

Р. А. МЕЖЛУМЯН, Р. Ш. СОЛОМОНЯН

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО СКОСА ПОТОКА ЗА КРЫЛОМ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Вопрос определения нестационарного скоса потока за крылом имеет большое практическое значение при решении задачи устойчивости и управляемости крылатого летательного аппарата, а также при определении аэродинамических характеристик второго крыла летательного аппарата системы «тандем». Аэродинамические характеристики второго крыла выражаются через скос потока, создаваемого передним крылом. Вопрос определения нестационарных аэродинамических характеристик изолированного крыла рассмотрен в работах [1—3, 5]. В книгах [1, 5] даются общие формулы потенциала возмущений и аэродинамических характеристик крыла. Введение коэффициентов вращательных производных [2, 3] дает возможность доводить расчеты до числа. Вопрос определения нестационарного скоса потока рассмотрен в работах [4, 7, 9]. В работе [6] авторы получили решение задачи в замкнутом виде для скоса потока за профилем, совершающим синусоидальные колебания при малых скоростях потока. В работах [4, 5, 9] дана общая постановка задачи об определении скоса потока на колеблющемся крыле. Автор работы [4] задачу ставит в довольно общем виде и решает для дозвукового движения. При сверхзвуковой скорости он представляет скос потока как сумму трех слагаемых и определяет одно из этих слагаемых у задней кромки крыла для малых чисел Струхала.

В настоящей статье дано полное решение задачи определения скоса потока за крылом для конечных значений числа Струхала в линейной постановке на основе представления потенциала возмущений через коэффициенты вращательных производных.

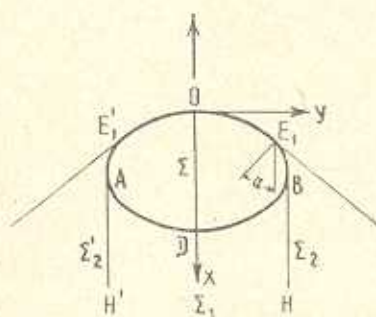
1. *Постановка задачи.* Рассмотрим движение тонкого слабоизогнутого крыла с малым углом атаки в идеальной жидкости при отсутствии внешних сил. Будем считать, что основное движение крыла является прямолинейным поступательным движением с постоянной сверхзвуковой скоростью U . Предположим также, что, кроме основного движения, крыло совершает малые добавочные неустановившиеся колебания. Движение считаем безвихревым, а кромки крыла сверхзвуковыми.

Введем систему координат $Ox_1y_1z_1$, жестко скрепленную с крылом, которое в плане имеет форму $AOBDA$ (фиг. 1). Время обозначим через t_1 . В линейной теории эта задача сводится к решению волно-

вого уравнения, которое дано в работе [1] как запаздывающий потенциал источника, движущегося прямолинейно, с постоянной скоростью U и с изменяющейся интенсивностью.

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = & -\frac{1}{\pi} \int \int_{\hat{v}(x_1, y_1, z_1)} \left[\frac{\partial \psi(\xi_1, \eta_1, z_1)}{\partial z_1} \right]_{z_1=0} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{ip^* M^2}{M^2 - 1} \frac{x_1 - \xi_1}{b} \right] \cos \left[\frac{p^* M}{M^2 - 1} \frac{r}{b} \right] \frac{d\xi_1 d\eta_1}{r} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 - k^2(y_1 - \eta_1)^2 - k^2 z_1^2}$, $k = \sqrt{M^2 - 1}$, $M = \frac{U}{a}$ — число Маха, p^* — число Струаля, b — характерный линейный размер (хода крыла), x_1, y_1, z_1 — координаты той точки, в которой вычисляет-



Фиг. 1.

