ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

В. Н. ЛОЗИНСКИЙ

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКЕ С РЕГУЛЯРНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, ВЫЗВАННЫЕ ДЕЙСТВИЕМ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Решение термоупругой задачи для круглого цилиндра с регулярно расположенными круговыми полостями, когда на контурах цилиндра задана определенная температура, изучено методом А. С. Космодамианского [3] в работе [1]. В данной работе этим же методом решена и исследована термоупругая задача в случае действия в пластинке сосредоточенного источника тепла.

1. Рассмотрим круглую пластинку радиуса R, ослабленную m круговыми отверстиями радиуса $\rho = 1$ таким образом, что центры их находятся на окружности радиуса d, концентричной к окружности радиуса R, а угол регулярности β равен $\frac{2\pi}{m}$ (см. фиг. 1). В центре пластинки действует стационарный точечный источник тепла мощностью W. На контурах $L_0, L_1, \cdots, L_m$ температура $T = 0$.

Чтобы определить напряженное состояние данной пластинки, необходимо найти сначала температурное поле, возникающее в ней. Для этой цели необходимо проинтегрировать уравнение

$$\nabla^2 T + \frac{W}{\lambda} \delta(z) = 0 \tag{1}$$

при заданных для температуры граничных условиях [5]. В уравнении (1) $\delta(z)$ — функция Дирака, λ — коэффициент теплопроводности.

Общее решение уравнения (1) можно выразить, как известно, через функцию комплексного переменного $F(z)$, аналитическую в данной области и имеющую особенность в точке $z = 0$:

$$T = F(z) + \overline{F(z)} \tag{2}$$

В рассматриваемом случае функцию $F(z)$ можно представить следующим образом [3]:

$$F(z) = A \ln z + \sum_{q=1}^{m} B^{(q)} \ln (z - z_q) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{(q)}}{(z - z_q)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k \tag{3}$$

где $B^{(q)}$ — вещественные постоянные, $b_k^{(q)}$, a_k — комплексные постоянные, z_q — координата центра q-го отверстия. Учитывая геометрическую симметрию и симметрию граничных условий, выражение (3) можно переписать так:

$$F(z)=A\ln z+B\sum_{q=1}^{m}\ln(z-de^{q^*})+$$

$$+\sum_{q=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k e^{q^*k}}{(z-de^{q^*})^k}+\sum_{k=0,\,m,\,2m}^{\infty}a_k\left(\frac{z}{R}\right)^k \tag{4}$$

Здесь

$$B=B^{(1)},\quad b_k=b_k^{(1)},\quad q^*=i\frac{2\pi}{m}(q-1).$$

Следуя Э. Мелану, Г. Паркусу [4], коэффициент A определим так:

$$A=-\frac{W}{4\pi\lambda\delta} \tag{5}$$

где δ — толщина пластинки.

Остальные коэффициенты, которые, как показали проведенные нами исследования, являются вещественными величинами. Они определяются из граничных условий для температуры на контурах пластинки L_1 и L_0. На остальных контурах $L_2, \cdots, L_m$ граничные условия выполняются автоматически. Обычным методом рядов для определения этих коэффициентов получим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$Bm\ln R+a_0=-A\ln R$$

$$B\sum_{q=2}^{m}\ln[d^2(2-e^{q^*}-e^{-q^*})]+2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_1^{m(n-1)}a_{m(n-1)}+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_2^n\sum_{q=2}^{m}\frac{e^{q^*n}}{(1-e^{q^*})^n}b_n=-2A\ln d \tag{6}$$

$$-B\frac{m}{j}\varepsilon_1^j+a_j+mb_j^{(0)}=0,\quad j=m,\,2m,\,3m,\cdots$$

$$-BP_j+a_j^{(1)}+b_j+b_j^{(1)}=A\frac{(-\varepsilon_2)^j}{j},\quad j=1,\,2,\,3,\cdots$$

Здесь

$$\varepsilon_1=\frac{d}{R},\qquad \varepsilon_2=\frac{1}{d}$$

$$a_j^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{m(n-1)}^{j}\varepsilon_1^{m(n-1)}\varepsilon_2^{j}C_{m(n-1)}^{j}a_{m(n-1)}$$

$$b_j^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon_2)^j \varepsilon_2^n C_{j+n-1}^j \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{q^* n}}{(1-e^{q^*})^{j+n}} b_n$$

$$b_j^{(0)} = \sum_{n=1}^{j} \varepsilon_1^{j-n} \left(\frac{1}{R}\right)^n C_{j-1}^{j-n} b_n$$

$$P_j = \frac{(-\varepsilon_2)^j}{j} \sum_{q=2}^{m} \frac{1}{(1-e^{q^*})^j}$$

$$\delta_{m(n-1)}^j = \begin{cases} 1, & \text{если } m(n-1) \geqslant j \\ 0, & \text{если } m(n-1) < j \end{cases}$$

