ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

А. П. МЕЛКОНЯН

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Осесимметричные смешанные задачи для цилиндра конечной длины, когда граничные условия на одной из торцевых плоскостей заданы в смешанном виде, а на другой торцевой плоскости заданы напряжения, рассмотрены в работе [3].

Плоская смешанная задача теории упругости для прямоугольника, заделанного в стенку обоими концами на некоторую глубину, различную для верхней и нижней плоскостей, в случае симметричных граничных условий рассмотрена в работе [4].

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача теории упругости для цилиндра конечной длины, когда граничные условия по верхней и нижней торцевым плоскостям заданы в смешанном виде.

Решение задачи представлено в виде рядов Фурье-Дини, коэффициенты которых определяются из системы двух парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя. Далее задача сведена к решению совокупности двух бесконечных линейных квазивполне регулярных систем алгебраических уравнений, свободные члены которых стремятся к нулю. Получены формулы для контактных напряжений с выделенной особенностью и для перемещений вне контакта.

§ 1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости об упругом равновесии круглого цилиндра конечной длины, когда на кольцевой области (наружный диаметр которой совпадает с диаметром цилиндра) торцевых плоскостей заданы нормальные перемещения а на остальной части — напряжения.

Предполагаем, что на цилиндрической поверхности известны касательные напряжения и нормальные перемещения (фиг. 1).

Граничные условия для вышесформулированной задачи запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\tau_{zr}(R,\ z) = u_r(R,\ z) = 0 \qquad -h \leqslant z \leqslant h \\ &\tau_{rz}(r,\ \pm h) = 0 \qquad 0 \leqslant r \leqslant R \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_z(r,\ -h) = -f_1(r) \qquad 0 < r < a_1 \\ &u_z(r,\ -h) = \eta_1(r) \qquad a_1 < r < R \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_z(r,\ h) = -f_2(r) \qquad 0 < r < a_2 \\ &u_z(r,\ h) = \eta_2(r) \qquad a_2 < r < R \end{aligned} \tag{1.3}$$

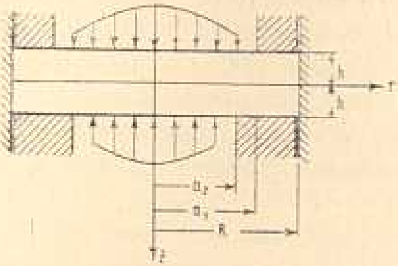
где $2h$ — толщина, R — радиус цилиндра, $f_i(r)$ — интегрируемые, а $\eta_i(r)$ — кусочно-гладкие функции ($i=1,\ 2$).

Бигармоническую функцию А. Лява для рассматриваемой задачи представим в виде ряда Фурье-Дини [3, 6—8]

$$\Phi(r,\ z)=z\,(B_0z^2+C_0z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\operatorname{sh}\lambda_kz+B_k\operatorname{ch}\lambda_kz+\lambda_kz\,(C_k\operatorname{sh}\lambda_kz+D_k\operatorname{ch}\lambda_kz)\right]J_0(\lambda_kr) \tag{1.4}$$

где λ_k — неотрицательные корни уравнения $J_1(xR)=0$, $J_i(x)$ — функции Бесселя i — порядка, первого рода с действительным аргументом



Фиг. 1.

Из выражений компонент напряжений и перемещений, которые здесь не приводятся (формулы (1.5) в [3]), следует, что первые условия $\tau_{zr}(R,\ z)=u_r(R,\ z)=0$ из граничных условий (1.1) удовлетворяются тождественно, а условия $\tau_{rz}(r,\ \pm h)=0$ приводят к зависимостям

$$\begin{aligned}A_k&=-(2\nu+\beta_k\operatorname{cth}\beta_k)\,D_k\\B_k&=-(2\nu+\beta_k\operatorname{th}\beta_k)\,C_k\end{aligned} \tag{1.5}$$

где ν — коэффициент Пуассона, $\beta_k=\lambda_kh$.

