

А. А. МОВСИСЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ БАЛКИ ПРИ БЫСТРЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

1. Продольно-поперечное движение упругой идеальной балки описывается системой

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad P = -EF \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

В уравнении поперечного колебания сохранен член „приведенной нагрузки“, так что в задачах устойчивости, которыми будем заниматься в дальнейшем, уравнение продольного движения (1.1) можно рассматривать как уравнение невозмущенного движения, а (1.2) будет уравнением возмущенного движения.

Для решения задач к (1.1) и (1.2) должны быть присоединены определенные граничные и начальные условия. Решения уравнения (1.1) с любыми начальными и граничными условиями не представляет труда, в то время как решение (1.2) связано с определенными трудностями, если вспомнить, что сжимающая сила, определяемая из (1.1), в общем случае будет непостоянной. В работе [1] был предложен способ определения критических сил и собственных частот изгибных колебаний частично сжатых балок с шарнирно опертыми краями, который далее был применен для решения задачи устойчивости балки, подверженной продольному удару. Оказывается, этот прием применим почти для всех случаев продольного движения.

Как уже указывалось выше, совместное решение (1.1) и (1.2) не такая уж простая задача, поэтому авторам приходилось делать различные приближения. Теперь мы рассмотрим конкретную задачу. К этой задаче применим подход [1] и укажем приближения, которые делались ранее и которые еще возможно сделать.

Исследуем движение стержня, один конец которого неподвижен, а второй конец движется в сторону первого с постоянной скоростью c . Начальные условия для определенности примем нулевыми. Эта задача, известная под названием задачи Хоффа [2], наиболее точно отражает процесс испытания на жестких испытательных машинах.

Если перейти к безразмерным координатам

$$y = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{at}{l} \quad (1.3)$$

где l — длина стержня и a — скорость упругих волн, то уравнение продольного движения с краевыми и начальными условиями будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad u \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0$$

$$u \Big|_{y=0} = 0, \quad u \Big|_{y=l} = -\frac{cl}{a} \tau \quad (1.4)$$

Решение (1.4) удобнее всего искать методом Гринберга [3]. Не останавливаясь на выкладках, приведем его в окончательном виде

$$u = l \frac{c}{a} \left[-y\tau + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sin k\pi\tau \sin k\pi y \right] \quad (1.5)$$

откуда для сжимающей силы на основании (1.1) и (1.3) имеем

$$P = EF \frac{c}{a} \left[\tau - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k\pi\tau \cos k\pi y \right] \quad (1.6)$$

Заметим, что для сжимающей силы получается такое же значение и в случае удара, когда отношение массы ударяющего тела к массе стержня стремится к бесконечности [1]. Тогда c соответствует скорости удара.

Перейдя в (1.2) к новым переменным (1.3), ищем его решение в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin m\pi y \quad (1.7)$$

удовлетворяющем условиям шарнирного опирания. Учитывая еще (1.6), на основании [1] для неизвестных коэффициентов $f_m(\tau)$ получим следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \left[\frac{J}{Fl^2} (m\pi)^4 - (m\pi)^2 \left(a_0 + \frac{a_{2m}}{2} \right) \right] f_m -$$

$$- \frac{m\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{m-1} (\alpha_{m+n} + \alpha_{m-n}) n f_n - \frac{m\pi^2}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} (\alpha_{m+n} + \alpha_{n-m}) n f_n = 0$$

$$a_0 = \frac{c}{a} \tau, \quad \alpha_n = (-1)^n \frac{c}{a} \frac{\sin n\pi\tau}{n\pi} \quad (1.8)$$

Всякое упрощение или приближение системы (1.8) связано с величиной отношения $\lambda = c/a$. На фиг. 1 изображены распределения безразмерной силы P/EF по длине стержня для различных моментов времени и для сечения $y=1$ при некоторых λ . В зависимости от величины λ возможны следующие случаи.