2. После определения функции $F(z)$ становится известным распределение температуры в пластинке. Неравномерность этого распределения приводит к возникновению в пластинке напряжений и перемещений [4]:

$$\overline{\sigma_x} + \overline{\sigma_y} = -8Gk_1 [F(z) + \overline{F(z)}\,]$$

$$\overline{\sigma_y} - \overline{\sigma_x} + 2i\overline{\tau_{xy}} = -8Gk_1 [\bar{z} F'(z) + f'(z)] \qquad (7)$$

где $k_1 = \frac{\alpha}{4}(1+\nu)$ (α — коэффициент теплового расширения, ν — коэффициент Пуассона); G — модуль сдвига,

$$f(z) = (b_1 - Bd) \sum_{q=1}^{m} e^{q^*} \ln (z - de^{q^*})$$

— функция, определяемая из условия однозначности перемещений и напряжений, получаемых в результате интегрирования уравнения термоупругого потенциала. Они обозначены здесь черточками сверху.

Так как найденные поля напряжений и перемещений получены с помощью частного решения уравнения термоупругого потенциала, то они, как и следовало ожидать, не удовлетворяют граничным условиям. Поэтому к полю напряжений $\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_y}$, $\overline{\tau_{xy}}$ нужно прибавить второе поле, которое возникает в пластинке, если к контурам приложить усилия $(\overline{X_n} + i\overline{Y_n})$ в случае, когда они свободны, или перемещения $(\bar{u} + i\bar{v})$ в случае жесткого защемления контуров.

Для определения второго поля напряжений необходимо найти функции

$$\begin{matrix} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{matrix} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \begin{matrix} c_j^{(q)} \\ d_j^{(q)} \end{matrix} \frac{1}{(z-z_q)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \begin{matrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{matrix} \left(\frac{z}{R}\right)^j \qquad (8)$$

из граничных условий вида

$$\varkappa_q \varphi(t_q) + t_q \overline{\varphi'(t_q)} + \overline{\psi(t_q)} = F(t_q) \qquad (9)$$

где t_q — аффикс точки на одном из контуров,

$$\varkappa_q = -\frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad F(t_q) = 2G(\overline{u} + i\overline{v})$$

если рассматриваемый контур защемлен, и $\varkappa_q = 1$

$$F(t_q) = -i\int_0^s (\overline{X}_n + i\,\overline{Y}_n)\,ds$$

если контур свободен $(q = 0,\ 1,\ 2, \cdots, m)$.

Ввиду геометрической симметрии и симметрии граничных условий выражения (8) можно представить следующим образом:

$$\varphi(z) = \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j\, e^{q^*(j+1)}}{(z - de^{q^*})^j} + \sum_{j=1,\, m+1,\, 2m+1,\dots}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{z}{R}\right)^j$$

$$\psi(z) = \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j\, e^{q^*(j-1)}}{(z - de^{q^*})^j} + \sum_{j=m-1,\, 2m-1,\dots}^{\infty} \beta_j \left(\frac{z}{R}\right)^j \tag{10}$$

3. Проведенные исследования показали, что коэффициенты c_j, d_j, α_j и β_j, входящие в выражения (10), являются вещественными. Для их определения методом рядов получена следующая бесконечная алгебраическая система уравнений:

$$\varkappa_1 c_j + d(j+1)(c_{j+1}^{(1)} + A_{j+1}^{(1)}) + (j+2)(c_{j+2}^{(1)} + A_{j+2}^{(1)}) +$$
$$+ d_j^{(1)} + B_j^{(1)} = f_j^{(1)}, \quad j = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$
$$(\varkappa_1 + h_j^1)(c_j^{(1)} + A_j^{(1)}) - h_j^3(j-2)\,c_{j-2} - h_j^2 c_{j-1} + d_j = f_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$
$$(\varkappa_0 + h_j^1)\,\alpha_j + d_j^{(0)} - h_j^3(j-2)\,c_{j-2}^{(0)} = f_j^{(3)}, \quad j = 1,\ m+1,\ 2m+1, \cdots$$
$$\varkappa_0\, c_j^{(0)} + (j+2)\,\alpha_{j+2} + \beta_j = f_j^{(4)}, \quad j = m-1,\ 2m-1, \cdots \tag{11}$$

