

А. М. МКРТЧЯН

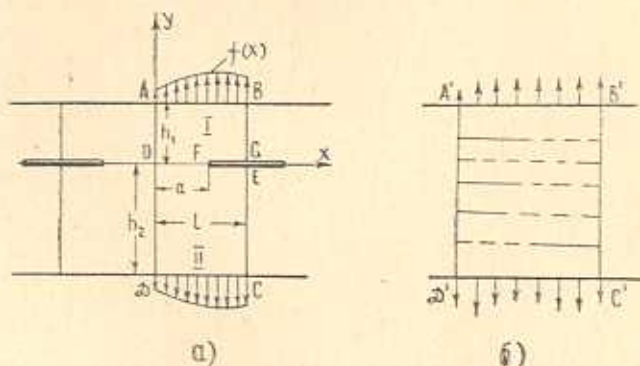
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С НЕЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Решается плоская задача теории упругости для полосы с периодическими, нецентральными, параллельными кромкам разрезами, нагруженной периодической нагрузкой.

Задача после решения парных уравнений [1] сводится к определению неизвестных коэффициентов функции напряжений из квази-воле регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Вопрос влияния разрезов на распределение напряжений в упругом теле рассматривался многими авторами. В шестой главе [2] и в работах [3—5] исследованы некоторые плоские и осесимметричные задачи для областей, ослабленных разрезами. Решение задачи изгиба прямоугольной пластинки с центральным разрезом приводится в работе [6].

1. Рассмотрим полосу, имеющую периодические нецентральные, параллельные кромкам разрезы (фиг. 1а). Примем, для краткости выкладок, что к обоим краям полосы $y_1 = h_1$ и $y_2 = -h_2$ приложены одинаковые периодические нормальные нагрузки $f(x)$, а края разрезов свободны от внешних воздействий.



Фиг. 1.

В силу симметрии решаем задачу только в области $ABCD$, которую делим на две подобласти $ABGO$ и $OFCD$, приписывая им индексы соответственно (1) и (2).

Имеем следующие граничные условия:

$$\tau_{xy} = 0 \text{ по всей границе } ABGEFCD$$

$$u = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = l \quad (1.1)$$

$$\sigma_y^{(i)} = \begin{cases} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_k x \text{ при } y = y_i \text{ (} 0 \leq x \leq l \text{)} & (i=1,2) \\ 0 & y = 0 \text{ (} a < x \leq l \text{)} \end{cases}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad y_1 = h_1, \quad y_2 = h_2$$

и условия сопряжения на линии $y = 0$

$$\begin{aligned} u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad (0 \leq x < a) \\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad (a < x \leq l) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармонические функции Эйри $\Phi_i(x, y)$ по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}, \quad \sigma_x^{(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} \\ Eu_i = \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \\ Ev_i = \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + Ev_0^{(i)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где νE , ν — упругие постоянные, а $v_0^{(i)} = v_0$, $v_0^{(2)} = 0$.

Исходя из (1.2) и (1.3), функции $\Phi_i(x, y)$ ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, y) = c_i x^2 + d_i y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_k y + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + a_k y (C_k^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_k y + D_k^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_k y)] \cos \alpha_k x \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Удовлетворяя условиям (1.1) и (1.2), получим

$$\begin{aligned} A_k^{(1)} = \left(\gamma_k^{(1)} \lambda_k^{(1)} + \frac{\operatorname{ch}^2 p_k}{2\alpha_k^2} \right) X_k - \left(\beta_k^{(1)} \lambda_k^{(1)} + \frac{\operatorname{ch}^2 p_k}{2\alpha_k^2} \right) Y_k + a_k (\lambda_k^{(1)} \gamma_k^{(2)} - \operatorname{sh} q_k) \\ B_k^{(1)} = \left(\alpha_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 p_k - \frac{\nu_k^{(1)}}{2\alpha_k^2} \right) X_k + \left(\beta_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 p_k - \frac{\nu_k^{(1)}}{2\alpha_k^2} \right) Y_k + a_k (\gamma_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 p_k - \operatorname{ch} p_k) \\ C_k^{(1)} = \nu_k^{(1)} X_k + \beta_k^{(1)} Y_k + a_k \gamma_k^{(1)}, \quad c_1 = c_2 = \frac{a_0}{4}, \quad d_1 = d_2 = \nu \frac{a_0}{4} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} X_k &= \alpha_k^2 (D_k^{(1)} + D_k^{(2)}), & Y_k &= \alpha_k^2 (D_k^{(1)} - D_k^{(2)}) \\ \nu_k^{(1)} &= \frac{1}{2\alpha_k^2 \Delta_k} (\text{sh}^2 p_k \text{sh}^2 q_k - q_k^2 - \lambda_k^{(2)} \nu_k^{(1)}) \\ \beta_k^{(1)} &= \frac{1}{2\alpha_k^2 \Delta_k} [q_k^2 + \text{sh}^2 q_k (\text{sh}^2 p_k - 1) - \lambda_k^{(2)} \nu_k^{(1)}] \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\gamma_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k} [(\text{ch} q_k - \text{ch} p_k) \lambda_k^{(2)} + \text{sh}^2 q_k (\text{sh} p_k + \text{sh} q_k)]$$