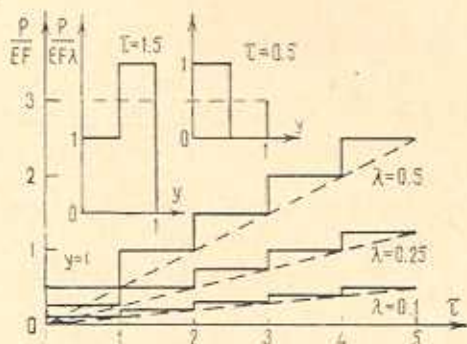
I. Нагружение стержня происходит очень медленно (λ — очень малая величина). В этом случае можно принять нагружение статическое ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$) и для сжимающей силы брать

$$P = EF\lambda z \quad (1.9)$$

В этом случае система (1.8) принимает вид

$$\frac{d^2 f_m}{dz^2} + \left[\frac{J}{FL^2} (m\pi)^4 - \lambda (m\pi)^2 z \right] f_m = 0 \quad (1.10)$$

При этом z в квадратных скобках из (1.9) нужно рассматривать как параметр („другое время“).



Фиг. 1.

Система (1.10) решается весьма просто. Если воспользоваться критерием колебательности движения [4], который находится в тесном соответствии с теорией устойчивости Ляпунова, то получается эйлерова сила. Задача принадлежит к особому классу, указанному в [4], когда статический критерий случайно приводит к верным результатам. Таким образом, в случае очень медленного нагружения (статический случай) для определения критической силы в (1.1) и (1.2) можно пренебречь инерционными силами ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$).

II. Нагружение происходит медленно. Время, необходимое для распространения упругой волны с одного конца на другой, равно $t_0 = \frac{l}{a}$, периоды основных частот продольных и поперечных волн (незагруженной балки) соответственно равны $2t_0$ и $\frac{2l}{\pi} \sqrt{\frac{F}{J}} t_0$. Поэтому в задачах медленного нагружения эффектом продольного движения, порождающим неоднородность в сжимающей силе по длине балки, можно пренебречь ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$). Это видно и из фиг. 1, где сплошными ли-

ниями представлены истинное распределение сжимающей силы по длине балки и ее изменение во времени на конце $y = 1$, а штрихами, когда принимается осредненное значение. В этом случае для сжимающей силы будем иметь выражение (1.9) (первый член ряда Фурье (1.6)), но только уже нельзя принять как параметр. Решение (1.10) тогда выражается в бесселевых функциях. Именно этот случай был рассмотрен в [2, 5]. В дальнейшем было выполнено громадное число работ по пластинкам, оболочкам с указанным приближением. Наиболее важным результатом этих работ является следующее: сила инерции (поперечная) стабилизирует балку (оболочку) и чем быстрее происходит нагружение, тем амплитуда прогиба, соответствующая эйлеровой сжимающей силе, будет меньше. Вопрос устойчивости в этих работах в классическом понимании не затрагивался и считалось, что система теряет устойчивость, как только начинается бурный рост прогибов. Заметим только, что критерий колебательности движения в этих задачах ничего нового по сравнению с эйлеровой силой не может дать.

А что такое медленное нагружение, каковы его пределы? И как ведет, вообще, балка при быстрых нагружениях? На эти вопросы можно ответить только, решая систему (1.8). А решение укороченной системы (1.8) (задача Коши) для современных машин несравненно более легкая задача, чем решение уравнения (1.2).

III. При быстром нагружении уже продольной инерционной силой пренебречь нельзя ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$), и об устойчивости балки можно судить, исходя из системы (1.8). Возможны два критерия потери устойчивости.

Чтобы быть верным классическому понятию устойчивости, нужно исходить из теории устойчивости для конечного интервала времени. В этом отношении к системе (1.8) наиболее подходящим является определение устойчивости на конечном интервале времени, предложенное Г. В. Каменковым [6] и в дальнейшем развитое К. А. Абгаряном [7]. Суть его заключается в следующем.

В векторно-матричной записи уравнения (1.8) представим в виде

$$\frac{df}{d\tau} = A(\tau)f \quad (1.11)$$

Заметим, что в системе (1.8) в этом случае должны быть добавлены диссипативные члены, чтобы не получить «критического случая» [7].

Если решение $f(\tau)$ уравнения возмущенного движения (1.11) таково, что при начальном условии

$$(G(\tau_0)f_0, G(\tau_0)f_0) \leq \rho \quad (1.12)$$

где $f_0 = f(\tau_0)$, $\rho > 0$ — достаточно малое число, на некотором конечном интервале $[\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau]$ удовлетворяет условию

$$(G(\tau)f, G(\tau)f) \leq \rho \quad (1.13)$$

где $G(\tau)$ — заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к области (1.13). Заметим, что в отличие определения устойчивости Ляпунова, ρ в (1.12) и (1.13) одинаковые.