Здесь

$$c_j^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon_2)^j \varepsilon_2^n C_{j+n-1}^j \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{q^*(n+1)}}{(1 - e^{q^*})^{j+n}}\, c_n$$

$$d_j^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon_2)^j \varepsilon_2^n C_{j+n-1}^j \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{q^*(n-1)}}{(1 - e^{q^*})^{j+n}}\, d_n$$

$$A_j^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n1}^j\, \varepsilon_2^j\, \varepsilon_1^{n1}\, C_{n1}^j\, \alpha_{n1}, \qquad B_j^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2n}^j\, \varepsilon_1^{n2}\, \varepsilon_2^j\, C_{n2}^j\, \beta_{n2}$$

$$c_j^{(0)} = \sum_{n=1}^{j} m\varepsilon_1^{j-n} \left(\frac{1}{R}\right)^n C_{j-1}^{j-n} c_n, \qquad d_j^{(0)} = \sum_{n=1}^{j} m\varepsilon_1^{j-n} \left(\frac{1}{R}\right)^n C_{j-1}^{j-n} d_m$$

$$h_j^1 = \begin{cases} 1, \text{ если } j = 1, \\ 0, \text{ если } j > 1, \end{cases} \quad h_j^2 = \begin{cases} 1, \text{ если } j \geqslant 2, \\ 0, \text{ если } j < 2; \end{cases} \quad h_j^3 = \begin{cases} 1, \text{ если } j \geqslant 3 \\ 0, \text{ если } j < 3 \end{cases}$$

$$n1 = m(n-1)+1, \quad n2 = mn - 1, \quad \delta_k^j = \begin{cases} 1, \text{ если } k - j \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } k - j < 0. \end{cases}$$

Выражения для правых частей системы (11) $f_j^{(1)}$, $f_j^{(2)}$, $f_j^{(3)}$ и $f_j^{(4)}$ имеют вид

$$f_j^{(1)} = 4Gk_1A\left[B(P_jd + P_{j-1}) + (-\varepsilon_2)^{j-1}\left(\frac{1}{j} - \frac{\varepsilon_2}{j+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(-\varepsilon_2)^{j+1}}{j}\sum_{q=2}^{m}\frac{e^{q^*}}{(1-e^{q^*})^j} - \frac{b_{j+1}}{j} + b_{j+1}^{(1)} + b_j^{(1)}d + a_{j+1}^{(1)} + a_j^{(1)}d\right]$$

$$f_j^{(2)} = 4Gk_1A\left\{h_j^1\left[2\ln d - mB + B\sum_{q=2}^{m}\ln[d^2(2 - e^{q^*} - e^{-q^*})] + \right.\right.$$

$$\left. + a_0^{(1)} + b_0^{(1)}\right] - b_j^{(2)} + a_j^{(2)} + b_j d + \delta_j^1 b_{j-1} +$$

$$+ B(P_jd + \delta_j^1 P_{j-1}) - \frac{(-\varepsilon_2)^j}{j}(b_1 - Bd)\sum_{q=2}^{m}\frac{e^{q^*}}{(1-e^{-q^*})^j} -$$

$$\left. - \delta_j^1\frac{(-\varepsilon_2)^{j-1}}{(j-1)j}\right\}$$

$$f_j^{(3)} = 4Gk_1A\left[h_j^1R(2\ln R - 2mB\ln R - mB - 1 + a_0) - \right.$$

$$\left. - \delta_j^1 mBR\frac{\varepsilon_1^{j-1}}{j-1} - (b_1 - Bd)\,m\frac{\varepsilon_1^j}{j} + \delta_j^1 Rmb_{j-1}^{(0)} + R\frac{a_{j-1}}{j}\right]$$

$$f_j^{(4)} = 4Gk_1A\left[Ra_{j+1} - mBR\frac{\varepsilon_1^{j+1}}{j+1} - (b_1 - Bd)\,m\frac{\varepsilon_1^j}{j} - b_j^{(3)}\right]$$

В выражениях для правых частей системы (11) коэффициенты $a_j^{(1)}$, $b_j^{(1)}$, $b_j^{(0)}$, P_j означают то же, что и в системе (6),

$$b_j^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\varepsilon_2)^j\varepsilon_2^n}{n}C_{j+n-1}^j\sum_{q=2}^{m}\frac{e^{q^*(n+1)}}{(1-e^{q^*})^{j+n}}b_{n+1}$$

$$a_j^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_{n1}^j\varepsilon_1^{m(n-1)}\varepsilon_2^{j-1}C_{n1}^j\frac{a_{m(n-1)}}{n1}$$

$$b_j^{(3)} = \sum_{n=2}^{j+1}\frac{m}{n+1}C_{j-1}^{j-n+1}\varepsilon_1^{j-n+1}\left(\frac{1}{R}\right)^{n-1}b_n$$

$$\delta_j^1 = \begin{cases} 0, \text{ если } & j = 1 \\ 1, \text{ если } & j > 1 \end{cases}$$

