ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 6, 1970 Механика

О. В. БУГРИМ, Е. С. СИНАЙСКИЙ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ НАСЛЕДСТВЕННО СТАРЕЮЩЕГО ТЕЛА

1. Следуя теории наследственного старения [1] в качестве исходного физического соотношения между деформацией $\varepsilon(t)$ и напряжением $\sigma(t)$ в одномерном случае примем

$$E(t)\varepsilon(t) = (1+K^*)\sigma(t) \text{ или } \sigma(t) = (1-R^*)E(t)\varepsilon(t) \tag{1.1}$$

Для операторов K^* и R^* имеет место

$$(1+K^*)^{-1} = 1-R^*, \quad H^*f(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{1.2}$$

$E(t)$ — зависящий от времени t модуль упругости в форме

$$E(t) = E_0\zeta(t) = E_0[1-\gamma(t)], \quad 0<\gamma<1, \quad \gamma(\infty)=0 \tag{1.3}$$

t_0 — момент начала загружения.

В предположении неизменности коэффициента Пуассона во времени ($\nu = \text{const}$) исходными физическими уравнениями для наследственно стареющего тела, обобщающими (1.1) на случай пространственного напряженного состояния, будут [1, 2, 3]

$$(1-R^*)E(t)\varepsilon_{ij} = (1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

ε_{ij} и σ_{ij} — составляющие деформации и напряжения соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера. По дважды повторяющемуся индексу выполняется суммирование.

Граничные условия примем в виде

$$\sigma_{ij}n_j = T_i^e \text{ на } S_T, \quad u_i = u_i^e \text{ на } S_u \tag{1.5}$$

где S_T и S_u — части поверхности тела, на которых заданы соответственно усилия $T_i^e(t)$ и перемещения $u_i^e(t)$ (в частности, S_T или S_u могут отсутствовать), $n_j = \cos(\widehat{n, x_j})$, n — нормаль к поверхности.

Ввиду (1.3) и переставимости дифференциальных операций по координате с интегральными по времени основные соотношения, необходимые для полного описания напряженного и деформированного состояния рассматриваемого тела, можно представить в следующей форме:

обобщенный закон Гука

$$E_0 \xi_{ij} = (1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{1.6}$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{1.7}$$

геометрические соотношения Коши

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}(y_{i,j} + y_{j,i}) \tag{1.8}$$

граничные условия

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^* \text{ на } S_T, \quad y_i = y_i^* \text{ на } S_u \tag{1.9}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \xi_{ij} = (1-R^*)\zeta(t)\varepsilon_{ij}, \quad y_i = (1-R^*)\zeta(t) u_i \\ y_{i,j} = \partial y_i / \partial x_j, \quad \sigma_{ij,j} = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j, \quad y_i^* = (1-R^*)\zeta(t) u_i^* \end{gathered} \tag{1.10}$$

$F_i(t)$ — составляющие объемных сил.

Рассматривается квазистатический случай—инерционные члены в уравнениях равновесия опущены.

Система (1.6) — (1.9) содержит время t неявно в качестве параметра и по форме совпадает с основной системой уравнений соответствующей упругой задачи. Отличием является лишь то, что входящие в исходные уравнения аналогичной упругой задачи деформации ε_{ij} и перемещения u_i заменены в ней обобщенными деформациями ξ_{ij} и обобщенными перемещениями y_i соответственно. Поэтому решение задачи ползучести наследственно стареющего тела, подчиняющегося (1.4), с граничными условиями (1.5) может быть образовано из решения соответствующей упругой задачи заменой в нем величин ε_{ij}, u_i, u_i^* на ξ_{ij}, y_i, y_i^* соответственно. Определив таким образом ξ_{ij} и y_i, для искомых в случае ползучести деформаций ε_{ij} и перемещений u_i ввиду (1.2) из (1.10) имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\zeta(t)}(1+K^*)\xi_{ij}, \quad u_i = \frac{1}{\zeta(t)}(1+K^*) y_i \tag{1.11}$$

Составляющие напряжения σ_{ij} определяются из уравнений (1.6)

$$\sigma_{ij} = 2G_0\xi_{ij} + \lambda_0\xi_{kk}\delta_{ij}, \quad G_0 = E_0/(2+2\nu), \quad \lambda_0 = 2G_0\nu/(1-2\nu) \tag{1.12}$$

Приведенные заключения представляют вариант изложения принципа Вольтерра [2], обобщенного Н. Х. Арутюняном [1] на случай наследственно стареющих материалов.