$$\Delta_k = -\nu_k^{(2)} \text{sh}^2 p_k - \nu_k^{(1)} \text{sh}^2 q_k; \quad p_k = \alpha_k h_1; \quad q_k = \alpha_k h_2$$

$$\lambda_k^{(1)} = p_k + \text{sh} p_k \text{ch} p_k, \quad \nu_k^{(1)} = p_k - \text{sh} p_k \text{ch} p_k$$

Коэффициенты с индексом (2) получаются из соответствующих формул (1.5) заменой (1) \leftrightarrow (2); $p_k \leftrightarrow -q_k$, учитывая при этом, что надо заменить

$$X_k \leftrightarrow X_k, \quad Y_k \leftrightarrow -Y_k, \quad \nu_k^{(1)} \leftrightarrow \nu_k^{(2)}, \quad \beta_k^{(1)} \leftrightarrow -\beta_k^{(2)}$$

$$\gamma_k^{(1)} \leftrightarrow \gamma_k^{(2)}, \quad \lambda_k^{(1)} \leftrightarrow -\lambda_k^{(2)}, \quad \nu_k^{(1)} \leftrightarrow -\nu_k^{(2)}, \quad \Delta_k \leftrightarrow -\Delta_k$$

2. Для определения новых неизвестных X_k, Y_k (1.6), из смешанных условий на линии $y = 0$, получаем парные уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} [(1 + M_k^{(1)}) X_k + Q_k^{(1)} Y_k] \text{sink}\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \alpha_k F_k^{(1)} \text{sink}\xi \quad (0 \leq \xi < \xi_1) \\ \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + M_k^{(2)}) X_k + Q_k^{(2)} Y_k] \text{sink}\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k F_k^{(2)} \text{sink}\xi \quad (\xi_1 < \xi \leq \pi) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{E\pi}{2l} Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k \text{cosk}\xi = 0 \quad (0 \leq \xi < \xi_1)$$

$$4c_1 - \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + N_k) Y_k + P_k X_k] \text{cosk}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k F_k^{(3)} \text{cosk}\xi \quad (\xi_1 < \xi \leq \pi)$$

где

$$\xi = \frac{\pi x}{l}, \quad \xi_1 = \frac{\pi a}{l}$$

$$\begin{aligned} \Delta_k M_k^{(1)} &= \frac{q_1}{2} (p_k^2 + q_k^2) + p_k q_k - \text{sh} p_k \text{sh} q_k e^{-(p_k + q_k)} - \\ &- \left(\frac{1}{2} - q_k \right) \text{sh}^2 p_k - \left(\frac{1}{2} - p_k \right) \text{sh}^2 q_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_k M_k^{(2)} &= p_k^2 (q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k) + q_k (p_k + \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k) \\ \Delta_k Q_k^{(1)} &= p_k \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k - q_k \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k + \frac{1}{2} (p_k - q_k + \operatorname{sh}^2 q_k - \operatorname{sh}^2 p_k) \\ \Delta_k Q_k^{(2)} &= \operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k (e^{-p_k} - e^{-q_k}) + p_k^2 (q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k) - \\ &\quad - q_k^2 (p_k + \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k) + p_k \operatorname{sh}^2 q_k - q_k \operatorname{sh}^2 p_k \quad (2.2) \\ \Delta_k N_k &= q_k (q_k + 1) \operatorname{sh}^2 p_k + p_k (p_k + 1) \operatorname{sh}^2 q_k + \\ &\quad + \operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k (\operatorname{sh} p_k e^{-q_k} + \operatorname{sh} q_k e^{-p_k}) \\ \Delta_k P_k &= p_k^2 \operatorname{sh}^2 q_k - q_k \operatorname{sh}^2 p_k \\ \Delta_k F_k^{(1)} &= (\operatorname{ch} p_k - \operatorname{ch} q_k) (\operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} p_k - p_k - q_k) \\ \Delta_k F_k^{(2)} &= 2 [(\operatorname{ch} p_k \operatorname{ch} q_k - 1) (q_k \operatorname{sh} p_k - p_k \operatorname{sh} q_k) + \\ &\quad + (\operatorname{ch} p_k - \operatorname{ch} q_k) (\operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k - p_k q_k)] \\ \Delta_k F_k^{(3)} &= 2 (\operatorname{sh} p_k \operatorname{sh}^2 q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{sh}^2 p_k + p_k \operatorname{ch} p_k \operatorname{sh}^2 q_k + q_k \operatorname{sh}^2 p_k \operatorname{sh} q_k) \end{aligned}$$