ся потенциал. Область интегрирования $\hat{v}(x_1, y_1, z_1)$ есть часть плоскости $x_1 y_1$, которая находится внутри обратного конуса возмущений с вершиной в рассматриваемой точке. Потенциал возмущенных скоростей $\psi(x_1, y_1, z_1, t_1)$ представим при помощи коэффициентов вращательных производных [2, 4]:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \psi_0(x_1, y_1, z_1) + \psi_1^{(1)} q_1 + \psi_1^{(2)} q_1 + \psi_3^{(1)} q_3 + \\ & + \psi_3^{(2)} q_3 + \psi_4^{(1)} q_4 + \psi_4^{(2)} q_4 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функция ψ_0 соответствует основному установившемуся движению крыла. В представлении (1.2) обозначены

$$\begin{aligned} q_1 = \alpha = \alpha(t_1), \quad q_3 = \omega_x = \frac{\Omega_x(t_1) b}{U}, \quad q_4 = \omega_y = \frac{\Omega_y(t_1) b}{U}, \\ \dot{q}_1 = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha(t_1)}{dt_1} \frac{b}{U}, \quad \dot{q}_3 = \dot{\omega}_x = \frac{d\Omega_x(t_1)}{dt_1} \frac{b^2}{U^2}, \quad \dot{q}_4 = \dot{\omega}_y = \frac{d\Omega_y(t_1)}{dt_1} \frac{b^2}{U^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где α — переменная часть угла атаки, Ω_x, Ω_y — проекции вектора угловой скорости на соответствующие оси связанной системы координат;

α , ω_x , ω_y — безразмерные угловые скорости, $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$ — безразмерные угловые ускорения. Предполагается, что эти параметры являются малыми величинами по сравнению с единицей.

Аналогичным образом, представим через вращательные производные [4] нестационарный скок потока:

при симметричных движениях

$$\frac{V_{z_1}}{U} = \varepsilon_1^{(1)} \dot{q}_1 + \varepsilon_1^{(2)} \dot{q}_1 + \varepsilon_1^{(3)} \dot{q}_3 + \varepsilon_1^{(4)} \dot{q}_4 \quad (1.4)$$

при антисимметричных движениях

$$\frac{V_{z_1}}{U} = \varepsilon_3^{(1)} \dot{q}_3 + \varepsilon_3^{(2)} \dot{q}_3 \quad (1.5)$$

где V_{z_1} — составляющая возмущенной скорости по направлению оси oz_1 .

В формулах (1.4) и (1.5) коэффициенты

$$\varepsilon_v^{(1)} = \frac{1}{U} \frac{\partial \psi_v^{(1)}}{\partial z_1}, \quad \varepsilon_v^{(2)} = \frac{1}{U} \frac{\partial \psi_v^{(2)}}{\partial z_1} \quad (v = 1, 3, 4) \quad (1.6)$$

называются коэффициентами вращательных производных скоков, которые являются функциями чисел Маха и Струхала, а также координат точки, в которой вычисляются скоки, и не зависят от времени.

Предположим, что малые добавочные колебания крыла совершает по гармоническому закону, т. е. кинематические параметры зависят от времени следующим образом:

$$q_v = A_v e^{j p_v t_1}, \quad \dot{q}_v = A_v j p_v^* e^{j p_v^* t_1} \quad (v = 1, 3, 4) \quad (1.7)$$

где $j = \sqrt{-1}$, A_v — амплитудные значения кинематических параметров, p_v — круговая частота, $p_v^* = \frac{p_v b}{U}$ — число Струхала.

В этом случае выражение (1.2) выглядит так:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial \psi_0}{\partial z_1} + \sum_v A_v e^{j p_v t_1} \left[\psi_v^{(1)} + j p_v^* \psi_v^{(2)} \right] \quad (1.8)$$

а нормальная производная потенциала возмущений —

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_1}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial \psi_0}{\partial z_1} + \sum_v A_v e^{j p_v t_1} \left[\frac{\partial \psi_v^{(1)}}{\partial z_1} + j p_v^* \frac{\partial \psi_v^{(2)}}{\partial z_1} \right] \quad (1.9)$$

Введем безразмерные координаты и время

$$x = \frac{2}{\sqrt{\mu c}} x_1, \quad y = \frac{2}{l} y_1, \quad z = \frac{2}{l} z_1, \quad t = \frac{U}{b} t_1$$

а также обозначения для неустановившейся части потенциала возмущений

$$\Phi_v^{(i)}(x, y, z) = \frac{2}{lU} \varphi_v^{(i)}(x, y, z), \quad \frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z} = \frac{2}{lU} \frac{\partial \varphi_v^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} \quad (1.10)$$

(i = 1, 2; v = 1, 3, 4)

С учетом обозначений (1.10) подставим (1.8) и (1.9) в формулу (1.1), после чего приравняем множители при одноименных амплитудах A_ν и выделим действительные и мнимые части полученных выражений. В результате получаются следующие формулы в безразмерных декартовых координатах для неустановившейся части потенциала возмущений:

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(1)}(x, y, z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{(x, y, z)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] + \right. \\ & \left. + p_*^* \left(\frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right\} \times \\ & \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (1.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(2)}(x, y, z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{(x, y, z)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{p_*^*} \left(\frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right\} \times \\ & \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (1.12) \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$, $\lambda = \frac{l^2}{S}$ — относительное удлинение,

S, l — площадь и размах крыла.