В задачах ползучести, в которых граничные условия не допускают формулировку определяющих уравнений в терминах обобщенных перемещений y_i и деформаций ξ_{ij} (например, в случае упруго-податливых связей на границе), отмеченная аналогия с упругой задачей не имеет места. Решение таких задач при неинвариантных во времени ядрах наследственности $K(t, \tau)$ представляет известные трудности, возможный путь преодоления которых продемонстрирован ниже на задаче о прогибе наследственно стареющей пластинки на упругом основании при специальном выборе ядра $K(t, \tau)$.

2. Примем в качестве ядра наследственной ползучести

$$K(t, \tau) = \varkappa(t_0)\, \Theta_\alpha(\beta;\ \varphi(t) - \varphi(\tau))\, \varphi'(\tau) \tag{2.1}$$

где

$$\varphi(t) = t - \frac{A}{t+B} \quad (A > 0), \quad \varphi'(\tau) = \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \tag{2.2}$$

$\Theta_\alpha(\beta;\ z)$ — экспонента дробного порядка Ю. Н. Работнова [2]

$$\Theta_\alpha(\beta;\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n z^{nr+\alpha}}{\Gamma[r(n+1)]} \quad (0 < r = 1 + \alpha,\ \ \beta < 0) \tag{2.3}$$

$A, B, \alpha, \beta, \varkappa = \varkappa(t_0)$ — определяемые из опыта реологические параметры.

Введением по А. Р. Ржаницыну [3] условного времени ядро (2.1) преобразуется к разностному. Полагая

$$\vartheta = \varphi(t) - \varphi(t_0), \quad s = \varphi(\tau) - \varphi(t_0) \tag{2.4}$$

получим (1.1) в виде

$$\chi(t) = [1 + \varkappa\Theta_\alpha^*(\beta)]\, \sigma(t) \quad \text{или} \quad \sigma(t) = [1 - \varkappa\Theta_\alpha^*(\beta_1)]\, \chi(t) \tag{2.5}$$

Здесь

$$\Theta_\alpha^*(\beta) f(t) = \int_0^{\vartheta} \Theta_\alpha(\beta;\ s)\, f_1(\vartheta - s)\, ds \tag{2.6}$$

$\chi(t) = E(t)\,\varepsilon(t)$, $\beta_1 = \beta - \varkappa$, $f_1(z) = f[t(z)]$, зависимость $t(z)$ доставляется решением $z = \varphi(t) - \varphi(t_0)$ относительно t.

Представление исходных соотношений в форме (2.5) допускает эффективное использование алгебры операторов $\Theta_\alpha^*(\beta)$, свойства которых хорошо изучены [2, 4]. В частности, в (2.5) учтено соотношение [2]

$$[1 + \varkappa\Theta_\alpha^*(\beta)]^{-1} = 1 - \varkappa\Theta_\alpha^*(\beta_1) \tag{2.7}$$

Ядро $K(t, \tau)$ в форме (2.1) — положительная монотонно убывающая с ростом $t - \tau$ функция, асимптотически стремящаяся к нулю. В момент $t = \tau$ при $-1 < \alpha < 0$ обладает слабой особенностью типа Абеля. С ростом τ функция влияния $K(t, \tau)$ приближается к инвариантному во времени ядру $K(t - \tau) = \varkappa\,\Theta_\alpha(\beta;\ t - \tau)$, характеризующему упруго-наследственную реакцию материала. Множитель $\varkappa(t_0)$ в (2.1) определяет предельное значение деформации ползучести и согласно экспериментам с увеличением t_0 убывает. Ввиду (2.4) таким же образом при $t - t_0 = \mathrm{const}$ ведет себя условное время θ. Это приводит к тому, что более поздним моментам начала загружения t_0 при $t - t_0 = \mathrm{const}$ отвечает меньшее значение функции ползучести $K^* \cdot 1 = \varkappa(t_0)\, Э_\alpha^*(\beta) \cdot 1$. Особенно интенсивно этот процесс старения происходит в раннем возрасте при малых значениях t_0. Старение материала характеризуется также монотонно возрастающим модулем упругости $E(t)$ (1.3).