Подставив найденные с помощью (1.4) выражения компонент напряжений и перемещений в граничные условия (1.2) и (1.3) и далее учитывая (1.5), после некоторых преобразований получим следующую систему из двух парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя:

$$\frac{\alpha_0}{2}\left(X_0^{(1)}-X_0^{(2)}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left[(1-N_k)\,X_k^{(1)}-M_kX_k^{(2)}\right]J_0(\lambda_kr)=-f_1(r) \tag{1.6}$$

$$(0<r<a_1)$$

$$X_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(1)}J_0(\lambda_kr)=\frac{G}{1-\nu}\,\eta_1(r),\qquad (a_1<r<R)$$

$$\frac{\alpha_0}{2}(X_0^{(1)}-X_0^{(2)})+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k[(1-N_k)X_k^{(2)}-M_kX_k^{(1)}]J_0(\lambda_k r)=-f_2(r)$$
$$(0<r<a_2)$$

$$X_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(2)}J_0(\lambda_k r)=\frac{G}{1-\nu}\eta_2(r),\quad (a_2<r<R) \tag{1.7}$$

где G — модуль сдвига.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha_0=-\frac{2(1-\nu)^2}{(1-2\nu)h},\quad X_0^{(i)}=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left|C_0+(-1)^i 3hB_0\right|$$

$$X_k^{(i)}=\lambda_k^2[C_k\operatorname{ch}\beta_k+(-1)^i D_k\operatorname{sh}\beta_k],\quad k\neq 0,\quad (i=1,\ 2) \tag{1.8}$$

$$M_k=\frac{\operatorname{sh}2\beta_k+2\beta_k\operatorname{ch}2\beta_k}{\operatorname{sh}^2 2\beta_k},\quad N_k=-\frac{1+4\beta_k-e^{-4\beta_k}}{2\operatorname{sh}^2 2\beta_k}$$

Определив $X_k^{(1)}$ и $X_k^{(2)}$ из системы парных рядов-уравнений (1.6) и (1.7), далее можно вычислить компоненты напряжений и перемещений по следующим формулам:

$$\sigma_r=\frac{(1-\nu)\nu}{(1-2\nu)h}(X_0^{(2)}-X_0^{(1)})+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\operatorname{sh}^2 2\beta_k}\{X_k^{(1)}[2\beta_k S_1(\beta_k,\ z)-$$
$$-T_1(\beta_k,\ z)\operatorname{sh}2\beta_k]+X_k^{(2)}[-2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)+T_2(\beta_k,\ z)\operatorname{sh}2\beta_k]\}J_0(\lambda_k r)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\operatorname{sh}^2 2\beta_k}\{X_k^{(1)}[2\beta_k S_1(\beta_k z)-[T_1(\beta_k z)-2\nu\operatorname{ch}(\lambda_k z-\beta_k)]\operatorname{sh}2\beta_k]+$$
$$+X_k^{(2)}[-2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)+[T_2(\beta_k,\ z)-2\nu\operatorname{ch}(\lambda_k z+\beta_k)]\operatorname{sh}2\beta_k]\}\frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r}$$

$$\sigma_\theta=\frac{(1-\nu)\nu}{(1-2\nu)h}(X_0^{(2)}-X_0^{(1)})+2\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\operatorname{sh}2\beta_k}[X_k^{(2)}\operatorname{ch}(\lambda_k z+\beta_k)-$$
$$-X_k^{(1)}\operatorname{ch}(\lambda_k z-\beta_k)]J_0(\lambda_k r)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\operatorname{sh}^2 2\beta_k}\{X_k^{(1)}[2\beta_k S_1(\beta_k,\ z)-$$
$$-[T_1(\beta_k,\ z)-2\nu\operatorname{ch}(\lambda_k z-\beta_k)]\operatorname{sh}2\beta_k]+X_k^{(2)}[-2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)+$$
$$+[T_2(\beta_k,\ z)-2\nu\operatorname{ch}(\lambda_k z+\beta_k)]\operatorname{sh}2\beta_k]\}\frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r}$$

$$\sigma_z=\frac{\alpha_0}{2}(X_0^{(1)}-X_0^{(2)})-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\operatorname{sh}^2 2\beta_k}\{[T_1(\beta_k,\ z)\operatorname{sh}2\beta_k+2\beta_k S_1(\beta_k,\ z)]X_k^{(1)}-$$

$$-[T_4(\beta_k,\ z)\,\mathrm{sh}2\beta_k+2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)]\,X_k^{(2)}\}\,J_0(\lambda_k r)$$