Формулы (1.11) и (1.12) впервые получены М. К. Фурсовым [10].

Если будут известны нормальные производные $\frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z}$ и $\frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z}$ в области интегрирования, то по формулам (1.11) и (1.12) можно будет вычислять $\Phi_v^{(1)}$ и $\Phi_v^{(2)}$.

2. *Граничные условия при гармоническом колебании.* Нормальные производные на плоскости xy определим из следующих граничных условий.

Вперед обтекающей поверхности конусов возмущений с вершинами в точках передней кромки крыла воздух не возмущен, поэтому в каждой точке этой части пространства

$$\Phi_v^{(i)}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_v^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2; v = 1, 3, 4) \quad (2.1)$$

На поверхности крыла даны сами нормальные производные потенциала из условий плавного обтекания и представляются в виде [1.3]:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -1, \quad \left. \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{iy}{4}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{ikx}{4}, \quad \left. \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(2)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$(i=1, 2; \nu=1, 3, 4)$$

Область, заключенная между прямыми BH и AH' (Σ_1 на фиг. 1) и простирающаяся до бесконечности по направлению потока, начинаясь от задней кромки, называется вихревой пеленой. Линии BH и AH' параллельны направлению набегающего потока, а точки A и B суть концевые точки крыла. Из условия непрерывности давления на этой области получаются условия

$$\frac{\partial \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, 0)}{\partial x} - \frac{ik}{4} p^* \Phi_{\nu}^{(2)}(x, y, 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\nu}^{(2)}(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{ik}{4} \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, 0) = 0 \quad (2.4)$$

Область Σ_2 (Σ_2') — это часть плоскости xy , находящейся внутри конуса Маха, с вершиной в точке E (E'), вне вихревой пелены и вне поверхности крыла. На областях Σ_2 и Σ_2' выполняются условия

$$\Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, 0) = 0 \quad (i=1, 2; \nu=1, 3, 4) \quad (2.5)$$

Для дальнейших расчетов удобнее условия (2.3) и (2.4) проинтегрировать и представить их в следующем виде:

$$\Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, 0) = f_{\nu}^{(1)}(y) \cos \left\{ \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right\} +$$

$$+ p^* f_{\nu}^{(2)}(y) \sin \left\{ \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right\} \quad (2.6)$$

$$\Phi_{\nu}^{(2)}(x, y, 0) = -\frac{1}{p^*} f_{\nu}^{(1)}(y) \sin \left\{ \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right\} +$$

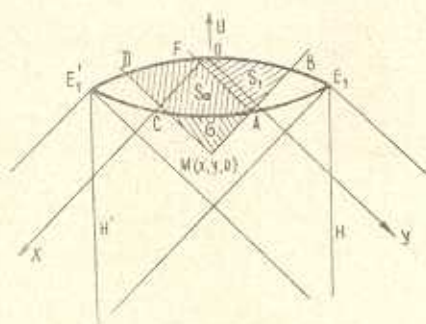
$$+ f_{\nu}^{(2)}(y) \cos \left\{ \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right\} \quad (2.7)$$

где $x = \bar{\varphi}(y)$ — уравнение задней кромки крыла, а $f_{\nu}^{(1)}(y)$ и $f_{\nu}^{(2)}(y)$ — известные функции, равные значениям соответственно функций $\Phi_{\nu}^{(1)}$ и $\Phi_{\nu}^{(2)}$ на задней кромке крыла. Объединяя условия (2.5), (2.6) и (2.7), получим

$$\Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, 0) = G_{\nu}^{(i)}(x, y), \quad (i=1, 2; \nu=1, 3, 4) \quad (2.8)$$

где $G_{\nu}^{(i)}$ обращаются в нуль для областей Σ_2 и Σ_2' и равны правым частям условий (2.6) и (2.7) для вихревой пелены.