Кривые простой ползучести ($\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$), соответствующие различным началам загружения t_0, в случае ядра (2.1) не обладают подобием. Последнее имеет место лишь на участках, соответствующих достаточно большим значениям t.

Таким образом, ядро $K(t, \tau)$ в форме (2.1) описывает основные свойства упруго-ползучего материала, обладающего наследственностью и старением [1].

Реологические параметры, входящие в (2.1), можно получить в результате обработки трех кривых простой ползучести, построенных для трех различных моментов начала загружения t_{0i} ($i = 1, 2, 3$).

С учетом соотношения [4] $\lim\limits_{\theta \to \infty} Э_\alpha^*(\beta) \cdot 1 = -1/\beta$ при $\sigma = \sigma_0$ и $t \to \infty$ имеем из (2.5)

$$\chi(\infty) = (1 - \varkappa/\beta)\, \sigma_0 \tag{2.8}$$

Предельные значения $\chi_i(\infty)$ снимаются с графиков зависимостей $\chi_i(t) = E(t)\, \varepsilon_i(t)$, полученных по экспериментальным кривым для $\varepsilon_i(t)$ и $E(t)$. Из (2.8) непосредственно следуют отношения

$$\frac{\varkappa(t_{0i})}{\varkappa(t_{0j})} = \frac{1 - \chi_i(\infty)/\sigma_0}{1 - \chi_j(\infty)/\sigma_0} \qquad \begin{matrix} i, j = 1, 2, 3 \\ i \neq j \end{matrix} \tag{2.9}$$

Пусть $t_i > t_{0i}$ — относящиеся к трем различным кривым $\chi_i(t)$ моменты времени, реализующие условие

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_{01}) = \varphi(t_2) - \varphi(t_{02}) = \varphi(t_3) - \varphi(t_{03}) \tag{2.10}$$

С учетом (2.5) и (2.6) ввиду (2.10) имеем

$$[\chi_1(t_1)/\sigma_0 - 1]/\varkappa(t_{01}) = [\chi_2(t_2)/\sigma_0 - 1]/\varkappa(t_{02}) = [\chi_3(t_3)/\sigma_0 - 1]/\varkappa(t_{03}) \tag{2.11}$$

Если момент t_1 выбрать произвольно, то моменты t_2 и t_3 определяются из соотношений (2.11) с использованием (2.9) по графикам зависимостей $\chi_2(t)$ и $\chi_3(t)$ соответственно.

Два уравнения (2.10) определяют параметры A и B, характеризующие старение наследственной реакции материала.

Параметры α, β, $\varkappa$ могут быть определены затем по любой из кривых $\chi_i(t)$ по формулам, установленным в работе [5].

Обработка серии кривых простой ползучести бетона ($\sigma = \sigma_0 = 1$) [6] с началами загружения $t_{01} = 3$, $t_{02} = 7$, $t_{03} = 28$ суток дала следующие значения параметров

$$A = 191\ сут^2., \quad B = 4.6\ сут., \quad \alpha = -0.1 сут., \quad \beta = -0.0266\ сут.^{-0.9}$$

$$\varkappa(t_{01}) = 0.295, \quad \varkappa(t_{02}) = 0.226, \quad \varkappa(t_{03}) = 0.114\ сут.^{-0.9}.$$

В табл. 1 приведено сравнение экспериментально полученных $\gamma_i(t)$ с вычисленными по первому уравнению (2.5) при найденных значениях параметров. Совпадение результатов удовлетворительное.