Условия устойчивости и неустойчивости выражаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \mu(\tau_0) + \nu_{\max}(\tau_0) < 0 & \text{ — достаточное условие устойчивости,} \\ \mu(\tau_0) + \nu_{\min}(\tau_0) \leq 0 & \text{ — необходимое условие устойчивости,} \\ \mu(\tau_0) + \nu_{\min}(\tau_0) > 0 & \text{ — достаточное условие неустойчивости,} \\ \mu(\tau_0) + \nu_{\max}(\tau_0) \geq 0 & \text{ — необходимое условие неустойчивости.} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь $\mu(\tau)$ есть максимальная действительная часть собственного числа матрицы $A(\tau)$, а ν_{\min} и ν_{\max} — соответственно минимальное и максимальное собственные числа эрмитовой матрицы

$$Q = -\frac{1}{2} \left(K^{-1} \frac{dK}{d\tau} + \frac{dK^*}{d\tau} K^{-1} \right) \quad (1.15)$$

Невырожденная и дифференцируемая матрица $K(\tau)$ преобразует $A(\tau)$ к диагональному виду.

Геометрическая интерпретация устойчивости для конечного интервала времени [6, 7] заключается в следующем. Пусть система в момент τ_0 получает некоторые произвольные малые возмущения $f(\tau_0)$, которые находятся в момент τ_0 внутри или на поверхности эллипсоида (1.12). Если в дальнейшем $f(\tau)$ остаются внутри области, ограниченной этим эллипсоидом, по крайней мере, до значения $\tau = \tau_1$, то движение устойчиво на интервале $[\tau_0, \tau_1]$, в противном случае — неустойчиво. Здесь же отметим, что в [6] вторые слагаемые (ν_{\min}^{\max}) в (1.14) отсутствуют.

Интервал устойчивости возмущенного движения определяется из равенства

$$\mu(\tau_1) + \nu_{\max}(\tau_1) = 0, \quad \Delta\tau = \tau_1 - \tau_0 \quad (1.16)$$

Изложенная теория в применении к уравнению

$$f'' + 2\varepsilon f' + (\omega^2 - \varphi(\tau))f = 0, \quad (\varepsilon = \text{const}, \omega = \text{const}) \quad (1.17)$$

приводит к следующему уравнению определения интервала времени устойчивости:

$$\sqrt{F} - \varepsilon + \frac{F'(F^2 + 1)}{4F(F + 1)} = 0 \quad (1.18)$$

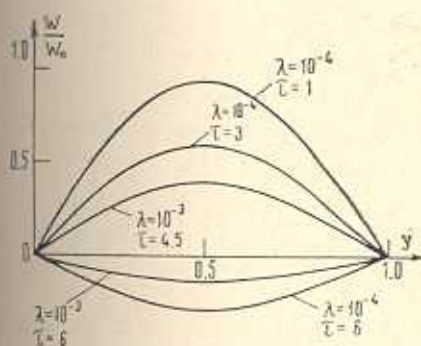
где $F(\tau) = \varphi(\tau) - \omega^2$, $\varepsilon = \frac{\psi_0}{4\pi}$, ψ_0 — коэффициент поглощения энергии.

Уравнение (1.18) получено в предположении, что время потери устойчивости отличается от времени, определяемого из

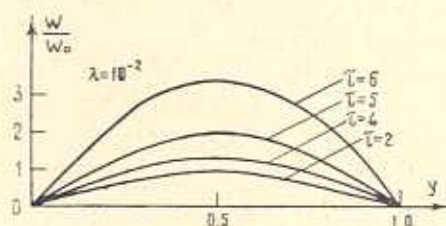
$$F(\tau) = \varphi(\tau) - \omega^2 = 0$$

Насколько нам известно, теория устойчивости для конечного интервала времени [6] для упругой системы была впервые применена в [8] и в других работах того же автора. Однако, в этих работах фактически неоднородность сжимающей силы по длине оболочки не учитывалась и там система, аналогичная (1.8), получилась с постоянными коэффициентами.