3. *Интегральные уравнения для определения нормальных производных.* Условия (2.8) дают возможность при помощи формул (1.11) и (1.12) составить интегральные уравнения для определения нормальных производных функций $\Phi^{(i)}(x, y, z)$. На плоскости xu возьмем некоторую точку $M(x, y, 0)$ и проведем из нее обратный конус Маха (фиг. 2). Рассмотрим тот случай, когда следы конуса пересекаются с поверхностью крыла. В этом случае область интегрирования $\delta(x, y)$ состоит из областей: $s = s_0 + s_1$ — на крыле, и $\varepsilon(x, y)$ — на вихревой пелене (фиг. 2). В области s нормальные производные известны. Их обозначим $\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial z}\right)_{z=0} = B^{(i)}(x, y)$. На области ε эти производные неизвестны, они подлежат определению. Их обозначим $\theta^{(i)}(x, y)$.



Фиг. 2.

В принятых обозначениях для точки M из формул (1.11) и (1.12) получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\delta(x, y)} \left\{ \theta^{(1)}(\xi, \eta) \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + p_* \theta^{(2)}(\xi, \eta) \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} = -\pi G_N^{(1)}(x, y) - \right. \\
 & \quad \left. - \iint_{s(x, y)} B^{(1)}(\xi, \eta) \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \right. \quad (3.1) \\
 & \quad \left. \iint_{\varepsilon(x, y)} \left\{ \theta^{(2)}(\xi, \eta) \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] - \frac{1}{p_*} \theta^{(1)}(\xi, \eta) \times \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_v^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_v^* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} = \\ & = -\pi G_v^{(2)}(x, y) - \int \int_{s(x, y)} B_v^{(1)}(\xi, \eta) \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_v^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \\ & \quad \times \cos \left[\frac{\lambda p_v^*}{4} \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этой системе правые части являются известными функциями и решение ее ищем разложением подынтегральных функций обеих частей уравнений в ряд по степеням $\omega = \frac{\lambda k}{4} p_v^*$.

Представим произведения тригонометрических функций как сумму косинусов и синусов, потом разложим каждое слагаемое в ряд. После несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} & \cos \left[\frac{\lambda k}{4} p_v^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda k}{4} p_v^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A_{2n} \omega^{2n} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \sin \left[\frac{\lambda k}{4} p_v^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda k}{4} p_v^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] = \\ & = \frac{\xi 1}{2} \left\{ \sin \left[\frac{\lambda k}{4} p_v^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) + \frac{\lambda k}{4} p_v^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \sin \left[\frac{\lambda k}{4} p_v^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) - \frac{\lambda k}{4} p_v^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] \right\} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A_{2n+1} \omega^{2n+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$A_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^{2j} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)^{2n-j} (x - \xi)^{2(n-j)} \left(\frac{r}{k^2} \right)^{2j} \quad (3.5)$$

$$A_{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{2j} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)^{2n+1-j} (x - \xi)^{2(n-j)+1} \left(\frac{r}{k^2} \right)^{2j} \quad (3.6)$$

C_{2n}^{2j} и C_{2n+1}^{2j} — биномиальные коэффициенты.

Разложим функцию $U_v^{(i)}(\xi, \eta)$ тоже в степенной ряд

$$U_v^{(i)}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{v,n}^{(i)}(\xi, \eta) \omega^n \quad (i=1, 2; \nu=1, 3, 4) \quad (3.7)$$

Перемножим эти ряды, после чего получим

$$\begin{aligned} \bar{b}_v^{(i)}(\xi, \eta) \cos \left[\omega \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\omega \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{r}{k^2}} \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} A_{2(n-g)} \bar{b}_{v, 2g-n}^{(i)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_v^{(i)}(\xi, \eta) \sin \left[\omega \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\omega \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{r}{k^2}} \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{g=n}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} A_{2(n-g)+1} \bar{b}_{v, 2g-n}^{(i)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $m = \frac{n}{2}$, если n — число четное и $m = \frac{n+1}{2}$, если n — число нечетное.