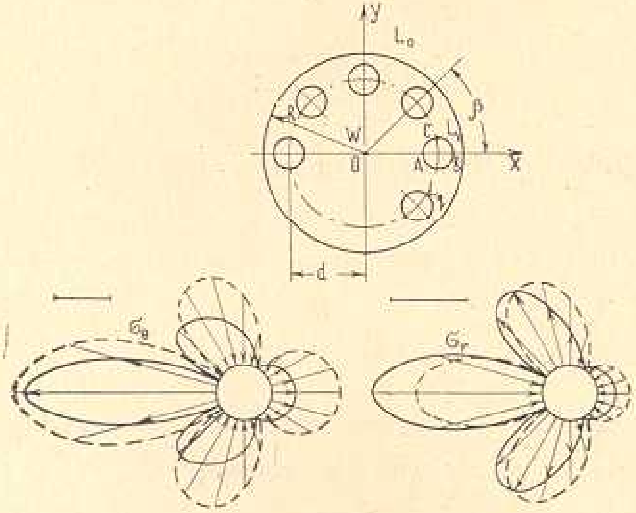
Система (11) оказывается квазирегулярной при любой близости рассматриваемых контуров, что устанавливается таким же образом, как в работе [2]. В связи с этим ее можно решать методом редукции. Знание коэффициентов c_k, d_k, α_k, β_k позволяет определить функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, через которые компоненты второго поля напряжений выражаются так:

$$\bar{\bar{\sigma}}_x + \bar{\bar{\sigma}}_y = 4\mathrm{Re}\varphi'(z)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_y - \bar{\bar{\sigma}}_x + 2i\bar{\bar{\tau}}_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \tag{12}$$

Полное поле напряжений в пластинке получается путем суммирования напряжений (7) и (12).

В качестве примера рассмотрена круглая пластинка с четырьмя отверстиями. При этом $R = 10$, а расстояние d варьировалось (см. табл. 1). Вычисления проводились на ЭЦВМ „Минск-22“. Точность полученных результатов контролировалась путем проверки граничных условий во многих точках контуров пластинки для каждого приближения.



Фиг. 1.

Так, например, при расстоянии $d = 2$ в случае свободных контуров вместо нуля радиальные напряжения в точке A получали следующие значения: при числе членов, удерживаемых в функциях $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, равном восьми, $\sigma_r = 0.095$, при $N = 12$ и 16 соответственно 0.0028 и 0.00033. При этом тангенциальные напряжения σ_θ равнялись соответственно 3.311, 3.428 и 3.431.

В табл. 1 приведены значения для напряжений σ_θ и σ_r с точностью до $H = -4Gk_1A$ на контуре L_1, при этом σ_θ относится к случаю, когда контуры свободны от внешних усилий, а σ_r — к случаю жестко защемленных внутренних контуров.

Таблица 1

θ° \ d	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0	8.5	8.95
	σ_θ							
0	+0.058	+0.437	+1.250	+2.043	+2.809	+4.215	+5.422	+8.045
15	+0.093	+0.406	+1.158	+1.880	+2.571	+3.826	+4.905	+7.073
30	+0.078	+0.314	+0.889	+1.413	+1.900	+2.752	+3.514	+4.664
45	+0.003	+0.163	+0.466	+0.707	+0.918	+1.246	+1.651	+1.919
60	−0.010	−0.047	−0.072	−0.139	−0.198	−0.338	−0.153	−0.256
75	−0.071	−0.302	−0.665	−0.989	−1.230	−1.629	−1.980	−1.498
90	−0.205	−0.565	−1.220	−1.670	−1.936	−2.301	−2.186	−1.798
105	−0.326	−0.800	−1.607	−1.962	−2.070	−2.125	−1.836	−1.215
120	−0.658	−0.999	−1.613	−1.614	−1.435	−1.033	−0.539	+0.170
135	−1.082	−1.106	−0.905	−0.456	−0.004	+0.801	+1.450	+2.139
150	−0.708	−0.439	+0.695	+1.363	+1.910	+2.911	+3.627	+4.244
165	+0.542	+1.819	+2.672	+3.147	+3.610	+4.614	+5.327	+5.877
180	+3.420	+3.431	+3.611	+3.905	+4.297	+5.270	+5.972	+6.495
	σ_r							
0	−0.028	−0.232	−0.434	−0.447	−0.377	−0.166	−0.050	−0.026
15	−0.052	−0.222	−0.398	−0.389	−0.300	−0.060	+0.044	+0.028
30	−0.050	−0.186	−0.287	−0.217	−0.076	+0.244	+0.333	+0.232
45	−0.010	−0.119	−0.010	+0.060	+0.272	+0.705	+0.807	+0.649
60	−0.005	−0.008	+0.168	+0.422	+0.700	+1.243	+1.397	+1.245
75	+0.028	+0.170	+0.504	+0.820	+1.132	+1.746	+1.963	+1.866
90	+0.154	+0.447	+0.862	+1.170	+1.464	+2.061	+2.330	+2.295
105	+0.413	+0.828	+1.131	+1.343	+1.566	+2.077	+2.352	+2.359
120	+1.122	+1.155	+1.123	+1.192	+1.330	+1.728	+1.975	+2.001
135	+1.958	+0.980	+0.654	+0.640	+0.735	+1.061	+1.277	+1.308
150	+0.668	−0.038	−0.264	−0.211	−0.075	+0.261	+0.462	+0.494
165	−1.614	−1.503	−1.252	−1.018	−0.794	−0.397	−0.192	−0.158
180	−3.082	−2.279	−1.692	−1.355	−1.083	−0.652	−0.442	−0.407

