ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 6, 1970 Механика

Р. М. БАРСЕГЯН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ

Ниже рассматриваются решения некоторых задач неравномерной установившейся напорной фильтрации жидкости по закону Дарси в слабоискривленных многослойных пластах с учетом переменного перетока жидкости в водоносный горизонт через слабопроницаемые перемычки, а также дается решение задачи одномерной неравномерной фильтрации в одном пласте, мощность (T) и коэффициент фильтрации (K) которого являются произвольными дважды дифференцируемыми функциями.

В работах [1, 2] рассматривается неравномерное движение жидкости в горизонтах, мощность которых изменяется по линейному закону, причем в работе [1] не учитывается проницаемость подошвы и кровли водоносного горизонта, а в [2] кровля принимается проницаемой, но переток через нее считается постоянным по длине всего пласта. В обоих работах коэффициент фильтрации водоносного горизонта либо принимается постоянным, либо линейной функцией $K(x) = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{l} x$.

Пусть требуется найти напор $h = h(x)$ водоносного горизонта трехслойного прямоугольного массива, литологический разрез которого показан на фиг. 1. Верхний слой, где напор принимается постоянным ($h = h_0$), разделен от рассматриваемого горизонта слабопроницаемой прослойкой толщины $\overline{T}(x)$ и с коэффициентом фильтрации $\overline{K}(x)$. Подошва водоносного горизонта считается водонепроницаемой.

Найдем уравнение, которому должен удовлетворять напор $h(x)$ в нижнем слое массива. Для этого составим баланс фильтрационного расхода в бесконечно малом отсеке 1—1, 2—2 нижнего слоя массива. Согласно закону Дарси удельный фильтрационный расход, поступающий в рассматриваемый отсек через сечение 1—1, равен $q = -K(x)\,T(x)\frac{dh}{dx}$, где $K(x)$ — коэффициент фильтрации, а $T(x)$ — мощность водоносного горизонта. Удельный фильтрационный расход, выходящий через сечение 2—2 из рассматриваемого отсека, будет равен $q + dq = q + d\left[-K(x)\,T(x)\frac{dh}{dx}\right]$. Следовательно, дефицит количества жидкости в рассматриваемом отсеке в единицу времени составит

$$\left[-K'(x)\,T(x)\frac{dh}{dx} - K(x)\,T'(x)\frac{dh}{dx} - K(x)\,T(x)\frac{d^2h}{dx^2}\right]dx$$

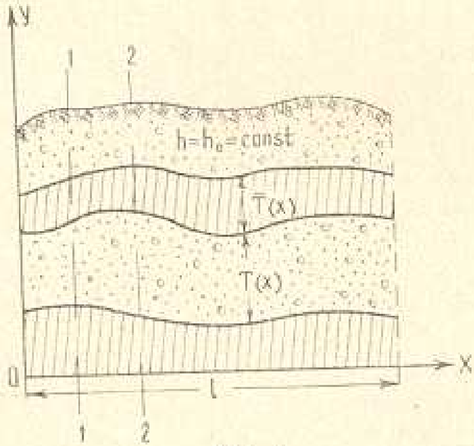
Этот дефицит равен удельному фильтрационному расходу, поступающему через кровлю рассматриваемого отсека, равному

$$-\overline{K}(x)\,\frac{h-h_0}{\overline{T}(x)}\,dx$$

Отсюда получим следующее уравнение баланса удельного фильтрационного расхода в рассматриваемом отсеке:

$$K(x)\,T(x)\frac{d^2h}{dx^2}+[K(x)\,T(x)]'\frac{dh}{dx}-\frac{\overline{K}(x)\,(h-h_0)}{\overline{T}(x)}=0 \qquad (1)$$

Уравнение (1) является общим уравнением одномерной неравномерной фильтрации в трехслойной толще вышеуказанной структуры. При решении уравнения (1) задаются граничные условия, которые могут быть трех видов (1-го, 2-го или 3-го родов).



Фиг. 1.

Рассмотрим несколько случаев решения уравнения (1).

1. Пусть вертикальное сечение массива имеет вид, показанный на фиг. 1. Если отсутствует переток снизу и сверху в водоносный горизонт с мощностью $T(x)$, то из (1) получим

$$\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{[K(x)\,T(x)]'}{T(x)\,K(x)}\,\frac{dh}{dx}=0 \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$h(x)=C_1\int\frac{dx}{K(x)\,T(x)}+C_2 \qquad (3)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые граничными условиями. В частном случае, если $K=\mathrm{const}$ и $T(x)=t\left[1+\frac{x}{l}(\psi-1)\right]$,

где $\psi=\frac{t_2}{t_1}$, а t_1 и t_2 — мощности водоносного горизонта соответственно в сечениях $x=0$ и $x=l$ (случай расширяющегося пласта по направлению движения) (см. фиг. 2), то из (3) с учетом граничных условий $h|_{x=0}=h_1$ и $h|_{x=l}=h_2$ получим решение В. И. Давидовича [1]

$$h = h_1 - \frac{\lg\left|\frac{x}{l}\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)+1\right|}{\lg\frac{t_2}{t_1}}(h_1-h_2)$$