Изложенная теория при всей своей математической строгости имеет свои недостатки в применении к практическим задачам. Это можно видеть на таком примере. Пусть системе сообщаются начальные отклонения, которые намного меньше предела отклонений, допускаемого для данной конструкции. Выходит, что при дальнейшем движении системы, как только перемещения становятся больше, чем начально заданные, наступит неустойчивость. На самом деле, ведь это не обязательно. Поэтому возможен и еще другой подход.



Фиг. 2.



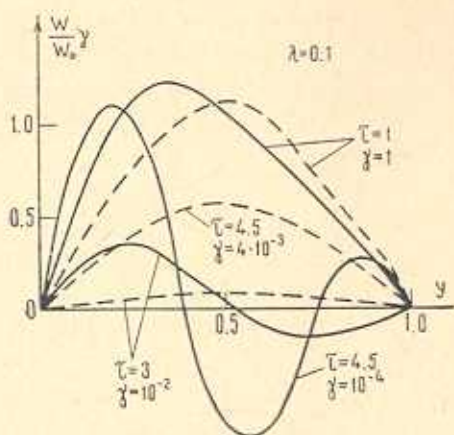
Фиг. 3.

Критерий потери устойчивости, предложенный в [2], по-видимому, наиболее целесообразно применить в реальных задачах. Суть его заключается в том, что система теряет устойчивость, как только перемещения становятся больше допустимых пределов для данной конструкции. И в этом отношении система (1.8) дает широкие возможности (машинный счет).

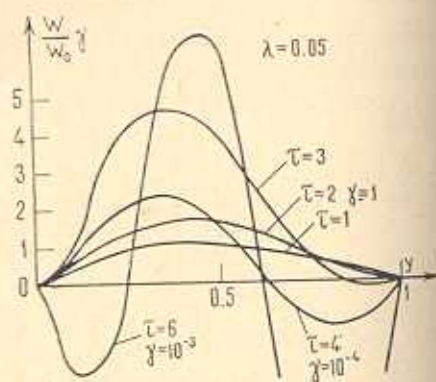
В целях выяснения влияния скорости нагружения на форму движения балки рассмотрим числовой пример.

На фиг. 2–5 изображены кривые возрастания прогибов балки при различных скоростях нагружения: $\lambda = 10^{-4}$, 10^{-3} , 10^{-2} , $5 \cdot 10^{-2}$, 10^{-1} , для случая $J/FE^2 = 10^{-3}$. Балке сообщается начальное отклонение в виде одной синусоидальной полуволны $\left(w \Big|_{\tau=0} = w_0 \sin \pi y, \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \right)$.

Подсчеты велись на машине „Наири“. Чтобы судить о точности вычислений, из системы (1.8) были взяты три и четыре уравнения. Результаты практически совпадают. Для выявления эффекта неоднородности сжимающей силы, помимо (1.8), была подсчитана также система (1.10) (τ — не параметр). При нагружениях $\lambda = 10^{-4}$, 10^{-3} , как видно из фиг. 2, происходят колебания вокруг равновесного состояния. При $\lambda = 10^{-2}$ (фиг. 3), чему соответствует эйлера нагрузка при первом прохождении волны, даже при $\tau = 2$, $\tau = 3$ прогибы меньше, чем начально сообщенные. При перечисленных нагружениях в интервале рассматриваемого времени можно и пренебречь неоднородностью сжимающей силы. Самая большая разница получается при $\lambda = 10^{-2}$, $\tau = 6$, $y = 0.5$ и равна 6%.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Результаты вычислений для скоростей нагружения $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$ и 10^{-1} представлены на фиг. 4 и 5. Чтобы полученные кривые были более или менее соразмерными, для приведенных моментов времени введены масштабы (γ), которые указаны на кривых. Например, на фиг. 4 для момента $\tau = 1$ отношение w/w_0 представлено в истинном значении ($\gamma = 1$), а уже при $\tau = 3$ это отношение уменьшено в сто раз ($\gamma = 10^{-2}$). При этих скоростях нагружения уже неоднородностью сжимающей силы пренебречь нельзя. На фиг. 4 сплошными кривыми изображены истинные прогибы, а штрихами — прогибы, получаемые, когда сжимающая сила принимается постоянной по длине.