$$\tau_{rz}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k}\{[2\beta_k H_1(\beta_k,\ z)-\lambda_k z\,\mathrm{ch}(\lambda_k z-\beta_k)\,\mathrm{sh}2\beta_k]\,X_k^{(1)}+$$

$$+X_k^{(2)}[-2\beta_k H_2(\beta_k,\ z)+\lambda_k z\,\mathrm{ch}(\lambda_k z+\beta_k)\,\mathrm{sh}2\beta_k]\}\,J_1(\lambda_k r)$$

$$u_r=\frac{1}{G}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k}\{X_k^{(1)}[2\beta_k S_1(\beta_k,\ z)-[T_3(\beta_k,\ z)-$$

$$-2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z-\beta_k)]\,\mathrm{sh}2\beta_k]+X_k^{(2)}[-2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)+$$

$$+[T_2(\beta_k,\ z)-2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z+\beta_k)]\,\mathrm{sh}2\beta_k]\}\,J_1(\lambda_k r) \tag{1.9}$$

$$u_z=\frac{1-\nu}{2G}\left[\left(1+\frac{z}{h}\right)X_0^{(2)}+\left(1-\frac{z}{h}\right)X_0^{(1)}\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k}\{X_k^{(1)}[2\beta_k H_1(\beta_k,\ z)-Q_1(\beta_k,\ z)\,\mathrm{sh}2\beta_k]+$$

$$+X_k^{(2)}[-2\beta_k H_2(\beta_k,\ z)+Q_2(\beta_k,\ z)\,\mathrm{sh}2\beta_k]\}\,J_0(\lambda_k r)$$

здесь введены обозначения

$$S_i(\beta_k,\ z)=\mathrm{ch}^2\beta_k\,\mathrm{ch}\lambda_k z+(-1)^i\,\mathrm{sh}^2\beta_k\,\mathrm{sh}\lambda_k z \qquad (i=1,\ 2)$$

$$H_i(\beta_k,\ z)=\mathrm{ch}^2\beta_k\,\mathrm{sh}\lambda_k z+(-1)^i\,\mathrm{sh}^2\beta_k\,\mathrm{ch}\lambda_k z \qquad (i=1,\ 2)$$

$$Q_i(\beta_k,\ z)=\lambda_k z\,\mathrm{ch}[\lambda_k z+(-1)^i\beta_k]-2(1-\nu)\,\mathrm{sh}[\lambda_k z+(-1)^i\beta_k] \quad (i=1,\ 2) \tag{1.10}$$

$$T_i(\beta_k,\ z)=-\sqrt{2}\left|\cos\frac{(2i-1)\pi}{4}\right|\lambda_k z\,\mathrm{sh}[\lambda_k z+(-1)^i\beta_k]+$$

$$+\mathrm{ch}[\lambda_k z+(-1)^i\beta_k], \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

В частном случае, когда $a_1=a_2=a$, то есть когда круглая толстая плита по верхней и нижней торцевой плоскости заделана в стенку на одну и ту же глубину $(R-a)$, из (1.6) и (1.7) получится следующая система двух независимых парных рядов-уравнений:

$$-\alpha_0 q_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(1-R_k^{(1)})\,q_k^{(1)}J_0(\lambda_k r)=-\frac{f_1(r)+f_2(r)}{2}=f_1^*(r), \quad (0<r<a)$$

$$q_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}q_k^{(1)}J_0(\lambda_k r)=\frac{G}{2(1-\nu)}[\varphi_2(r)-\varphi_1(r)]=\varphi_1^*(r), \quad (a<r<R) \tag{1.11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - R_k^{(2)}) q_k^{(2)} J_0(\lambda_k r) = \frac{f_1(r) - f_2(r)}{2} = f_2^*(r), \quad (0 < r < a)$$

$$q_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(2)} J_0(\lambda_k r) = \frac{G}{2(1-\nu)} [\eta_1(r) + \eta_2(r)] = \eta_2^*(r), \quad (a < r < R) \tag{1.12}$$

