ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

А. А. ОГАНЕСЯН, К. Х. ШАХБАЗЯН

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА ПО ЗАДАННЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ НОРМАЛИ ШАТУННОЙ ПЛОСКОСТИ

Синтезу пространственных четырехзвенных механизмов по положениям шатунной плоскости посвящены работы ряда авторов [1] — [4], в которых они, строго фиксируя положения шатунной плоскости, решают задачу синтеза только по трем заданным положениям шатунной плоскости.

В данной статье задача синтеза указанного механизма отличается как постановкой, так и методом решения.

В статье положения шатунной плоскости не фиксируются, задаются только направления нормали, наикратчайшее расстояние h и угол β' между скрещивающимися осями вращательных пар. При такой постановке становится возможным решить задачу синтеза по четырем и пяти направлениям нормали шатунной плоскости. Причем задача решается методом аналитической геометрии, с помощью которого оцениваются численные значения полученных результатов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пространственный четырехзвенный механизм O_1ABCD (фиг. 1), где кривошип AB образует со стойкой первую вращательную пару, ось которой совпадает с неподвижной координатной осью oy. Центр вращательной пары B совпадает с началом координатных осей. Шатун BC образует с кривошипом AB вторую вращательную пару. Оси вращательных пар скрещиваются. Коромысло CD с шатуном и со стойкой образует сферические пары.

Решим задачу синтеза указанного четырехзвенника по следующим условиям:

1. Заданы направления нормали шатунной плоскости N_i ($\cos\alpha_{\text{п}i}$, $\cos\beta_{\text{п}i}$, $\cos\gamma_{\text{п}i}$) (фиг. 2).

Положение шатунной плоскости задается взаимно перпендикулярными пересекающимися прямыми AB и BC (фиг. 1).

2. Даны угол β' и кратчайшее расстояние h между двумя скрещивающимися прямыми AB и oy. При выборе угла β' нужно учесть, что $\beta' + \beta_{\text{п}_i} \geqslant 90^\circ$.

3. Дан радиус вращения r точки B.

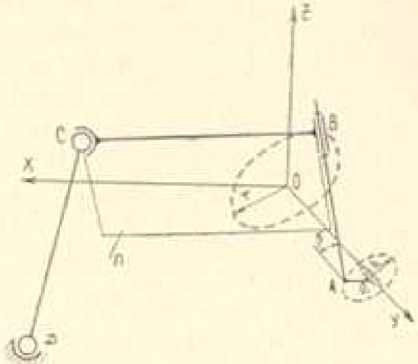
Направляющие косинусы прямой AB определяем по формулам:

$$\cos\alpha_i' \cos\alpha_{IIi} + \cos\beta_i' \cos\beta_{IIi} + \cos\gamma_i' \cos\gamma_{IIi} = 0$$

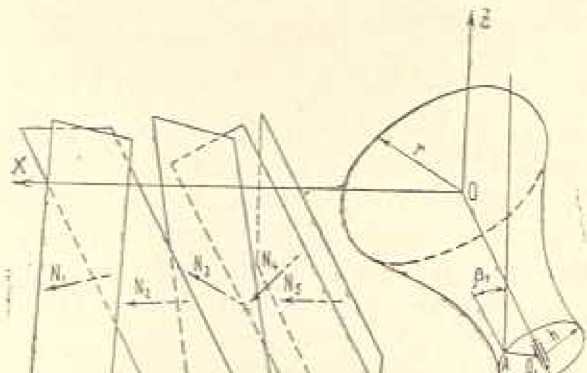
$$\cos^2\alpha_i' + \cos^2\beta_i' + \cos^2\gamma_i' = 1 \tag{1}$$

$$(i = 1, \cdots, n)$$

Из формул видно, что направляющие косинусы определяются двузначно, и выбор надо сделать так, чтобы не нарушилась последовательность занимаемых положений.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Направляющие косинусы прямой BC определяем из системы уравнений:

$$\cos\alpha_i' \cos\alpha_i + \cos\beta_i' \cos\beta_i + \cos\gamma_i' \cos\gamma_i = 0$$

$$\cos\alpha_i \cos\alpha_{IIi} + \cos\beta_i \cos\beta_{IIi} + \cos\gamma_i \cos\gamma_{IIi} = 0 \tag{2}$$

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

а координаты точки B —

$$B_{x_i}^2 + B_{z_i}^2 = r^2$$

$$h = \frac{|B_{x_i}\cos\gamma_i' - B_{z_i}\cos\alpha_i'|}{\sqrt{1-\cos^2\beta'}} \qquad (3)$$

Имея координаты точки B и углы наклона оси шатуна относительно координатных осей, определяем координаты точки C, выраженные через координаты точки B и искомую длину шатуна l

$$C_{x_i} = B_{x_i} \pm l\cos\alpha_i$$

$$C_{y_i} = B_{y_i} \pm l\cos\beta_i \qquad (4)$$

$$C_{z_i} = B_{z_i} \pm l\cos\gamma_i$$

$$B_{y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

где n — число заданных направлений нормали шатунной плоскости.