Как видно из подсчетов и фигур, максимальные прогибы по абсолютной величине, получаемые с учетом неоднородности сжимающей силы, больше, чем без учета неоднородности. В качественном отношении из этих же фигур видно, что при малых скоростях нагружения в дальнейшем движении прогибы балки имеют вид $f_1(\tau) \sin \pi y$, подобный начально сообщенному — $w_0 \sin \pi y$. При быстрых же нагружениях прогибы

имеют вид $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin m\pi y$, отличный от начального (фиг. 4—5). Далее,

из фигур видно, что чем быстрее достигается определенная величина сжимающей силы, тем прогибы меньше (например, на фиг. 3 при $\tau=5$, а на фиг. 5 при $\tau=1$ достигается пятикратная эйлерова сила). При быстрых нагружениях, как и при ударе [1], целесообразно стать на точку зрения определения критической длины балки, или, что то же самое, определения критического момента времени (в отличие от статики, где для заданной длины определяется критическая сила). Критическое время можно приближенно определить из (1.2) или из системы (1.8), принимая $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \neq 0\right)$. Такое приближение соответствует факту, что потеря устойчивости балки отождествляется с условием равенства нулю „частот“ системы (1.8) — критерий колебательности движения. После этого момента в решении (1.8) появляется экспонента с показателем положительного знака, который начинает неограниченно расти. Приближением $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$ воспользовались также в [9, 10]. Но там было принято постоянство сжимающей силы по всей длине балки — $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Очевидно, что при такой постановке, кроме

эйлеровой силы, ничего нового получить нельзя. Однако, авторы делают вывод, что балка может воспринимать нагрузку выше эйлеровой.

Для уравнения (1.17), без диссипативного члена ($\varepsilon = 0$), условие равенства нулю „частоты“ будет

$$\omega^2 - \varphi(\tau) = 0 \quad (1.19)$$

Критическое время определится как наименьший корень уравнения (1.19). Между прочим, условие (1.19) получится и из (1.18), если учесть, что по теории [6] последние слагаемые ($v_{\min}^{(l)}$) отсутствуют и $\varphi^2 \ll 1$.

Условие равенства нулю „частоты“ системы (1.8) будет

$$\begin{vmatrix} \frac{J}{F l^2} \pi^4 - \pi^2 \left(a_0 + \frac{a_2}{2} \right) & -\pi^2 (a_1 + a_3) \dots \\ -\pi^2 (a_1 + a_3) & \frac{J}{F l^2} (2\pi)^4 - (2\pi)^2 \left(a_0 + \frac{a_4}{2} \right) \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (1.20)$$

откуда и находится критическое время $\tau_{кр}$ ($l_{кр} = l \tau_{кр}$). В [1] доказана нормальность определителя (1.20).

После возникновения потери устойчивости (неограниченно возрастающего решения системы (1.8)) сжимающая сила больше не передается на новые сечения. Поэтому часть балки, находящаяся вдали от критической длины, остается устойчивой. Этот факт обнаружен еще экспериментально, когда балка или оболочка при ударе теряет устойчивость локально [11, 12 и др.].

2. Во всех задачах продольного колебания, когда краевые условия заданы для перемещений, осевая сила всегда выразится в виде косинусоидального ряда (по y в интервале $[0, 1]$). Следовательно, из (1.2) всегда получится система обыкновенных уравнений, аналогичная (1.8). Проиллюстрируем это еще на одном примере.

Рассмотрим параметрические колебания балки, когда для продольного движения заданы граничные условия в перемещениях

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=1} = -u_0 \sin \theta \tau \quad (2.1)$$

Задачи параметрических колебаний с учетом продольных колебаний рассмотрены для случая, когда один конец неподвижен, а на другом конце действует пульсирующая сила, в [13], а для случая, когда на обоих концах заданы условия для силы, — в [14] другими методами.