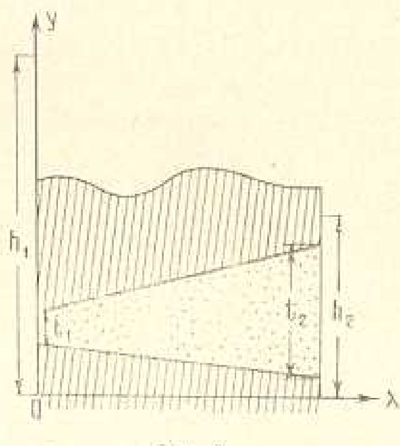
Если же принять $K(x)=K_1+\frac{K_2-K_1}{l}x$, где K_1 и K_2 — коэффициенты фильтрации водоносного горизонта в сечениях соответственно $x=0$ и $x=l$ (фиг. 2), то из (3) с учетом условий $h|_{x=0}=h_1$ и $h|_{x=l}=h_2$ получим решение $h(x)$, совпадающее с решением соответственной задачи, рассмотренной в работе [1]:

$$h(x) = h_1 - \frac{\lg\dfrac{(\tau-1)\frac{x}{l}+1}{(\chi-1)\frac{x}{l}+1}}{\lg\dfrac{\tau}{\chi}}(h_1-h_2)$$

где

$$\chi=\frac{K_2}{K_1},\quad \tau=\frac{t_2}{t_1}$$

Как частный случай, из (3) аналогично можно получить решения работы [1] для случая суживающегося пласта.



Фиг. 2.

2. Принимая в последнем слагаемом уравнения (1) $h-h_0=z=\text{const}$, что обычно практикуется в приближенной гидравлической теории фильтрации, получим

$$K(x)\,T(x)\frac{d^2h}{dx^2}+[K(x)\,T(x)]'\frac{dh}{dx}-\frac{\overline{K}(x)\,\varepsilon}{\overline{T}(x)}=0 \tag{4}$$

Общим решением уравнения (4) является функция

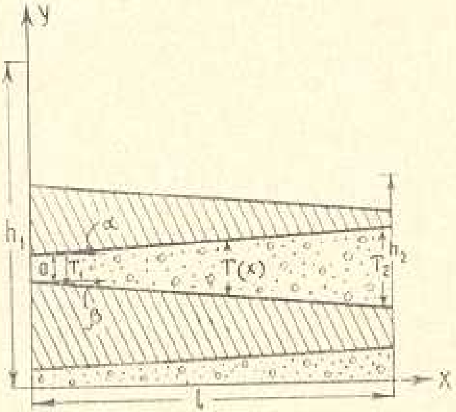
$$h(x)=\int\frac{1}{K(x)\,T(x)}\left|\,C_1+\varepsilon\int\frac{\overline{K}(x)}{\overline{T}(x)}dx\,\right|dx+C_2 \tag{5}$$

где C_1 и C_2—постоянные, определяемые из граничных условий. В частном случае, если в (5) принять $\dfrac{\overline{K}(x)}{\overline{T}(x)}=-1$, $\quad T(x)=T_1+x\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$, $K(x)=K_1+\dfrac{K_2-K_1}{l}x$ (см. фиг. 3), получим решение задачи, совпадающее с решением В. А. Барона [2]

$$h=\frac{1}{\dfrac{\chi-1}{l}\,T_1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}\left\{\,C_1\ln\frac{1-\dfrac{\chi-1}{l}x}{T_1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon l}{K_1(\chi-1)}\ln\left(1+\frac{\chi-1}{l}x\right)-\frac{\varepsilon T_1}{K_2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}\ln\left[T_1+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)x\right]\right\}+C_2$$

где $\chi=\dfrac{K_2}{K_1}$, а остальные параметры даны на фиг. 3.



Фиг. 3.

3. Рассмотрим схему, приведенную на фиг. 4.

Принимая $T(x)=T_0-\overline{T}-mx$ и $T_0-\overline{T}>lm$ (где $m=\operatorname{tg}\beta$), а K, $\overline{T}$ и $\overline{K}$ постоянными, из уравнения (1) получим

$$(T_0-\overline{T}-mx)\frac{d^2h}{dx^2}-m\frac{dh}{dx}-\frac{\overline{K}(h-h_0)}{K\overline{T}}=0$$

или

$$z\frac{d^2H}{dz^2}+\frac{dH}{dz}-\lambda H=0 \tag{6}$$

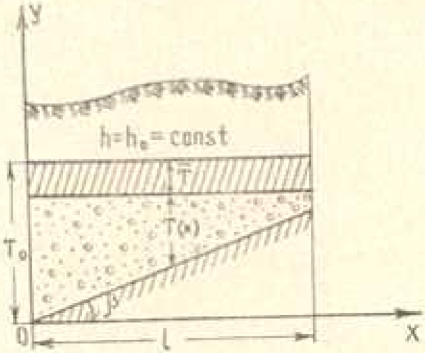
где обозначены:

$$z=\frac{m}{T_0-\overline{T}}-x,\quad H=h-h_0,\quad \lambda=\frac{\overline{K}}{Km\overline{T}}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$H=C_1 I_0(2\sqrt{\lambda z})+C_2 K_0(2\sqrt{\lambda z})$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.



