения систем (1.14), (1.24) по  $\eta$  и удовлетворив условиям свободного опирания концов, а также условиям неразрывности балки в необходимых сечениях, легко найти выражения прогибов в промежутках времени  $t_0 < t < t_1$  и  $t_1 < t < t_*$ .

Ради краткости приведем два из этих выражений, которые нам понадобятся в дальнейшем

$$w = a \frac{\gamma_1^2}{2} - \frac{P(t)(l-vt)(2aEh^3 + 3M_s)}{12Eh^3lM_s} \gamma_1^2 + A_1 \gamma_1 + A_2$$

$$t_0 \leq t \leq t_1, \quad \gamma_0(t) \leq \gamma \leq vt \quad (1.25)$$

$$w = a \frac{\gamma_1^2}{2} - \frac{a}{lM_s} R(\gamma) - \frac{P(t)(l-vt)}{4Eh^3l} \gamma_1^2 + B_1 \gamma_1 + B_2$$

$$t_1 \leq t \leq t_*, \quad vt_1 \leq \gamma \leq vt \quad (1.26)$$

где

$$A_1 = \frac{a}{2l} (\gamma_3^2 - \gamma_2^2 - 2l\gamma_3) + \frac{P(t)(l-vt)}{3l^2M_s} \gamma_0^2 a - \frac{P(t)(l-\gamma_3)^2 avt}{3l^2M_s} +$$

$$+ \frac{P(t)vt(l-vt)(2l-vt)(2aEh^3 + 3M_s)}{12Eh^3lM_s}$$

$$A_2 = a \frac{\gamma_2^2}{2} - \frac{P(t)(l-vt) a \gamma_2^3}{3lM_s}$$

$$B_1 = -\frac{a}{2l} [\gamma_2^2(t_1) - \gamma_3^2(t) + 2l\gamma_3] - \frac{a}{3l^2M_s} P(t_1)(l-vt_1)(v^3 t_1^3 - \gamma_2^3) +$$

$$+ \frac{a}{l^2M_s} [R(vt) + (l-vt)Q(vt)] - \frac{P(t)avt}{3l^2M_s} (l-\gamma_3)^3 + \quad (1.27)$$

$$+ \frac{P(t)avt(l-vt)^2}{3l^2M_s} + \frac{P(t)vt}{4Eh^3l} (l-vt)(2l-vt)$$

$$B_2 = a \frac{\gamma_2^2(t_1)}{2} + \frac{aP(t_1)(l-vt_1)}{3lM_s} (v^3 t_1^3 - \gamma_2^3)$$

$$Q(\gamma) = \int_{vt_1}^{\gamma} P\left(\frac{\gamma}{v}\right) (l-\gamma) \gamma d\gamma, \quad R(\gamma) = \int_{vt_1}^{\gamma} Q(\eta) d\eta$$

Подставляя выражение подвижной силы (1.5) в (1.25) и (1.26), при этом используя обозначения (1.27), после некоторых элементарных выкладок получим

$$\left[ P_0 - \frac{P_0}{g} f''(t) \right]^3 - \frac{Eh^3 l^2 \varepsilon_s [2f(t) + avt(l-vt)]}{(ah + \varepsilon_s) v^2 t^2 (l-vt)^2} \left[ P_0 - \frac{P_0}{g} f''(t) \right]^2 + \frac{4aE^3 h^7 l^3 \varepsilon_s^3}{27 (ah + \varepsilon_s) (l-vt)^3 v^2 t^3} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1.28)$$