Таблица 1

	t *(сутки)*	3	5	7	14	28	60	90	150	210
γ_1	расчет	1	2.66	3.61	5.37	7.1	9.04	10.0	10.96	11.4
	опыт	1	2.8	3.5	5.8	7.9	9.2	10	11.7	12.1
γ_2	расчет			1	3.1	4.84	6.74	7.67	8.56	8.92
	опыт			1	3.4	5.0	6.3	7.4	8.5	9.2
γ_3	расчет					1	3.06	3.89	4.64	4.93
	опыт					1	3.0	3.70	4.5	4.9

3. Рассмотрим задачу об изгибе пластинки на упругом основании под действием поперечной нагрузки в предположении, что материал пластинки наследственно стареет по закону (1.1). Определяющее уравнение для прогиба w образуется так же, как и в упругом случае [7] и имеет вид

$$D_0 (1 - R^*) \zeta(t) Lw = q - kw \tag{3.1}$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор по координатам, q — интенсивность поперечной нагрузки, k — коэффициент постели, цилиндрическая жесткость $D_0 = 1/12\ E_0 h^3/(1 - \nu^2)$, h — толщина пластинки.

В случае ядра наследственности (2.1) с учетом (1.2), (1.3) и (2.5) уравнение (3.1) принимает форму

$$D_0 Lw + k[1 + \varkappa \text{Э}^*_\alpha(\beta)]w = [1 + \varkappa \text{Э}^*_\alpha(\beta)]q + D_0 \gamma(t) Lw \tag{3.2}$$

В нулевом приближении можно пренебречь изменением во времени модуля упругости и положить $E(t) = E_0$ ($\zeta = 1$, $\gamma = 0$). Ввиду (2.7) имеем из (3.2)

$$D_0 [1 - \varkappa \text{Э}^*_\alpha(\beta_1)] Lw_0 + kw_0 = q \tag{3.3}$$

Согласно принципу Вольтерра [2] решение (3.3) получается из упругого решения задачи [7] заменой в последнем жесткости D ее операторным аналогом $D_0 [1 - \varkappa \text{Э}^*_\alpha(\beta_1)]$ с последующей расшифровкой по известным правилам [2] образовавшейся рациональной функции оператора $\text{Э}^*_\alpha(\beta_1)$.

В частности, в случае равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q(t)$ для прогиба прямоугольной пластинки согласно [7] (стр. 304) имеем

$$w_0 = \sum_{m,\, n = 1, 3, 5, \dots}^{\infty} Q_{m,n}(x, y) [1 - \varkappa_{mn} \text{Э}^*_\alpha(\beta_{mn})]\, q(t) \tag{3.4}$$

Здесь

$$Q_{mn} = \frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{mn\left[\pi^4 D_0\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2 + k\right]}, \qquad \varkappa_{mn} = \frac{\pi^4 D_0\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2 \varkappa}{\pi^4 D_0\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2 + k}$$

$\beta_{mn} = \beta_1 + \varkappa_{mn}$, остальные обозначения те же, что в работе [7].

Переход от истинного времени t к условному θ и обратно обеспечивают соотношения (2.4) и (2.6).

Последовательно для p-приближения $(p = 1, 2, \cdots)$ получаем

$$D_0 L w_p + k[1 + \varkappa \mathcal{Э}^*_\alpha(\beta)]\, w_p = [1 + \varkappa \mathcal{Э}^*_\alpha(\beta)] q + D_0 \gamma(t)\, L w_{p-1} \qquad (3.5)$$

Решение (3.5) осуществляется так же, как решение (3.3)

$$w_p = \sum_{m,\, n=1,\, 3,\, 5, \dots} Q_{mn}(x, y)[1 + \varkappa_{mn} \mathcal{Э}^*_\alpha(\beta_{mn})]\, q_p(t) \qquad (3.6)$$

$$q_p(t) = q(t) + D_0[1 - \varkappa \mathcal{Э}^*_\alpha(\beta)]\, \gamma(t)\, L w_{p-1} \qquad (3.7)$$

Для погрешностей Δw_j $(j = 0, p)$ из уравнений (3.2), (3.3) и (3.5) имеем

$$D_0 L \Delta w_0 + k[1 + \varkappa \mathcal{Э}^*_\alpha(\beta)]\, \Delta w_0 = D_0 \gamma(t)\, L w_0 \qquad (3.8)$$

$$D_0 L \Delta w_p + k[1 + \varkappa \mathcal{Э}^*_\alpha(\beta)]\, \Delta w_p = D_0 \gamma(t)\, L \Delta w_{p-1} \qquad (3.9)$$

Правые части (3.8) и (3.9) играют роль нагрузок, вызывающих прогибы Δw_0 и Δw_p соответственно.