Поступая аналогично [1], приведем парные уравнения к бесконечным системам

$$\begin{aligned} X_k &= -\frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [M_n^{(1)} X_n + Q_n^{(1)} Y_n - a_n F_n^{(1)}] I_{nk}^{(1)} - \\ &\quad - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [M_n^{(2)} X_n + Q_n^{(2)} Y_n - a_n F_n^{(2)}] I_{nk}^{(2)} \\ Y_k &= -4c_1 y_k (\cos^2 \xi_1) - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [N_n Y_n + P_n X_n + a_n F_n^{(3)}] K_{nk} \quad (2.3) \end{aligned}$$

Все уравнения системы (2.1), кроме третьего, удовлетворяются. Подставляя Y_k в третье уравнение, после некоторых преобразований получим

$$EY_0 = -\frac{16c_1 l}{\pi} \ln \left(\sin \frac{\xi_1}{2} \right) + \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [P_k X_k + N_k Y_k + a_k F_k^{(3)}] \frac{y_k (\cos^2 \xi_1)}{k}$$

где

$$I_{nk}^{(1)} = \int_0^{\xi_1} y_k (\cos \theta) y_n (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 I_{nk}^{(1)} &= \int_{\xi_1}^{\pi} y_k(\cos\theta) y_n(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
 K_{nk} &= \int_{\xi_1}^{\pi} z_k(\cos\theta) z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$y_k(x) = P_k(x) + P_{k-1}(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Значения интегралов (2.4), а также интегральные представления для функций $y_k(x)$, $z_k(x)$ приведены в работе [1].

Из (2.2) видно, что коэффициенты $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$; N_k , P_k , $Q_k^{(1)}$, $Q_k^{(2)}$ имеют порядок $O(k^2 e^{-2\epsilon k})$, а $F_k^{(1)}$, $F_k^{(2)}$, $F_k^{(3)}$ — $O(e^{-k})$, где $\epsilon = \min\left(\frac{h_1}{l}, \frac{h_2}{l}\right) > 0$.

Система (2.3) квази-вполне регулярна, так как упомянутые коэффициенты имеют порядок $O(k^{-1})$ [1].

3. Напряжения и перемещения во всей области определяются при помощи (1.3). Ряды, входящие в формулы напряжений на линии $y=0$, плохо сходятся из-за особенности в точке $\xi = \xi_1$. Выделяя главные части этих рядов, получим

$$\sqrt{2} \tau_x \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = \frac{K_x \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos \xi - \cos \xi_1}} - \cos \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k T_k^{(1)} \int_{\xi}^{\xi_1} \frac{y_k(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \xi - \cos \theta}} \quad (\xi < \xi_1) \quad (3.1)$$

$$\sqrt{2} \tau_{xy} \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = \frac{K_x \sin \frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos \xi - \cos \xi_1}} + \sin \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k T_k^{(2)} \int_{\xi}^{\xi_1} \frac{z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \xi - \cos \theta}} \quad (\xi < \xi_1)$$

где

$$K_x = 4c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} z_k(\cos \xi_1)$$

$$K_y = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(2)} y_k(\cos \xi_1)$$

(3.2)

$$2T_k^{(1)} = P_k X_k + N_k Y_k + a_k F_k^{(3)}$$

$$2T_k^{(2)} = (M_k^{(2)} - M_k^{(1)}) X_k + (Q_k^{(2)} - Q_k^{(1)}) Y_k + (F_k^{(1)} - F_k^{(2)}) a_k$$