$$\left[ P_0 - \frac{P_0}{g} f''(t) \right]^2 + \frac{2Eh^3 l^2 \varepsilon_s}{v^2 t^2 (l-vt)^2 [l\varepsilon_s + ah(l-vt)]} \left[ -f(t) - \frac{avt(l-vt)}{2} + \frac{2a(l-vt)E^2 l h^4 \varepsilon_s^2}{27 P_1^2 (l-vt_1)^2} + \frac{a(l-vt)P_1 v^2 t_1^3 (l-vt_1)}{2Eh^2 l^2 \varepsilon_s} + \frac{3a(l-vt) |vtQ(vt) - R(vt)|}{2Eh^2 l^2 \varepsilon_s} \right] \left[ P_0 - \frac{P_0}{g} f''(t) \right]^2 + \frac{4E^3 h^7 l^3 \varepsilon_s^3 a}{27 v^2 t^2 (l-vt)^2 [l\varepsilon_s + ah(l-vt)]} = 0 \quad t \leq t \leq t_2 \quad (1.29)$$

где

$$P_1 = P_0 - \frac{P_0}{g} f''(t_1).$$

Уравнение (1.28) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно прогиба загруженного сечения  $f(t)$ . В качестве начальных условий для этого уравнения следует брать значения  $f$  и ее производной  $f'$  в момент времени  $t_0$ , определяемые из решения предыдущей упругой задачи (1.7), (1.8). Уравнение же (1.29), которое следует решить после решения уравнения (1.28), из-за членов  $Q$  и  $R$ , то есть интегралов от неизвестной функции  $f(t)$ , является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Ясно, что начальные условия уравнения (1.29) будут значениями  $f$  и  $f'$  в момент времени  $t_1$ , определяемыми из предыдущей упруго-пластической задачи (1.28).

Определением прогибов загруженного сечения  $f(t)$  фактически завершается решение задачи.

Итак, задача о динамическом упруго-пластическом изгибе несомой балки под действием движущегося по ней сосредоточенного груза в данном случае сводилась к последовательным задачам Коши для линейного и нелинейного дифференциальных уравнений второго порядка (1.7) и (1.28) и нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.29), которые легко решаются на ЭВЦМ.

2. Рассмотрим следующий численный пример.

Пусть первоначально неподвижная балка с характеристиками

$$E = 10^9 \text{ кг/см}^2, \quad h = 5 \text{ см}, \quad l = 300 \text{ см}, \quad \varepsilon_s = 10^{-3} \quad (2.1)$$

$$(M_s = 16667 \text{ кг.см})$$

подвергается действию груза весом  $P_0 = 250$  кг, движущегося по ней

с постоянной скоростью  $v = 1000$  см/сек. В табл. 3 представлены некоторые результаты решения упругой задачи (уравнение Стокса (1.7) с начальными условиями (1.8)).

Таблица 3\*

$vt$ см	$f(t)$ см	$P(t)$ кг	$vt$	$f(t)$	$P(t)$
0	0	155.12	130	1.9295	296.30
10	0.0181	161.96	140	2.0980	312.60
20	0.0708	169.42	150	2.2410	332.09
30	0.1550	177.32	160	2.3528	351.69
40	0.2679	185.87	170	2.4242	372.26
50	0.4058	194.82	180	2.4475	393.45
60	0.5654	204.53	190	2.4146	414.59
70	0.7428	214.95	200	2.3171	434.47
80	0.9340	226.15	210	2.2720	450.87
90	1.1420	238.20	220	1.8900	459.20
99, 60	1.3314	250.64	230	1.5680	453.94
100	1.3395	251.17	240	1.1595	409.40
110	1.5441	265.13	250	0.6955	329.08
120	1.7427	280.15	260	0.1841	127.66

В данном случае появление пластических деформаций наступает при

$$t_0 = 0.0996 \text{ сек}, \quad f(t_0) = 1.3314 \text{ см}, \quad f'(t_0) = 20.5724 \text{ см/сек} \quad (2.2)$$

в условиях нагружения левой части балки (1.11) (случай 1 табл. 2).