Для каждого момента t прогиб Δw_0 пропорционален γ. Следовательно, $\Delta w_p \sim \gamma^{p+1}$. Параметр $\gamma < 1$ быстро убывает со временем. Например, для бетона в возрасте $t = 6$ *суток* $\gamma \approx 0.4$, при $t = 10$ *суток* $\gamma \approx 0.2$ [6]. Поэтому имеющая место сходимость процесса приближений с увеличением t ускоряется.

Квадратуры, входящие в (3.6) и (3.7), могут быть реализованы численно. Соотношения (2.3) и (2.6) обеспечивают представление

$$\mathcal{Э}^*_\alpha(\beta) f(t) = \theta^r \int_0^1 x^\alpha F_1(\alpha, -\beta\theta^r x^r)\, f_1(\theta - \theta x)\, dx \qquad (3.10)$$

где

$$F_1(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma[(\alpha+1)(n+1)]}$$

Вычисление (3.10) осуществляется приближенно по формуле

$$\mathcal{Э}^*_\alpha(\beta) f(t) \approx \theta^r \sum_{k=1}^{n} A_k F_1(\alpha, -\beta\theta^r x_k^r)\, f_1(\theta - \theta x_k)$$

Коэффициенты A_i и узлы интерполяции x_i приведены в книге [8], таблицы значений функции $F_1(\alpha, z)$ содержатся в работе [9].

Авторы благодарны М. И. Розовскому за обсуждение работы.

Днепропетровский горный институт

Поступила 5 VI 1970

Օ. Վ. ԲՈՒԳՐԻՄ, Ե. Ս. ՍԻՆԱՅՍԿԻ

ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ԾԵՐԱՑՈՂ ՄԱՐՄՆԻ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է հիմնական հավասարումների և եզրային պայմանների պսևդոառաձգական ձևափոխման թեորեմը, ծերացող մարմնի ժառանգական սողքի խնդիրների լուծման մեթոդ՝ Պուասոնի գործակցի ժամանակից անկախության ենթադրությամբ։ Երբ նշված ձևափոխումը տեղի չունի, առաջարկվում է ըստ ժամանակի ոչ ինվարիանտ ժառանգականության հատուկ կորիզ, որը պայմանական ժամանակի ներմուծմամբ ձևափոխվում է Յու. Ն. Ռաբոտնովի կոտորակային կորիզի էքսպոնենտային։ Որպես օրինակ դիտարկված է առաձգական հիմքի վրա գտնվող ծերացող սալի ծռման խնդիրը։

ON THE HEREDITARY AGING BODY ANALYSIS FOR CREEP

O. V. BUGRIM, E. S. SINAYSKY

Summary

A special noninvariable with respect to time heredity kernel is proposed for the description of creep of the hereditary aging body. The introduction of conditional time transforms this kernel into Rabotnov's fractional exponential function that allows to solve the problems of hereditary aging creep by means of the hereditary elastic theory. The problem of bending of a hereditary aging plate on an elastic base is considered here as an illustration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М., 1952.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. Наука, М., 1966.
3. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. Стройиздат, М., 1968.
4. *Розовский М. И.* О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
5. *Синайский Е. С.* Об одном способе обработки кривых экспериментальной реологии. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.

6. *Улицкий И. И., Русинов И. А.* Экспериментальные исследования деформативности бетона и жесткости железобетонных изгибаемых элементов при длительном загружении. Сб. Строительные конструкции. Госстройиздат, УССР, 1959, вып. 13.
7. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
8. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. Изд. Наука, М., 1966.
9. *Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н.* Таблицы дробноэкспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. Изд. Наука, М., 1969.