Центр вращения точки C находится в плоскости, перпендикулярной к отрезкам между точками C_i.

Геометрическое место центров кривизны двух положений точки C_i есть плоскость, уравнение которой будет

$$(C_{x_i} - C_{x_{i-1}})(2x - C_{x_i} - C_{x_{i-1}}) + (C_{y_i} - C_{y_{i-1}})(2y - C_{y_i} - C_{y_{i-1}}) +$$

$$+ (C_{z_i} - C_{z_{i-1}})(2z - C_{z_i} - C_{z_{i-1}}) = 0 \qquad (5)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

Количество уравнений (5) будет на единицу меньше числа заданных направлений нормали. Уравнения (5) позволяют произвести синтез данного механизма по четырем и пяти направлениям нормали шатунной плоскости.

При заданных четырех направлениях нормалей имеем три уравнения вида (5), которые после соответствующих преобразований приводим к виду

$$(A_i \pm lB_i)x \pm lD_i y + (E_i \pm lF_i)z \pm lN_i = 0 \qquad (6)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

где x, y, z — координаты точки D, а A_i, B_i, D_i, E_i, F_i и N_i — известные величины, выраженные через координаты точки B и соответствующие им направляющие косинусы оси шатуна.

Задаваясь одним из неизвестных параметров x, y, z или l, определяем из системы (6) остальные три. Далее определяем длину коромысла R по формуле

$$R = \sqrt{(C_{x_i} - x)^2 + (C_{y_i} - y)^2 + (C_{z_i} - z)^2} \qquad (7)$$

Не останавливаясь на подробностях вычисления по четырем направлениям, перейдем к синтезу механизма по пяти направлениям нормали шатунной плоскости.

СИНТЕЗ ПО ПЯТИ НАПРАВЛЕНИЯМ НОРМАЛИ ШАТУННОЙ ПЛОСКОСТИ

В этом случае, задавая $N_i(\cos\alpha_{\Pi i}; \cos\beta_{\Pi i})$ и выбирая $r = OB$; β'; h — по формулам (1), (2) и (3), определяем направляющие косинусы прямых AB и BC $(\alpha_i'; \gamma_i'; \alpha_i; \beta_i; \gamma_i)$ и координаты точки B. Далее выражаем координаты точки C через неизвестную длину шатуна l. Уравнения плоскостей, на которых лежат центры вращения кромысла, принимают вид:

$$
\begin{aligned}
(A_1 \pm lB_1)\,x \pm lD_1 y + (E_1 \pm lF_1)\,z \pm lN_1 &= 0\\
(A_2 \pm lB_2)\,x \pm lD_2 y + (E_2 \pm lF_2)\,z \pm lN_2 &= 0\\
(A_3 \pm lB_3)\,x \pm lD_3 y + (E_3 \pm lF_3)\,z \pm lN_3 &= 0\\
(A_4 \pm lB_4)\,x \pm lD_4 y + (E_4 \pm lF_4)\,z \pm lN_4 &= 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где

$$
\begin{gathered}
A_{i-1} = B_{x_i} - B_{x_{i-1}}, \qquad B_{i-1} = \cos\alpha_i - \cos\alpha_{i-1}\\
D_{i-1} = \cos\beta_i - \cos\beta_{i-1}, \qquad E_{i-1} = B_{z_i} - B_{z_{i-1}}\\
F_{i-1} = \cos\gamma_i - \cos\gamma_{i-1}, \qquad N_{i-1} = B_{x_{i-1}}\cos\alpha_{i-1} +\\
+ B_{z_{i-1}}\cos\gamma_{i-1} - B_{x_i}\cos\alpha_i - B_{z_i}\cos\gamma_i
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$(i = 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

Двойной знак здесь и в дальнейшем соответствует расположению точки C влево и вправо от точки B.