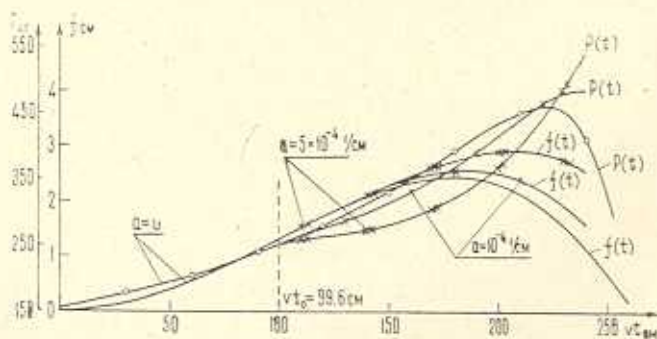
В табл. 4 приводятся результаты численного решения последующих упруго-пластических задач активного изгиба и изгиба с частичной разгрузкой пластической области для двух значений параметра пластичности балки  $a$ .

Из табл. 3 и 4 легко заметить, что продолжительность активного упруго-пластического периода  $\Delta t = t_1 - t_0$  при увеличении параметра пластичности  $a$  уменьшается. Например, длина участка  $\Delta l = v \Delta t$ , которая в упругом случае составляет 20 см, при  $a = 10^{-5}$  1/см и  $a = 5 \cdot 10^{-5}$  1/см принимает, соответственно, значения 13 см и 4 см. На основе этого, в рассмотренном случае (2.1) при сравнительно больших значениях параметра  $a$  можно пренебречь существованием периода активного упруго-пластического изгиба. Тогда после решения уравнения Стокса (1.7) можно сразу перейти к решению уравнения (1.29) с начальными условиями (2.2).

\* С целью сравнения со случаем упруго-пластического изгиба упругое решение продолжено за пределом упругости.

Таблица 4

$a=10^{-6} 1/\text{см}$				$a=5 \cdot 10^{-6} 1/\text{см}$			
$vt$ см	$f(t)$ см	$P(t)$ кг	примеч.	$vt$	$f(t)$	$P(t)$	примеч.
99.6	1.3314	250.64	$t_0 < t < t_1$ уравнение (1.28), нач. условия (2.2)	99.6	1.3314	250.64	$t_0 < t < t_1$ уравнение (1.28) нач. усл. (2.2)
100	1.3396	251.18		100	1.3396	251.23	
102	1.3786	253.74		102	1.3807	253.83	
104	1.4197	256.47		104	1.4238	256.59	
106	1.4607	259.22		104.2	1.4259	256.72	
108	1.5035	262.14					
110	1.5462	265.10					
112	1.5886	268.10					
113.7	1.6187	270.26					
$f'(t_1) = 20.0012 \text{ см/сек}$				$f'(t_1) = 20.5063 \text{ см/сек}$			
118	1.7176	277.64	$t_1 < t < t_2$ уравнение (1.29), нач. условия: $t_1 = 0.1137 \text{ сек}$ , $f(t_1) = 1.6187 \text{ см}$ , $f'(t_1) = 20.0012 \text{ см/сек}$	109	1.5280	263.29	$t_1 < t < t_2$ уравнение (1.29), нач. условия: $t_1 = 0.1042 \text{ сек}$ , $f(t_1) = 1.4259 \text{ см}$ , $f'(t_1) = 20.5063 \text{ см/сек}$
128	1.9065	293.15		119	1.7276	276.45	
138	2.0784	309.79		129	1.9169	290.28	
148	2.2269	327.63		139	2.0903	305.16	
158	2.3448	346.69		149	2.2421	321.35	
168	2.4247	366.87		159	2.3658	339.02	
178	2.4588	387.92		169	2.4545	358.25	
188	2.4388	409.31		179	2.5007	378.98	
198	2.3562	430.02		189	2.4963	400.94	
208	2.2031	448.16		199	2.4326	423.45	
218	1.9724	460.22		209	2.3009	445.09	
228	1.6597	459.71		219	2.0928	463.06	
232.3	1.5269	454.34	229	1.8014	471.71		
			236.9	1.5181	465.18		



Фиг. 2.