Аналогичным образом получаются разложения правых частей условий (2.6) и (2.7)

$$f_v^{(i)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{v,n}^{(i)}(y) \omega^n \quad (i=1, 2; v=1, 3, 4) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(1)}(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} f_{v, 2g-n}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)} + \\ + \frac{4}{ik} \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} f_{v, 2g-n}^{(2)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(2)}(x, y, 0) = -\frac{\lambda k}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} \times \\ \times f_{v, 2g-n}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \times \\ \times f_{v, 2g-n}^{(2)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставим ряды (3.8), (3.9), (3.11) и (3.12) в систему интегральных уравнений. Предполагая равномерную сходимость рядов (3.8) и (3.9) относительно переменных ξ и η , после подстановки в систему (3.1) и (3.2), интегрируем их почленно. В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \int \int_{x(x,y)} \left\{ A_{2(n-g)} \bar{b}_{v, 2g-n}^{(1)}(\xi, \eta) + \right. \\ \left. + \frac{4}{ik} \frac{\omega^2}{2(n-g)+1} A_{2(n-g)+1} \bar{b}_{v, 2g-n}^{(2)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=m}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \left\{ \iint_{z(x,y)} B_v^{(1)}(\xi, \eta) A_{2(n-g)} \frac{d\xi d\eta}{r} + \right. \\
&+ \pi f_{v, 2g-n}^{(1)}(y) [x - \bar{z}(y)]^{2(n-g)} + \frac{4\pi\omega^2}{ik[2(n-g)+1]} \times \\
&\quad \left. \times f_{v, 2g-n}^{(2)}(y) [x - \bar{z}(y)]^{2(n-g)+1} \right\} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=m}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \iint_{z(x,y)} \left\{ A_{2(n-g)} \theta_{v, 2g-n}^{(2)}(\xi, \eta) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{ik}{4} \frac{A_{2(n-g)+1}}{2(n-g)+1} \theta_{v, 2g-n}^{(1)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = \\
&= \frac{ik}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=m}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \left\{ \iint_{z(x,y)} A_{2(n-g)+1} B_v^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{2(n-g)+1} f_{v, 2g-n}^{(1)}(y) [x - \bar{z}(y)]^{2(n-g)+1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\pi}{ik} f_{v, 2g-n}^{(2)}(y) [x - \bar{z}(y)]^{2(n-g)} \right\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Сравнивая в уравнениях (3.13) и (3.14) коэффициенты при одинаковых степенях ω , получим системы интегральных уравнений для определения неизвестных функций $\theta_{v,n}^{(i)}(x, y)$

$$\iint_{z(x,y)} \left\{ \theta_{v,n}^{(1)}(\xi, \eta) + \frac{4}{ik} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) (x - \bar{z}) \theta_{v, n-2}^{(2)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{v,n}^{(1)}(x, y) \quad (3.15)$$

$$\iint_{z(x,y)} \left\{ \theta_{v,n}^{(2)}(\xi, \eta) - \frac{ik}{4} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) (x - \bar{z}) \theta_{v,n}^{(1)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{v,n}^{(2)}(x, y) \quad (3.16)$$

где обозначены

$$\begin{aligned}
F_{v,n}^{(1)}(x, y) &= \sum_{g=m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-g-1}}{[2(n-g)]!} \iint_{z(x,y)} A_{2(n-g)} \theta_{v, 2g-n}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} + \\
&+ \frac{4}{ik} \sum_{g=m}^{n-2} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)-1]!} \iint_{z(x,y)} A_{2(n-g)-1} \theta_{v, 2g-n}^{(2)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} + \\
&+ \sum_{g=m}^n \frac{(-1)^{n-g-1}}{[2(n-g)]!} \left\{ \iint_{z(x,y)} A_{2(n-g)} B_v^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \pi \left[x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-2)} f_{\nu, 2g-n}^{(1)}(y) \Big\} -$$

$$- \frac{4\pi}{ik} \sum_{g=m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-g-1}}{[2(n-g)-1]!} \left[x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-g)-1} f_{\nu, 2g-n}^{(2)}(y) \quad (3.17)$$

$$F_{\nu, n}^{(2)}(x, y) = \sum_{g=m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-g+1}}{[2(n-g)]!} \iint_{s(x, y)} \left[A_{2(n-g)} \theta_{\nu, 2g-n}^{(2)}(\xi, \eta) - \right.$$

$$- \frac{ik}{2(n-g)+1} A_{2(n-g)+1} \theta_{\nu, 2g-n}^{(1)}(\xi, \eta) \Big] \frac{d\xi d\eta}{r} +$$

$$+ \frac{ik}{2(n-g)+1} \iint_{s(x, y)} A_{2(n-g)+1} B_{\nu}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} -$$

$$- \frac{ik\pi}{4[2(n-g)+1]} \left[x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-g)+1} f_{\nu, 2g-n}^{(1)}(y) +$$

$$+ \left. \left[x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-g)} f_{\nu, 2g-n}^{(2)}(y) \right\} \quad (3.18)$$

Как видно, уравнение (3.17) справедливо для $n \geq 2$, а (3.18) — для $n \geq 1$.