Быстрая сходимость рядов в формулах (3.1) делает их удобными для вычислений во всем интервале ($0 < \xi < \xi_1$). В точке $\xi = \xi_1$ вторые слагаемые исчезают и σ_y и τ_{xy} имеют особенности с коэффициентами

$$K_x^* = K_x \cos \frac{\xi_1}{2}, \quad K_y^* = K_y \sin \frac{\xi_1}{2}$$

Вследствие деформации границы разреза расходятся на величину

$$\delta \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = v_1 \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) - v_2 \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) \quad (3.3)$$

которая представится формулой

$$\begin{aligned} \frac{\pi E}{2l} \delta \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = & 8c_1 \ln \frac{\sin \frac{\xi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\cos \xi_1 - \cos \xi}}{\sin \frac{\xi_1}{2}} + \\ & + \sqrt{2} \sin \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} \int_0^{\xi} \frac{z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \xi_1}} \quad (\xi > \xi_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таблица 1

$\xi_1 = \frac{\pi}{3}$	$\xi = 0$	$\xi = \frac{\pi}{4}$	$\xi = \frac{\pi}{3}$
σ_y/q	3.1982	8.8055	∞
τ_{xy}/q	0	1.3156	∞
$K_x^* = 1.065; K_y^* = 0.2709; \delta(l, 0) = 7.9627 \frac{2lq}{E\pi}$			

Рассмотрим полосу конкретных размеров

$$\frac{h_1}{l} = \frac{1}{2}, \quad \frac{h_2}{l} = 1$$

под действием растягивающей силы

$$f \left(\xi \frac{l}{\pi} \right) = \begin{cases} 0 & \left(0 < \xi < \frac{\pi}{2} \right) \\ q & \left(\frac{\pi}{2} < \xi < \pi \right) \end{cases}$$

В этом случае система (2.3), как показывают вычисления, вполне регулярна $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{pk}| < 0.55 \right)$.

Значения величин $\alpha_y \left(\frac{l}{\pi} \xi, 0 \right)$, $\tau_{xy} \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right)$, $\delta \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right)$, K_σ^* и K_τ^* , вычисленные для двух случаев длины разреза $\pi - \xi_1$, приведены в табл. 1, 2.

Таблица 2

$\xi_1 = \frac{2\pi}{3}$	$\xi = 0$	$\xi = \frac{\pi}{3}$	$\xi = \frac{\pi}{2}$	$\xi = \frac{2}{3}\pi$
α_y/q	2.3157	2.4232	1.9820	∞
τ_{xy}/q	0	-0.0489	-0.0257	∞

$K_\sigma^* = 0.7246$; $K_\tau^* = 0.0518$; $\delta(l, 0) = 2.5212 \frac{2lq}{E\pi}$

Аналогичным образом можно решить задачу для полосы, имеющей периодический элемент $A'B'C'D'$ с несколькими разрезами (фиг. 16).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 VI 1970

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

ՈՉ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՇԵՐՏԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. մ փ ո փ ու լ մ

Գիտարկվում է ոչ կենտրոնական, եզրերին զուգահեռ պարբերական կտրվածքների ունեցող շերտի առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը: Խնդիրը բերվում է բվադի-լիսովին սեպուլյար դժաշին հավասարումների անվերջ սիստեմից անորոշ զորձակիցների գտնելուն:

Բերվում է թվային օրինակ:

PLANE PROBLEM FOR A STRIP WITH NONCENTRAL SLITS

A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The plane problem of the theory of elasticity for a strip with noncentral periodical slits parallel to edges under a periodical load is considered.

The solution is reduced to finding the unknown coefficients from quasi-regular infinite systems of linear algebraic equations. A numerical example is presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Боблоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
3. Sneddon I. N., Srivastav R. R. The Stress in the Vicinity of an Infinite Row of Collinear Cracks in an Elastic Body. Proc. Roy. Soc. Edin. A, vol. LXVII, Pt. № 1, 1965.
4. Пальцин Н. В. Напряжения в упругом слое, ослабленном двумя круговыми щелями. Прикл. механ., т. 3, вып. 2, 1967.
5. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. журнал МТИ, № 2, 1968, 115—122.
6. Сапонджян О. М. Об одном случае изгиба тонкой прямоугольной плиты. Докл. АН АрмССР, т. XXXVII, № 3, 1963.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Изд. физ.-мат. литературы, М., 1959.