Необходимым и достаточным условием, при котором точка D (x, y, z) и длина l удовлетворяли бы уравнениям (8) является то, что эти уравнения должны быть совместны. Условие совместности требует, чтобы определитель квадратных матриц данной системы был равен нулю

$$
\begin{vmatrix}
(A_1 \pm lB_1) & \pm lD_1 & (E_1 \pm lF_1) & \pm lN_1\\
(A_2 \pm lB_2) & \pm lD_2 & (E_2 \pm lF_2) & \pm lN_2\\
(A_3 \pm lB_3) & \pm lD_3 & (E_3 \pm lF_3) & \pm lN_3\\
(A_4 \pm lB_4) & \pm lD_4 & (E_4 \pm lF_4) & \pm lN_4
\end{vmatrix} = 0
\tag{10}
$$

Отсюда получаем относительно длины шатуна квадратное уравнение

$$kl^2 \pm ml + n = 0 \tag{11}$$

где

$$k = B_1F_1 + D_1(B_2F_{IV} + B_3F_{II} + B_4F_{III}) - F_1B_1 -$$
$$- N_1(B_2D_{III} + B_3D_{IV} + B_4D_{II})$$
$$m = A_1F_1 + B_1E_1 + D_1(A_2F_{IV} + A_3F_{II} + A_4F_{III} + B_2E_{IV} +$$
$$+ B_3E_{II} + B_4E_{III}) - F_1A_1 - E_1B_1 -$$
$$- N_1(A_2D_{III} + A_3D_{IV} + A_4D_{II} + B_2E'_{IV} + B_3E'_{II} + B_4E'_{III})$$
$$n = A_1E_1 + D_1(A_2E_{IV} + A_3E_{II} + A_4E_{III}) - E_1A_1 -$$
$$- N_1(A_2E'_{IV} + A_3E'_{II} + A_4E'_{III}) \qquad (12)$$

$$A_1 = A_2N_{III} + A_3N_{IV} + A_4N_{II} \quad B_1 = B_2N_{III} + B_3N_{IV} + B_4N_{II}$$
$$E_1 = E_2N_{III} + E_3N_{IV} + E_4N_{II} \quad F_1 = F_2N_{III} + F_3N_{IV} + F_4N_{II}$$

$$D_{II} = D_2F_3 - D_3F_2 \quad E_{II} = E_2N_4 - E_4N_2$$
$$D_{III} = D_3F_4 - D_4F_3 \quad E_{III} = E_3N_2 - E_2N_3$$
$$D_{IV} = D_4F_2 - D_2F_4 \quad E_{IV} = E_4N_3 - E_3N_4$$

$$E'_{II} = E_2D_4 - E_4D_2 \quad F_{II} = F_2N_4 - F_4N_2$$
$$E'_{III} = E_3D_2 - E_2D_3 \quad F_{III} = F_3N_2 - F_2N_3$$
$$E'_{IV} = E_4D_3 - E_3D_4 \quad F_{IV} = F_4N_3 - F_3N_4$$

$$N_{II} = N_2D_3 - N_3D_2$$
$$N_{III} = N_3D_4 - N_4D_3$$
$$N_{IV} = N_4D_2 - N_2D_4$$

Если одну точку C примем за искомую, то другая точка C' будет сферической, которая находится на оси шатуна с определенным радиусом сферы.

После определения l из любых трех уравнений системы (8) вычисляем координаты точки D.

Имея x, y, z и l по формуле (7), определяем длину коромысла.

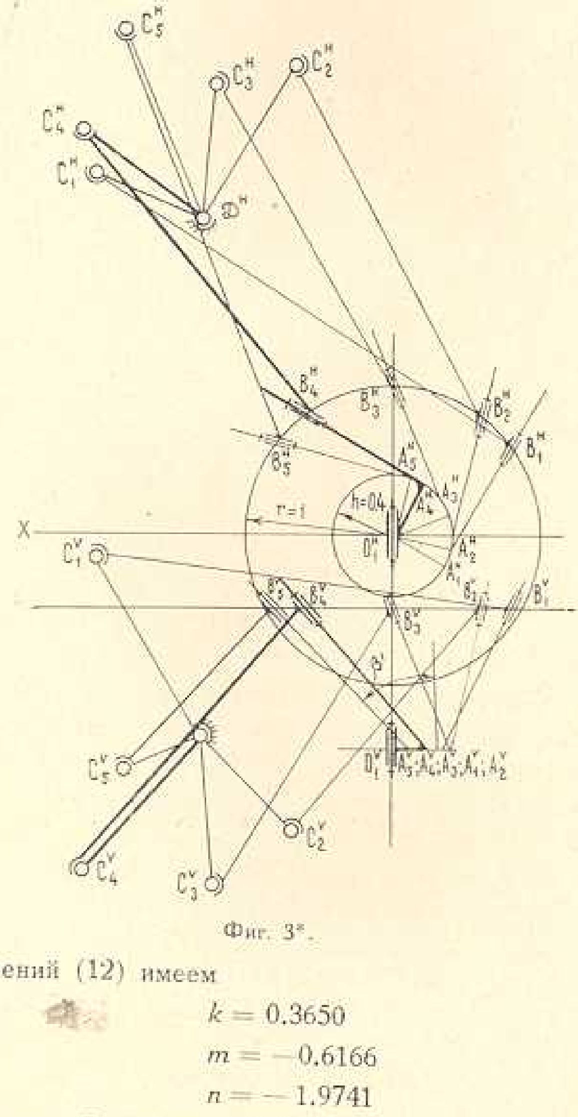
Пример: Пусть $r = 1$, $h = 0.4$, $\beta' = 45^\circ\,02'\,04''$