Приравняв нулевые степени в уравнениях (3.13) и (3.14), получим систему для определения $\theta_{\nu, 0}^{(1)}$ и $\theta_{\nu, 0}^{(2)}$:

$$\iint_{s(x, y)} \theta_{\nu, 0}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = - \iint_{s(x, y)} B_{\nu}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} - \pi f_{\nu, 0}^{(1)}(y) \quad (3.19)$$

$$\iint_{s(x, y)} \left[\theta_{\nu, 0}^{(2)}(\xi, \eta) - \frac{ik}{4} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \theta_{\nu, 0}^{(1)}(\xi, \eta) \right] \frac{d\xi d\eta}{r} =$$

$$= \frac{i}{4} \left(k + \frac{1}{k} \right) \iint_{s(x, y)} B_{\nu}^{(1)}(\xi, \eta) (x - \xi) \frac{d\xi d\eta}{r} -$$

$$- \frac{\pi ik}{4} \left[x - \bar{\varphi}(y) \right] f_{\nu, 1}^{(1)}(y) + \pi f_{\nu}^{(1)}(y) \quad (3.20)$$

Аналогичным образом, приравняв коэффициенты при первой степени ω , получим

$$\iint_{s(x, y)} \theta_{\nu, 1}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = \iint_{s(x, y)} B_{\nu}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} - \pi f_{\nu, 1}^{(1)}(y) \quad (3.21)$$

Как легко заметить, функции $\theta_{\nu, 0}^{(1)}$ и $\theta_{\nu, 0}^{(2)}$ определяются независимо от других функций $\theta_{\nu, n}^{(i)}$ соответственно из уравнений (3.19) и (3.21). После подстановки значения $\theta_{\nu, 0}^{(1)}$ в уравнение (3.20) можно опреде-

лить $\xi_{\nu, n}^{(2)}$. Из уравнения (3.15) видно, что оно содержит только одну неизвестную функцию — функцию $\xi_{\nu, n}^{(1)}$, так как $\xi_{\nu, n-2}^{(2)}$ в этом уравнении уже известно из решений предыдущих уравнений. Подставляя решение уравнения (3.15), т. е. функцию $\xi_{\nu, n}^{(1)}$, в уравнение (3.16), получим новое уравнение относительно функции $\xi_{\nu, n}^{(2)}$.

Таким образом, можно эту систему представить в виде

$$\iint_{\Omega(x, y)} \xi_{\nu, n}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\nu, n}^{(1)}(x, y) \quad (3.22)$$

$$\iint_{\Omega(x, y)} \xi_{\nu, n}^{(2)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\nu, n}^{(2)}(x, y) \quad (3.23)$$

где обозначены

$$F_{\nu, n}^{(1)}(x, y) = F_{\nu, n}^{(1)}(x, y) - \frac{4}{ik} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \iint_{\Omega(x, y)} (x-\xi) \xi_{\nu, n-2}^{(2)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (3.24)$$

$$F_{\nu, n}^{(2)}(x, y) = F_{\nu, n}^{(2)}(x, y) + \frac{ik}{4} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \iint_{\Omega(x, y)} (x-\xi) \xi_{\nu, n}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (3.25)$$

Аналогичным образом уравнение (3.20) тоже можно видоизменить. Таким образом, можно определить все коэффициенты разложения (3.7). Если точка M будет находиться на одной из областей Σ_2 и Σ_1' , то в выражениях (3.17) и (3.18) коэффициенты $f_{\nu, n}^{(i)}$ будут равны нулю. Введем характеристические координаты

$$\bar{x} = x - y, \quad \bar{y} = x + y, \quad \bar{z} = z \quad (3.26)$$

которые дают возможность сравнительно легко решить уравнения (3.19) + (3.23).