где

$$q_k^{(i)} = \frac{1}{2} [X_k^{(2)} + (-1)^i X_k^{(1)}], \quad (k = 0, 1, 2 \cdots) \quad (i = 1, 2)$$

$$1 - R_k^{(1)} = 1 - N_k + M_k = \frac{2\beta_k + \mathrm{sh} 2\beta_k}{2 \mathrm{sh}^2 \beta_k} \tag{1.13}$$

$$1 - R_k^{(2)} = 1 - N_k - M_k = \frac{\mathrm{sh} 2\beta_k - 2\beta_k}{2 \mathrm{ch}^2 \beta_k}$$

§ 2. Парные ряды-уравнения типа (1.11) и (1.12) рассматривались в работах [1, 2]. Здесь, следуя [2, 3], решение системы из двух парных рядов-уравнений (1.6) и (1.7) сведено к совокупности двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Показано, что получаемая система не только квази-вполне регулярна, но и сумма модулей коэффициентов, а также свободные члены с возрастанием индекса стремятся к нулю.

Для решения (1.6) и (1.7) разложим функции $\frac{G}{1-\nu} \eta_i(r)$ в ряды Фурье-Дини [5]

$$\frac{G}{1-\nu} \eta_i(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(i)} J_0(\lambda_k r)$$

$$g_k^{(i)} = \frac{2G}{(1-\nu) R^2 J_0^2(\lambda_k R)} \int_0^R r \eta_i(r) J_0(\lambda_k r) \, dr, \quad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

неизвестные $X_k^{(i)}$ ищем в виде [2, 3]

$$X_k^{(i)} = g_k^{(i)} + \frac{1}{(\lambda_k a_i)^{\frac{3}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(i)} J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i) \tag{2.2}$$

при этом случай $k = 0$ получается предельным переходом

$$X_0^{(i)} = \lim_{k \to 0} X_k^{(i)} = g_0^{(i)} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, b_0^{(i)}, \quad (\lambda_0 = 0) \tag{2.3}$$

Разложим функцию

$$\Psi_i(r) = \begin{cases} (a_i^2-r^2)^{\frac{1}{2}} F\left(-s,\ s+\frac{3}{2};\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right) & 0<r<a_i \\ 0 & a_i<r<R \end{cases} \tag{2.4}$$

в ряд Фурье-Дини

$$\Psi_i(r) = \frac{(2a_i)^{\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}{R^2\Gamma(1+s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^{\frac{3}{2}}\,J_0^2(\lambda_k R)}$$

$$(s\geqslant 0) \quad (i=1,\ 2)$$

Нетрудно убедиться, что в силу (2.2) вторые уравнения системы парных рядов-уравнений (1.6) и (1.7) удовлетворяются тождественно. Следовательно, $b_m^{(i)}$ должны быть выбраны так, чтобы $X_k^{(i)}$ удовлетворяли соответственно первым уравнениям (1.6) и (1.7).

Подставив (2.2) в первые уравнения системы (1.6) и (1.7), затем умножая на $r\,(a_i^2-r^2)^{\frac{1}{2}} F\left(-s,\ s+\frac{3}{2};\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right)$ и далее интегрируя по r в пределах от 0 до a_i, после некоторых преобразований получим

$$\alpha_0\left\{[g_0^{(3-i)}-g_0^{(i)}]+\frac{b_0^{(3-i)}-b_0^{(i)}}{3\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right\}\frac{2a_i^3\,\delta_{0s}}{3\sqrt{2\pi}\,R^2}+$$

$$+\frac{2a_i^{\frac{3}{2}}}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-N_k)\,g_k^{(i)}-M_k\,g_k^{(3-i)}\right]\frac{J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}}+$$

$$+\frac{2}{R^2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(i)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-N_k)\,J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)}- \tag{2.5}$$

$$-\frac{2}{R^2}\left(\frac{a_i}{a_{3-i}}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(3-i)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k\,J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_{3-i})\,J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)}=$$

$$=(-1)^{i-1}\frac{\sqrt{2}\,\Gamma(1+s)}{R^2\Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)}\int_0^{a_i} r f_2(r)\,(a_i^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times F\left(-s,\ s+\frac{3}{2};\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right)dr \quad (i=1,\ 2)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ — гипергеометрический ряд, δ_{ms} — символ Кронекера.