Фиг. 4.

Если в (1) параметры $\overline{K}$, $\overline{T}$ принять постоянными, $T=T_0-\overline{T}-mx$, а $K(x)=K_1+\frac{K_2-K_1}{l}x$, то получим

$$(K_1+rx)(R-mx)\frac{d^2h}{dx^2}+[r(R-mx)-(K_1+rx)m]\frac{dh}{dx}-$$

$$-\overline{K}\,\frac{h-h_0}{\overline{T}}=0 \tag{7}$$

где $r=\frac{K_2-K_1}{l}$, $\quad R=T_0-\overline{T}$

Подстановкой $h=h_0+H(\xi)$ и $x=x_1+(x_2-x_1)\xi$, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$mrx^2+(K_1m-Rr)x-K_1R=0$$

уравнение (7) приводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса:

$$\xi(\xi-1)\frac{d^2H}{d\xi^2}+\left[2\xi+\frac{rR-K_1m-2rmx_1}{mr(x_1-x_2)}\right]\frac{dH}{d\xi}-$$

$$-\frac{\overline{K}}{mr\overline{T}}(h-h_0)=0$$

решение которого дается с помощью гипергеометрического ряда

$$h(\xi) = h_0 + C_1 F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) + C_2 \xi^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \xi)$$

где

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \xi^n$$

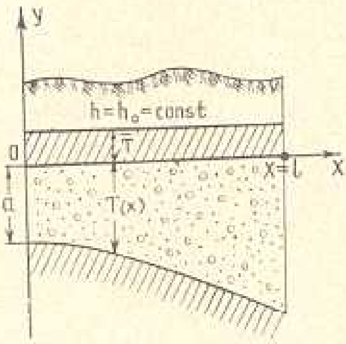
$$\gamma = \frac{-2rmx_1 + rR - K_1 m}{mr(x_2 - x_1)}$$

а параметры α и β определяются из системы равенств

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -\frac{\overline{K}}{mr\overline{T}}$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

4. Пусть непроницаемая нижняя граница водоносного горизонта в вертикальном сечении, как это показано на фиг. 5, имеет уравнение $y = ae^{bx}$, где a и b — постоянные ($a < 0$, $b > 0$) и пусть коэффициенты



Фиг. 5.

фильтрации слабопроницаемой прослойки $(\overline{K})$ и нижнего водоносного горизонта (K) — постоянные величины. Тогда из уравнения (1) получим

$$\frac{d^2h}{dx^2} + b\frac{dh}{dx} - \frac{\overline{K}}{ak\overline{T}} e^{-bx}(h - h_0) = 0$$

или

$$\frac{d^2H}{dz^2} - \frac{dH}{dz} + \lambda e^z H = 0 \qquad (8)$$

где

$$H = h - h_0, \quad \lambda = -\frac{\overline{K}}{aKTb^2}, \quad z = -bx \quad (\lambda > 0)$$

Общим решением уравнения (8) является функция

$$H(z) = H_1 \left[C_1 \int \frac{e^{-2z}}{H_1^2} dz + C_2 \right]$$

где $H_1 = e^{\frac{z}{2}} J_1 (2 \sqrt{\lambda}\, e^{\frac{z}{2}})$, J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3 VI 1970

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՀՈՂԱՇԵՐՏԵՐՈՒՄ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Արտածված է հեղուկի միաչափ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը եռաշերտ ուղղանկյան հողային զանգվածի համար, որտեղ հողաշերտերը միմյանց հետ կապված են հիդրավլիկորեն: Հիմնական ջրատար շերտի հզորությունը և ֆիլտրացիայի գործակիցը դիտվում են որպես կամայական ֆունկցիաներ մեկ արգումենտից: Տրված է ստացված հավասարման լուծումը մի քանի կարևոր և գործնականում հաճախ հանդիպող դեպքերի համար, ինչպես նաև բերված է խնդրի ընդհանուր լուծումը, երբ հիմնական ջրատար շերտը վերից և վարից սահմանափակված է ջրամերժ շերտերով:

SOME PROBLEMS ON NONUNIFORM FILTRATION THROUGH MULTILAYER BEDS

R. M. BARSEGHIAN

Summary

A differential equation is derived for one-dimensional fluid motion through rectangular three-layer mass of earth, the layers being related to one another hydraulically. The thickness and the filtration coefficient of the main water carrying layer are assumed to be arbitrary functions in one argument. The solution of the equation derived is given for some characteristic cases frequently observed in practice. A general solution of the problem is also suggested for the case where the main water carrying layer is confined between waterproof layers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Давидович В. Н.* Некоторые вопросы неравномерного движения подземных вод в артезианских пластах. Записки Ленинградского Горного института, т. XXIII, 1949.
2. *Барон В. А.* Неравномерное движение подземных вод в пласте переменной мощности при изменяющемся значении коэффициента фильтрации вдоль него. Вопросы энергетики, гидротехники и горного дела. Изд. АН Узб. ССР, Ташкент, 1961.