Здесь нас будет интересовать установившийся режим продольных колебаний. Поэтому решение уравнения продольных колебаний с учетом условий (2.1) и сил затухания будет

$$u = -A_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\theta \tau - \varepsilon_k) \sin k \pi y \quad (2.2)$$

где

$$A_0 = u_0 \sin \theta \tau, \quad A_k = \frac{2u_0 (-1)^k \theta^2}{k\pi \sqrt{[(k\pi)^2 - \theta^2] + \frac{k^2 \theta^2 \psi^2}{4}}}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_k = \frac{k\psi\theta}{2[(k\pi)^2 - \theta^2]} \quad (2.3)$$

откуда для сжимающей силы имеем

$$P = EF \frac{1}{l} \left[u_0 \sin \theta \tau - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\theta \tau - \varepsilon_k) \cos k \pi y \right] \quad (2.4)$$

Коэффициенты a_k для системы (1.8) в этом случае суть следующие:

$$a_0 = \frac{u_0 \sin \theta \tau}{l}, \quad a_k = -\frac{A_k}{l} \sin(\theta \tau - \varepsilon_k) \quad (2.5)$$

Если устойчивость балки оценить в первом приближении

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \left[\frac{J}{Fl^2} (m\pi)^4 - (m\pi)^2 \left(a_0 + \frac{a_{2m}}{2} \right) \right] f_m = 0 \quad (2.6)$$

то для главной области параметрических колебаний будем иметь [13]

$$1 \pm p - \frac{\delta^2}{4\Omega^2} = 0 \quad (2.7)$$

где

$$p = \frac{Fl}{2J\pi^2} \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{A_2}{2}\right)^2 - u_0 A_2 \cos \varepsilon_2}, \quad \Omega^2 = \frac{J}{Fl^3} \pi^4 \quad (2.8)$$

В случае, когда частота возмущающего колебания равна одной из собственных частот продольного колебания и в выражении сжимающей силы появляется вековой член, то система (1.8) уже не приводится к виду уравнения Матье. Тогда об устойчивости балки должны судить, исходя из понятия устойчивости для конечного интервала времени (1.18) или (1.20).

3. В тех задачах, когда на одном конце задано перемещение, а на другом — сила, для того, чтобы получить систему (1.8), удобнее всего уравнение продольного движения решить методом распространяющихся волн и полученную тогда продольную силу разложить в ряд типа (1.6). Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пусть один конец стержня зажат, а на другом конце действует сжимающая сила, равномерно возрастающая во времени:

$$\frac{P}{EF} = -\frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = c_1 \tau, \quad u \Big|_{y=l} = 0 \quad (3.1)$$

Начальное отклонение и начальная скорость отсутствуют.

Сжимающая сила в сечениях балки определится формулой

$$\frac{P}{EF} = \begin{cases} c_1(\tau - y) & 0 \leq y \leq \tau \\ 0 & \tau < y \leq l \end{cases} \tau \leq 1 \\ \frac{P}{EF} = \begin{cases} c_1(\tau - y) & 0 \leq y \leq 1 \\ c_1 \tau & \tau < y \leq l \end{cases} 1 < \tau \leq 2 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

Разложение этой функции в косинусоидальный ряд дает

$$\frac{P}{EF} = \frac{c_1 \tau^2}{2} + \frac{2c_1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi\tau}{k^2} \cos k\pi y \quad (3.3)$$

Следовательно, коэффициенты a_k из (1.8) будут

$$a_0 = \frac{c_1 \tau^2}{2}, \quad a_k = \frac{2c_1}{\pi^2} \frac{1 - \cos k\pi\tau}{k^2} \quad (3.4)$$

Из литературы известно, что решения задач устойчивости п. 1 и п. 3 при медленных нагружениях не отличаются $\left(c_1 = \frac{c}{a}\right)$. В то же

время, как видно из (1.6) и (3.3), при быстрых нагружениях выражения для сжимающей силы принять постоянными нельзя. И критерий устойчивости (1.14) или (1.20) в этих задачах приводит совершенно к разным результатам.

4. Представляет определенный интерес случай импульсивного нагружения. Один конец стержня заземлен, а на другом конце при $\tau = 0$ прилагается внезапная сила, которая остается постоянной в течение времени $\Delta\tau$, после чего сила устраняется. Тогда сжимающая сила в сечениях балки будет

$$\frac{P}{EF} = \begin{cases} 0 & 0 \leq y < \tau - \Delta\tau \\ P_0 & \tau - \Delta\tau \leq y \leq \tau \quad \tau \leq 1 \\ 0 & \tau < y \leq 1 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (4.1)$$

и соответствующий косинусоидальный ряд будет иметь вид

$$\frac{P}{EF} = P_0 \Delta\tau \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi\tau \cos k\pi y \right) \quad (4.2)$$

с учетом, что $\Delta\tau \ll 1$.