При получении (2.5) было использовано значение интеграла

$$\int_0^{a_i} r\,(a_i^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} F\left(-s,\ \frac{3}{2}+s;\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right) J_0(\lambda_k r)\,dr =$$

$$= \frac{a_i^{\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)}{2\left(\frac{\lambda_k a_i}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+s)} J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i) \tag{2.6}$$

Выражение (2.5) представляет собой совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений первого рода относительно неизвестных $b_m^{(1)}$ и $b_m^{(2)}$.

Пользуясь значением ряда [2]

$$\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} = \frac{\delta_{ms}}{4s+3} -$$

$$- \frac{2(-1)^{m+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) dy \tag{2.7}$$

из (2.5) для определения $b_m^{(i)}$ окончательно получим следующую совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_s^{(1)}(1-\eta_1\delta_{0s}) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{ms}^{(1)} b_m^{(1)} - \eta_1\delta_{0s}\, b_0^{(2)} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{ms}^{(1)} b_m^{(2)} + t_s^{(1)} \\ b_s^{(2)}(1-\eta_2\delta_{0s}) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{ms}^{(2)} b_m^{(2)} - \eta_2\delta_{0s}\, b_0^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{ms}^{(2)} b_m^{(1)} + t_s^{(2)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$(s = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \cdots)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\eta_i = \frac{2(4s+3)\,\alpha_0 a_i^3}{9\pi R^2}$$

$$c_{ms}^{(i)} = 2(4s+3)\gamma_i\left[\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{m+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) dy\right]$$

$$d_{ms}^{(i)} = \frac{2(4s+3)}{R^2}\left(\frac{a_i}{a_{3-i}}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_{3-i}) J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)}$$

$$t_s^{(i)} = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{2}\,(4s+3)\Gamma(1+s)}{R^2\Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)} \int_0^{a_i} r f_i(r)(a_i^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(-s, \frac{3}{2}+s;\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right) dr -$$

$$-\frac{2(4s+3)a_i^{\frac{3}{2}}}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-N_k) g_k^{(i)} - M_k g_k^{(3-i)}\right] \frac{J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}} -$$

$$-\frac{2(4s+3)\alpha_0\delta_{0s} a_i^3}{3\sqrt{2\pi} R^2}\left[g_0^{(3-i)} - g_0^{(i)}\right] \tag{2.9}$$

где $i = 1,\ 2;\ I_n(x),\ K_n(x)$ — модифицированные цилиндрические функции соответственно первого и второго рода.

Решение уравнений (1.11) и (1.12), как частный случай, может быть получено из решений (2.8) с учетом условия $a_1 = a_2 = a$, (1.13) и (2.9) и приводится к следующим бесконечным системам линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (1 - 2\eta_1\delta_{0s})\, x_s^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ms}^{(1)} x_m^{(1)} + \omega_s^{(1)} \\ x_s^{(2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ms}^{(2)} x_m^{(2)} + \omega_s^{(2)} \qquad (s = 0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots) \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$q_k^{(i)} = \frac{g_k^{(3-i)} + (-1)^i g_k^{(i)}}{2} + \frac{1}{(\lambda_k a)^{\frac{3}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} x_m^{(i)} J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a)$$

$$q_0^{(i)} = \frac{g_0^{(3-i)} + (-1)^i g_0^{(i)}}{2} + \frac{2x_0^{(1)}}{3\sqrt{2\pi}}; \qquad (i = 1,\ 2)$$

$$\gamma_{ms}^{(i)} = 2(4s+3)\left\{\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(i)} J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a) J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{m+s}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{ay}{R}\right) I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{ay}{R}\right) dy\right\} \tag{2.11}$$

$$\omega_s^{(i)} = \frac{2(4s+3)}{R^2}\left\{\frac{\alpha_0\sqrt{2}\ a^{3}\delta_{0s}}{3\sqrt{\pi}}\delta_{1i} + \frac{\Gamma(1+s)}{\sqrt{2}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)}\times\right.$$

$$\times\int_0^a r f_i^*(r)(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}F\left(-s, \frac{3}{2}+s;\ 1;\ \frac{r^2}{a^2}\right)dr -$$

$$\left.-a^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-R_k^{(i)})\left[g_k^{(3-i)}+(-1)^i g_k^{(i)}\right]J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a)}{2\lambda_k^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad (i=1,\ 2)$$