На фиг. 1 даны графики распределения напряжений σ_θ и σ_r по контуру L_1, когда $d = 2$ (сплошная линия) и $d = 3$ (пунктирная линия).

Из приведенной табл. 1 следует, что в случае свободных контуров пластинка испытывает максимальные напряжения σ_θ в области точки A, которые растут по мере увеличения расстояния d.

Напряжения σ_θ интенсивно растут при увеличении расстояния d также в области точки B, где они принимают максимальное значение, когда контуры L_q $(q = 1, 2, \cdots, m)$ и L_0 находятся в непосредственной близости друг от друга.

В случае жестко защемленных отверстий напряжения σ_r в области точки A растут с уменьшением расстояния d. При увеличении расстояния d напряжения σ_r растут в области точки C.

Донецкий вычислительный центр
АН УССР

Поступила 27 I 1970

Վ. Ն. ԼՈԶԻՆՍԿԻ

ՋԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ԿԵՏԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՄԲ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ՋԵՐՄԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԿԼՈՐ ՍԱԼՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրված է ջերմության ստացիոնար կետային աղբյուրի ազդեցության հետևանքով առաջացած ջերմառաձգական լարումների որոշման խնդրի լուծումը կանոնավոր դասավորված շրջանային անցքերով թուլացված կլոր սալի համար, առաձգականության տեսության հարթ խնդրի առաջին և երկրորդ եզրային պայմանների դեպքում:

Լարումների դաշտը փնտրում է երկու դաշտերի գումարի տեսքով, որոնցից առաջինը որոշվում է ջերմառաձգական պոտենցիալի հավասարման մասնավոր լուծման օգնությամբ, իսկ երկրորդը ստացվում է սալի եզրագծերի վրա այնպիսի տեղափոխությունների կամ լարումների տրման դեպքում հարթ խնդրի լուծման հետևանքով, որոնք մեծությամբ հավասար և բաց նշանի հակադիր են նախորդ դեպքում որոշվածներին:

Կատարված են լարումների թվային հետազոտություններ չորս անցքով սալի համար:

THERMOELASTIC STRESSES IN A RING-LIKE PLATE WITH REGULARLY SPACED CIRCULAR HOLES CAUSED BY A POINT SOURCE OF HEAT

V. N. LOSINSKY

S u m m a r y

The solution of a thermoelastic problem for a ring-like plate with regularly spaced circular holes and a stationary point source of heat is obtained by the method of A. S. Kosmodamiansky. The results of the numerical calculations of the stressed state for a ptate with four holes when 1) all the contours are free from any loading, 2) the interior contours are rigidly fixed are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брюханова Е. Н.* Температурные напряжения в круглом цилиндре с регулярно расположенными круглыми полостями. Прикл. механ., т. V, в. 4, 1969.
2. *Космодаміанський О. С., Ложкін В. М. і Шалдирван В. А.* Квазірегулярність нескінченних систем у задачах теорії пружності для пластин з круговими отворами. Докл. АН УРСР, № 3, 1970.
3. *Космодаміанський О. С.* Термопружна задача для циліндра з порожнинами. Прикладна механіка, т. VIII, в 6, 1962.
4. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1958.
5. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.