Пользуясь этим упрощением в табл. 5 приводятся результаты решения задачи с частично разгружаемой пластической областью для двух достаточно больших значений параметра  $a$ .

На основе данных табл. 3—5 на фиг. 2 построены графики подвижной силы  $P(t)$  и прогиба загруженных сечений  $f(t)$  в упругом

Таблица 5

см	$a=10^{-4}$ 1/см		$a=5 \cdot 10^{-4}$ 1/см		Примеч.
	$f(t)$ см	$P(t)$ кг	$f(t)$	$P(t)$	
99.6	1.3314	250.64	1.3314	250.64	$t_0 < t < t_*$ уравнение (1.29), нач. условия: $t_0 = 0.0996$ сек, $f(t_0) = 1.3314$ см; $f'(t_0) = 20.5724$ см/сек
109.5	1.5361	263.13	1.5363	259.14	
119.5	1.7358	274.78	1.7378	263.68	
129.5	1.9257	286.84	1.9340	268.28	
139.5	2.1012	299.93	2.1230	274.14	
149.5	2.2570	314.45	2.3026	281.89	
159.5	2.3875	330.71	2.4696	292.04	
169.5	2.4863	348.91	2.6201	305.07	
179.5	2.5462	369.20	2.7489	321.57	
189.5	2.5593	391.54	2.8496	342.22	
199.5	2.5169	415.63	2.9140	367.93	
209.5	2.4094	440.58	2.9320	399.81	
219.5	2.2272	464.33	2.8910	439.16	
229.5	1.9611	482.38	2.7756	487.28	
239.5	1.6043	484.84	2.5668	544.57	

( $a = 0$ ) и упруго-пластических ( $a = 10^{-4}$  1/см,  $a = 5 \cdot 10^{-4}$  1/см) случаях изгиба балки.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1970

Բ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԿՇՌԱԶՈՒՐԿ ԷՆՏԱՆԻ ԱՌԱՋԳԻՆ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԳԻՆԱՄԻԿ ԾՌՈՒՄԸ ԵՍՐԺՎՈՂ ԿԵՆՏՐՈՆԱՅԱԾ ԲԵՌԻ ԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ՏՈՎ

Ա մ փ ն փ ն ի մ

Աշխատանքը նվիրված է կշռագուրկ հեծանի առաձգա-պլաստիկական դինամիկ ծոմանը, երբ մեծ արագությանը նրա մի ծայրից դեպի մյուսն է կարծվում կենտրոնացած բևուռ: Հետազոտելով հեծանի առաձգա-պլաստիկական տիրույթների փոփոխման հնարավոր բոլոր տարրերակները, փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջանակներում խնդիրը բերվում է բեռնավորված կարվածքի ճկվածքի նկատմամբ միմյանց հաջորդող ոչ պծային դիֆերենցիալ և ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշու խնդիրները: Բերվում է թվային օրինակ:

THE ELASTIC-PLASTIC DYNAMIC BENDING OF A  
WEIGHTLESS BEAM UNDER A MOVING CONCENTRATED LOAD

R. M. KIRAKOSIAN

## Summary

The problem of an elastic-plastic dynamic bending of a weightless beam under the action of a concentrated load moving at a high velocity from one support of the beam to the other is considered.

The every possible variant of the changing of elastic-plastic region of the beam at the motion time is investigated and on the basis of the theory of small elastic-plastic deformations the problem is reduced to the Koshi successive problems for nonlinear differential and integral-differential equations. A numerical example is presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Киракосян Р. М. Об упруго-пластическом изгибе балки под действием движущейся силы. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, №1, 1969.
2. Киракосян Р. М. Об упруго-пластическом изгибе балки под действием движущейся нагрузки. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 5—6, 1968.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
4. Дикович И. Л. Динамика упруго-пластических балок. Судпромгиз, Л., 1962.
5. Филиппов А. П., Козманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Научова думка, К., 1967.