Докажем теперь, что система (2.8) квази-вполне регулярна. Покажем, что сумма модулей коэффициентов бесконечной системы (2.8) при возрастании индекса стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}|c_{ms}^{(i)}| + \sum_{m=0}^{\infty}|d_{ms}^{(i)}|\right\} = 0 \quad (i=1,\ 2) \tag{2.12}$$

Для первой суммы будем иметь

$$\sum_{m=0}^{\infty}|c_{ms}^{(i)}| = 2(4s+3)\left\{\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k|J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)|}{\lambda_k^{\frac{3}{2}}J_0^2(\lambda_k R)}\sum_{m=0}^{\infty}|J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)| + \right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{yI_1(y)}I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty}I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right)\right]dy\right\} \tag{2.13}$$

Суммы по m в выражении (2.13) сходятся абсолютно и равномерно по λ_k и y соответственно, поэтому эти суммы в окрестности точки $\lambda_k = 0$, $(y=0)$ стремятся к нулю как $O(\lambda_k^{\frac{3}{2}})$, $O(y^{\frac{3}{2}})$ [3]. В случае больших значений λ_k и y первая сумма имеет порядок $O(\lambda_k^{-\frac{1}{2}})$, а вторая сумма возрастает как $\dfrac{\exp\left(\frac{ay}{R}\right)}{\sqrt{y}}$. Из вышеизложенного следует, что ряд по k и несобственный интеграл по y сходятся абсолютно и равномерно по параметру s и, следовательно, выражение (2.13) является аналитической функцией по s. Так как выражения, находящиеся под знаком суммы и несобственного интеграла по параметру s стремятся к нулю, следовательно, и (2.13) стремится к нулю при возрастании s, а значит имеет место предел (2.12), откуда и следует, что система (2.8) квази-вполне регулярна.

Известно, что полиномы Якоби при возрастании индекса имеют порядок $O(s^{-\frac{1}{2}})$. Свободные члены бесконечной системы (2.8) являются коэффициентами Фурье кусочно-непрерывных функций относительно полиномов Якоби, следовательно, свободные члены бесконечной системы стремятся к нулю как $O(s^{-1})$. На основании вышеизложенного к совокупности бесконечных систем (2.8) может быть применен метод последовательных приближений.

Вычислим значения первых рядов систем (1.6) и (1.7) соответственно в областях $(a_i < r < R)$ и значения вторых рядов тех же систем в области $(0 < r < a_i)$, то есть вычислим контактные напряжения и перемещения вне контакта.

Подставив значения $X_k^{(i)}$ по формуле (2.2) во вторые ряды (1.6) и (1.7) и далее пользуясь (2.4), после некоторых преобразований получим

$$\frac{G}{1-\nu} u_z [r, \ (-1)^i h] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{G}{1-\nu} \eta_i(r) + \dfrac{R^2 (a_i^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}\, a_i^3} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{b_m^{(i)} \Gamma(1+m)}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+m\right)} \times \\ \qquad \times F\left(-m, \ m+\dfrac{3}{2}; \ 1; \ \dfrac{r^2}{a_i^2}\right) \ \text{при} \ (0 < r < a_i) \\ \dfrac{G}{1-\nu} \eta_i(r); \quad \text{при} \ (a_i < r < R) \end{cases} \qquad (2.14)$$

Нетрудно заметить, что ряд, входящий в (2.14), непрерывен в окрестности $r = a_i$.

Теперь получим формулы, удобные для вычислений контактных напряжений $\sigma_z(r, \ \pm h)$. Из (1.6) и (1.7) имеем

$$\sigma_z [r, \ (-1)^i h] = \frac{\alpha_0}{2} [X_0^{(1)} - X_0^{(2)}] + (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [N_k X_k^{(i)} + M_k X_k^{(3-i)}] \times$$

$$\times J_0(\lambda_k r) + (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k^{(i)} J_0(\lambda_k r) \quad (i = 1, \ 2) \qquad (2.15)$$

Первый ряд в (2.15) сходится абсолютно и равномерно по r, так как N_k и M_k имеют порядок $O(ke^{-2k})$. Поэтому сумма будет непрерывной функцией аргумента r. Улучшим сходимость только последнего ряда, выделив при этом особенность. Подставив значения $X_k^{(i)}$ в последнюю сумму (2.15) и далее пользуясь значением ряда [2]