Для простоты, возьмем крыло, имеющее в плане форму, как показано на фиг. 2. В характеристических координатах пределы изменения переменных в области Σ будут $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{x}$ и $\bar{z}_1(\bar{z}) \leq \bar{y} \leq \bar{y}$, где $\bar{y} = \bar{z}_1(\bar{x})$ — уравнение задней кромки крыла в преобразованных координатах, $\bar{x} = \bar{z}_1(\bar{y})$ — уравнение той же кромки, решенное относительно переменной \bar{x} . В областях Σ_0 и Σ_1 переменная интегрирования \bar{z} изменяется соответственно в пределах $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{x}$ и $\bar{z}_1(\bar{z}) \leq \bar{y} \leq \bar{z}_1(\bar{y})$, где $\bar{y} = \bar{z}_1(\bar{x})$ — уравнение передней кромки в преобразованных координатах, $\bar{x} = \bar{z}_1(\bar{y})$ — уравнение той же кромки, решенное относительно переменной \bar{x} . Переменная интегрирования \bar{y} в этих областях изменяется соответственно в пределах $\bar{z}_1(\bar{z}) \leq \bar{y} \leq \bar{z}_1(\bar{z})$ и $\bar{z}_1(\bar{z}) \leq \bar{y} \leq \bar{y}$.

В дальнейшем, для простоты записи, будем опускать черточку над переменными и индексы „ n “ у функций, а известные и неизвестные функции в уравнениях (3.19) – (3.23) будем обозначать теми же символами. Тогда уравнения (3.22) и (3.23) можно объединить в одно

$$\int_{\bar{\varphi}(y)}^{\xi} \int_{\bar{\varphi}(y)}^{\eta} \frac{b_{\nu,n}^{(i)}(\xi, \eta)}{V(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta = F_{\nu,n}^{(i)}(x, y), \quad (i=1, 2; \nu=1, 3, 4) \quad (3.27)$$

которое является двумерным интегральным уравнением типа Абеля. В этом уравнении правая часть является непрерывной функцией в интервале интегрирования $\bar{\varphi}(y) \leq \xi \leq x$ и для любого η функции $F_{\nu,n}^{(i)}[\bar{\varphi}(y), y]$ отличны от нуля. Однократное обращение такого уравнения дано в [1]. В нашем случае оно представляется в виде:

$$\int_{\bar{\varphi}(x)}^{\xi} \frac{b_{\nu,n}^{(i)}(x, \eta)}{V y - \eta} d\eta = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{F_{\nu,n}^{(i)}[\bar{\varphi}(y), y]}{V x - \bar{\varphi}(y)} + \int_{\bar{\varphi}(y)}^{\xi} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} F_{\nu,n}^{(i)}(\xi, y) d\xi}{V x - \xi} \right\} \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) является одномерным интегральным уравнением типа Абеля, второе слагаемое правой части которого является непрерывной функцией и обращается в нуль при $y = \bar{\varphi}(x)$, а первое слагаемое при этом же значении y имеет интегрируемую особенность. Решение этого уравнения представим [8] в виде

$$b_{\nu,n}^{(i)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{\varphi}(x)}^{\eta} \frac{F_{\nu,n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\eta), \eta]}{V y - \eta} \frac{d\eta}{V x - \bar{\varphi}(\eta)} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{\varphi}(x)}^{\xi} \int_{\bar{\varphi}(y)}^{\eta} \frac{1}{V(x-\xi)(y-\eta)} \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\nu,n}^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (3.29)$$

Во втором слагаемом правой части выражения (3.29) выполним дифференцирование по переменному y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{\varphi}(x)}^{\xi} \int_{\bar{\varphi}(y)}^{\eta} \frac{1}{V(x-\xi)(y-\eta)} \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\nu,n}^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \int_{\bar{\varphi}(x)}^{\xi} \int_{\bar{\varphi}(y)}^{\eta} \frac{\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} F_{\nu,n}^{(i)}(\xi, \eta)}{V(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.30)$$

Рассмотрим второе слагаемое. Как легко заметить, формула Лейбница дифференцирования интегралов по параметру не применима для него. Следуя Адамару [5], вместо второго слагаемого возьмем его главное значение согласно следующему равенству:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{v,n}^{(i)}[\varphi(\eta), \eta]}{V_{x-\varphi(\eta)} V_{y-\eta}} d\eta = \frac{1}{2} V.p. \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{v,n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\eta), \eta] d\eta}{V_{y-\eta} V_{x-\bar{\varphi}(\eta)}} \quad (3.31)$$

где символ $V.p. \int_a^b$ означает главное значение интеграла, введенное Адамаром. Способ вычисления правой части равенства (3.31) читатель может найти в книге [5].