$N_{n/n}$	1	2	3	4	5
α_{II}	$\pm 65^\circ 53' 25''$	$\pm 24^\circ 43' 09''$	$\pm 87^\circ 29' 05''$	$\pm 49^\circ 31' 36''$	$\pm 48^\circ 25' 45''$
β_{II}	$\mp 45^\circ 06' 20''$	$\mp 67^\circ 40' 53''$	$\mp 48^\circ 15' 06''$	$\pm 78^\circ 15' 58''$	$\pm 58^\circ 25' 55''$

Координаты точки B и значения направляющих косинусов прямых AB и BC сведены в табл. 1, а значения коэффициентов — в табл. 2.

Таблица 1

вел. / пол.	B_x	B_z	$\cos\alpha'$	$\cos\beta'$	$\cos\gamma'$	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
1	−0.8	0.6	0.34896	0.70668	−0.61549	0.84362	0.04911	0.53469
2	−0.6	0.8	0.16267	0.70688	−0.68858	0.38528	0.59698	0.70369
3	0	1	−0.28301	0.70688	−0.64847	0.36533	0.70457	0.60837
4	0.6	0.8	−0.61549	0.70688	−0.34896	0.44702	0.67767	0.58390
5	0.8	0.6	−0.68858	0.70688	−0.16267	0.29254	0.47596	0.82939



Фиг. 3*.

Из выражений (12) имеем

$$k = 0.3650$$

$$m = -0.6166$$

$$n = -1.9741$$

* Ординаты точек C_i и D на чертеже отсчитаны от оси x.

Подставляя найденные значения k, m и n в уравнение (11), получим

$$l_1 = 3.3189, \quad l_2 = -1.6296$$

Далее, из любых трех уравнений системы (8) определяем координаты центра вращения коромысла

$$x_1 = 1.2885 \quad x_2 = -0.5112$$

$$y_1 = 1.3204 \quad y_2 = 0.6965$$

$$z_1 = 2.0735 \quad z_2 = -0.0048$$

Таблица 2

вел. / пол.	A	B	D	E	F	N
1	0.2	−0.45834	0.54787	0.2	0.16900	−0.68587
2	0.6	−0.01995	0.10759	0.2	−0.09531	−0.27659
3	0.6	−0.08169	−0.02690	−0.2	−0.02448	−0.12696
4	0.2	−0.15448	−0.20171	−0.2	0.24549	0.00367

Наконец, из уравнений (7) определяем длину коромысла

$$R_1 = 1.3915, \quad R_2 = 2.0935$$

Из двух механизмов выбираем тот, который представляется наиболее удобным. Полученный механизм для R_1 показан на фиг. 3.

Ереванский государственный университет
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 15 VI 1970

Հ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՔԱՌՕՂԱԿ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱԹԵՎԻ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆՈՐՄԱԼԻ ՏՐՎԱԾ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է տարածական քառօղակ մեխանիզմի (պտտման—պտտման—գնդային—գնդային) սինթեզը ըստ շարժաթևի հարթության նորմալի տված չորս և հինգ ուղղությունների։

Նորմալի տրված հինգ ուղղությունների դեպքում ստացված է քառակուսի հավասարում շարժաթևի երկարության նկատմամբ։

Դիտարկված մեթոդով կարելի է կատարել սինթեզ նաև տրված վեց ուղղությունների դեպքում։

Լուծված է թվային օրինակ տված հինգ ուղղությունների դեպքում։

SYNTHESIS OF A SPATIAL FOUR-LINK MECHANISM IN THE DIRECTIONS OF THE NORMAL OF THE CONNECTING ROD PLANE

H. A. HOVANESIAN, K. Kh. SHAKHBASIAN

S u m m a r y

A solution is presented for the problem of synthesis of a spatial four-link mechanism (rotary—rotary—spherical—spherical) in four and five directions of the normal of the connecting rod plane.

A quadratic equation with respect to the connecting rod length is obtained with the five directions specified.

The method discussed can be used to solve problems of synthesis in six directions of the normal of the connecting rod plane.

A numerical example is solved for the case of five directions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уилсон.* Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 2, 1965.
2. *Су.* Проектирование пространственных механизмов для управления перемещением твердого тела. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 3, 1968.
3. *Рос.* Теория конечных положений в применении к синтезу механизмов. Прикл. механ., № 4, 1967.
4. *Сандор, Бишоп.* Об общем методе пространственного кинематического синтеза с помощью тензора удлинения вращения. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 1, 1969.