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_k R)^{\frac{1}{2}}\,J_0^2(\lambda_k R)}=\int_0^{\infty}J_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i}{R}x\right)J_0\left(\frac{r}{R}x\right)\sqrt{x}\,dx-$$

$$-\frac{2}{\pi}(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{y}\,K_1(y)}{I_1(y)}I_0\left(\frac{r}{R}y\right)I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i}{R}y\right)dy \qquad (2.16)$$

где

$$\int_0^{\infty}J_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i}{R}x\right)J_0\left(\frac{r}{R}x\right)\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,(-1)^{m+1}\left(\frac{a_i}{R}\right)^{2m+\frac{3}{2}}\Gamma^2\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{2m+3}\Gamma\left(2m+\frac{5}{2}\right)}\left(1-\frac{a_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times F\left(m+1,\ m+1;\ 2m+\frac{5}{2};\ \frac{a_i^2}{r^2}\right) \qquad (2.17)$$

при $(a_i<r<R)$

окончательно получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k X_k^{(i)}J_0(\lambda_k r)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k g_k^{(i)}J_0(\lambda_k r)+$$

$$+\frac{\sqrt{R}}{2a_i^{\frac{3}{2}}}\sum_{m=0}^{\infty}b_m^{(i)}\left\{\frac{\sqrt{2}\,(-1)^{m+1}\left(\frac{a_i}{R}\right)^{2m+\frac{3}{2}}\Gamma^2\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{2m+3}\Gamma\left(2m+\frac{5}{2}\right)}\times\right.$$

$$\times\left(1-\frac{a_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}F\left(m+1,\ m+1;\ 2m+\frac{5}{2};\ \frac{a_i^2}{r^2}\right)-$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{I_1(y)}\,I_0\left(\frac{r}{R}y\right)I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_iy}{R}\right)\sqrt{y}\,dy\right\} \qquad (2.18)$$

$(a_i<r<R)\quad (i=1,\ 2)$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 VI 1970

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրը վերջավոր երկարության գլանի համար, երբ եզրային պայմանները նրա վերին և ներքին հիմքերի վրա տրված են խառը տեսքով։ Ենթադրված է, որ գլանային մակերևույթի վրա հայտնի են շոշափող լարումները և նորմալ տեղափոխությունները։

Խնդրի լուծումը ներկայացված է Ֆուրյե-Դինիի շարքերի միջոցով, որոնց գործակիցները որոշվում են Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող երկու զույգ շարք-հավասարումների սիստեմից։ Հետագայում խնդիրը բերված է երկու գծային, քվազի լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը, երբ նրանց ազատ անդամները ձգտում են զրոյի։ Ստացված են արտահայտություններ լարումների և տեղափոխությունների համար։ Ստացված են նաև բանաձևեր կոնտակտային լարումների (եզակիության անջատումով) և կոնտակտից դուրս գտնվող կետերի տեղափոխությունների համար։

ON A MIXED AXIALSYMMETRICAL PROBLEM OF ELASTICITY FOR A FINITE LENGTH CYLINDER

A. P. MELKONIAN

Summary

An axialsymmetric problem of elasticity for a cylinder of finite length with given mixed boundary conditions at the upper and lower but-end planes is considered. The shear stresses and normal displacements are assumed to be known at the cylinder surface.

The solution of the problem is presented in the Fourier-Dyni's series form, whose coefficients are determined from the two systems of dual series-equations, containing Bessel's functions.

Further, the problem is reduced to the solution of the totality of two infinite linear quasi-quite regular systems of algebraic equations whose free terms tend to zero.

The expressions for stresses and displacements as well as formulae for contact stresses with closed singularity and displacements out of contact are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sneddon I. N.* and *Srivastav R. P.* Dual Series Relations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Math. and Physical Sciences), vol. LXVI, part III (Nos. 14, 15, 16, 17), 1964.
2. *Cooke I. C., Tranter C. I.* Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XII, part 2, August 1959, Oxford.
3. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
5. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I и II, ИЛ, 1949.
6. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XIX, № 1, 1954.
7. *Абрамян Б. Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XXVI, № 2, 1958.
8. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. Изв. АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XI, № 4, 1958.