Решение уравнения (3.27) в окончательном виде выглядит так:

$$\begin{aligned} \theta_{v,n}^{(i)}(x, y) = & \frac{1}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{2} V.p. \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{v,n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\eta), \eta] d\eta}{V_{y-\eta} V_{x-\bar{\varphi}(\eta)}} + \right. \\ & \left. + \int_{\varphi(x)}^y \int_{\bar{\varphi}(y)}^x \frac{1}{V_{(x-\xi)}(y-\eta)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} F_{v,n}^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

($i=1, 2; v=1, 3, 4$)

Таким образом, получены нормальные производные потенциала возмущенных скоростей в плоскости xy , выраженные формулой (3.32). Имея эти производные, по формулам (1.11) и (1.12) можно вычислить потенциал возмущенных скоростей в любой точке пространства.

Кировоаканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Поступила 2 VII 1970

Թ. Ա. ՄԵՋԼՄՅԱՆ, Ռ. Շ. ՍՈԼՈՄՅԱՆ

ԳԵՐՉԱՅՆԱՅԻՆ ՇԱՐՃՄԱՆ ԳԵՊԵՌՄ ՎԵՐՉԱՎՈՐ ԱՅՆԵ
ՈՐՆՅՑՈՂ ՔԵՎԻ ՀԵՏԵՎՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔԻ ՈՉ-ՍՏԱՅԻՆՆԵՐ
ՇԵՂՄԱՆ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԵՔՈՂ

Ա մ փ ո փ ու ի մ

Հողի անոճի տարածումը և գերծայնային շարժման դեպքում վերջավոր լայնք ունեցող թևի նեոտոմ ոչ-ստացիոնար շեղման որոշման մի մեթոդ, երբ թևը, բացի հիմնական համընթաց շարժումից, կտատարում է նաև լրացացիչ շարժումնիկ փոքր աստանոմներ:

Հստի շեղման ֆունկցիան Ստրախալի թվի աստիճանների նկատմամբ վերլուծելով աստիճանային շարքի, ստացվում են Արելի ափի կրկնակի ինտեգրալ հավասարումներ այդ վերլուծության զործակիցների համար, որոնց աջ մասերը ինտեգրման միջակայքերի ծալրակտերում ունեն կզակրաթյուններ: Տրվում են այդ հավասարումների լուծման բանաձևերը:

DETERMINATION TECHNIQUE FOR NONSTATIONARY
SLANT OF FLOW BEHIND THE FINITE SWING
WING AT A SUPERSONIC FLOW

R. A. MEJLOUMIAN, R. SH. SOLOMONIAN

S u m m a r y

The present paper suggests determination technique for nonstationary slant of flow behind the finite swing wing at a supersonic flow when the wing, besides the basic transitional motion, performs small additional oscillating motion according to the harmonic law. By expanding the flow slant to a power series according to the degrees of the Struchal number, two-dimensional Abel-type integral equations are derived for the expansion coefficients whose right-hand parts have certain peculiarities at the ends of the integrating intervals. Formulas for solving these equations are also given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Красилшикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. ГИТТЛ, М.-Л., 1952.
2. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических сил и моментов при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1956.
3. Белоцерковский С. М. Пространственное неустановившееся движение несущей поверхности. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
4. Кислягин Н. Н. Коэффициенты вращательных производных схода, создаваемых в потоке крылом, при неустановившемся движении. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 4, 1961.
5. „Общая теория аэродинамики больших скоростей“ из серии „Аэродинамика больших скоростей и реактивная техника“. Перев. с англ., ИА, М., 1959.
6. Larpin E. Crookshanks and Hunter H. F. Downwash behind a two-dimensional wing oscillating motion. IAS, 19, № 7, 1952.
7. Downwash tables for the calculation of aerodynamic forces on oscillating wings. Report and Memoranda, № 2956, 1958.
8. Гурса Э. Курс математического анализа. ОНТИ, т. III, ч. II, М.-Л., 1934.
9. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под общ. ред. Л. Хорварта, том I, ИА, М., 1955.
10. Фурсов М. К. К расчету коэффициентов вращательных производных крыльев при сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 2, 1961.