Коэффициенты a_k для системы (1.8) будут

$$a_0 = P_0 \Delta\tau, \quad a_k = 2P_0 \Delta\tau \cos k\pi\tau \quad (4.3)$$

Отсюда видно, что если воспользоваться условием потери устойчивости (1.20) с учетом (4.3), при очень малом $\Delta\tau$, возможно балке сообщить силу, во много превышающую эйлерову силу, а потери устойчивости не будет. И при $\Delta\tau \rightarrow 0$ необходима бесконечно большая сила. Возможность балки воспринимать силу^а выше эйлеровой можно объяснить только неоднородностью сжимающей силы по ее длине.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 V 1970

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՅԱՆ

ԱՌԱՋԳՎԱԿԱՆ ՀԵՏԱՆԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐԱԳ
ԲԵՆԵԱՎՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Չողի ոչ գրգռված շարժման հավասարումը (երկայնական տատանումների) սկզբնական և եզրային բոլոր պայմաններով լուծվում է ճշգրիտ: Աղատ հեղձված հեծանի կախվածություն (1.2) հավասարումը, երբ հաշվի է առած սեղմող ուժի անհամասեռությունն ըստ ձողի երկարության, բերվում է (1.8) անվերջ բազմաանդամային հավասարումների սիստեմին (Կոչու խնդիր): Չողի

կայունությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը կամ կրիտիկական երկարությունը որոշվում են ելնելով վերջավոր ժամանակի համար կայունության տեսությունից [6.7]:

Դիտարկվում է ձողի երկայնական տատանումների կայունությունը, երբ ձողի մի եզրն ամրակցված է, իսկ մյուս եզրում արված են պայմանների տեղափոխման (ժամանակի գծային և պարբերական ֆունկցիաներ) կամ ուժի (ժամանակի գծային և իմպուլսիվ ֆունկցիաներ) համար:

Սեղմում ուժի անհամասեռությունը հաշվի առնելը ընդհանրապես բերում է նկվածքների մեծացմանը և ժամանակի ընթացքում շարժման ձևի փոփոխությանը:

THE STABILITY OF AN ELASTIC BEAM WITH RAPIDLY VARYING LOAD

L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The equations of nonperturbed motion (longitudinal vibrations) with given initial and boundary conditions are solved exactly. The stability equation of a free supported beam, taking into account the nonhomogeneity of compressing force, is reduced to the solution of an infinite system of differential equations (Cauchy problem). The critical length or critical time of instability is determined from the theory of stability for a finite time interval.

The cases of longitudinal vibrations of a rod where one of its edges is clamped and on the other edge the conditions are given for displacement (linear or periodic function of time) for the force (linear or impulsive function of time) are considered.

The nonhomogeneity of the compressing force results in the increasing of deflexions and in the variation of the motion form with time.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мовсисян Л. А. Об устойчивости балки при продольном ударе. Докл. АН АрмССР, т. XIX, № 3, 1969.
2. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. ИЛ, М., 1955.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1948.
4. Цинлер Г. Об устойчивости упругих систем. Проблемы механики. (сб. статей), ИЛ, М., 1959.
5. Вольмир А. С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении. Строительная механика и расчет сооружений, № 1, 1960.
6. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1953.
7. Абарян К. А. Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. ПММ, т. 32, вып. 6, 1968.
8. Борисенко В. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при продольном ударе. ПММ, т. X, вып. 6, 1964.

9. Джерард Дж. и Беккер Г. Поведение стержней при внезапном воздействии скорости. *Механика (сб. переводов)*, вып. 2, 1953.
10. Гольдсмит В. Удар. Изд-во лит. по стр., М., 1965.
11. Коппа А. О механизме выпучивания круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе. *Механика (сб. переводов)*, вып. 2, 1961.
12. Линдберг Х. Е. Потеря устойчивости тонкого стержня при ударе. *Прикл. механ. (труды общ-ва амер. инж.-мех.)*, № 2, 1965.
13. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
14. Ильин М. М., Колесников К. С. Параметрические колебания незакрепленного стержня. *Изв. АН СССР, МТТ*, № 5, 1969.