ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 6, 1970 Механика

С. Н. БАБЮК, И. А. ЦУРПАЛ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЛАСТИН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Развивается метод решения нелинейных задач концентрации напряжений около произвольных отверстий с гладкими контурами при учете кубического закона напряжения-деформации. Дано решение задачи о распределении напряжений вблизи эллиптического отверстия с учетом трех приближений. Получены выражения для компонент тензора напряжений и коэффициентов концентрации и показано влияние физической нелинейности, кривизны контура, величины внешней нагрузки на распределение напряжений по контуру эллиптического отверстия.

В работах [1—3] рассмотрены задачи о концентрации напряжений около отверстий при сохранении в нелинейном законе упругости квадрата интенсивности напряжений сдвига. Этот вариант хорошо описывает поведение металлических материалов. В связи с широким применением в современной технике конструкционных материалов малой жесткости возникла необходимость учета нелинейных эффектов при исследовании задач концентрации напряжений. Здесь развивается метод и получено решение задач концентрации напряжений для высокоэластичных материалов.

1. Исследуем напряженное состояние неограниченной изотропной пластинки с произвольным отверстием, получаемым из отображающей функции

$$z = \omega(\zeta) = R\,[\zeta + \varepsilon f(\zeta)], \qquad (z = re^{i\varphi}, \ \zeta = \rho e^{i\theta}) \tag{1}$$

которая реализует конформное отображение бесконечной плоскости с круговым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость с отверстием рассматриваемой формы. Параметры R и ε, а также функция $f(\zeta)$ характеризуют форму и размеры отверстия и имеют для эллиптического отверстия значения: $R = \dfrac{a+b}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a-b}{a+b}$, $f(\zeta) = \zeta^{-1}$, где a и b — полуоси эллипса.

Предполагаем, что деформации малы, а материал пластинки подчиняется нелинейному закону упругости [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = {} & \alpha_{11}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha_{12}\sigma_{ij} + \alpha_{21}\sigma_{kk}^2\delta_{ij} + \alpha_{22}\sigma_{km}\sigma_{km}\delta_{ij} + 2\alpha_{22}\sigma_{kk}\sigma_{ij} + \\ & + \alpha_{31}\sigma_{kk}^3\delta_{ij} + \alpha_{32}\sigma_{km}\sigma_{km}\sigma_{ij} + \alpha_{33}\sigma_{km}\sigma_{kn}\sigma_{nm}\delta_{ij} + \alpha_{33}\sigma_{kk}^2\sigma_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

где σ_{ij}, ε_{ij} — соответственно компоненты тензора напряжений и деформаций, δ — символ Кронекера, α_{ij} — постоянные, характеризующие механические свойства высокоэластичных полимерных материалов, повторяющиеся индексы обозначают суммирование.

Выражая компоненты тензора напряжений через функцию напряжений Эйри

$$\sigma_{ij} = F_{,kk}\,\delta_{ij} - F_{,ij} \tag{3}$$

и подставляя компоненты тензора деформаций (2) в условие совместности деформаций, получим основное уравнение физически нелинейной плоской теории упругости в виде

$$\begin{gathered}\Delta\Delta F + \alpha\Delta\left[(\Delta F)^2\right] + \beta\left[\Delta\left(F_{,ij}F_{,ij}\right) + 2\left(\Delta F F_{,ij}\right)_{,ij}\right] + \\ + \gamma\Delta\left[(\Delta F)^3\right] + \delta\left(F_{,ij}F_{,ij}F_{,km}\right)_{,km} + \omega\left[\Delta\left(\Delta F F_{,ij}F_{,ij}\right) + \left((\Delta F)^2 F_{,ij}\right)_{,ij}\right] = 0\end{gathered} \tag{4}$$

где запятая обозначает дифференцирование по соответствующим координатам.

Приближенное решение нелинейного уравнения (4) для случая, когда бесконечная плоскость ослаблена криволинейным отверстием (1), представим в виде двойного ряда по малым параметрам

$$F(r, \varphi, \alpha, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon^j F^{(i,j)} \tag{5}$$

Решение линейной задачи по методу возмущений с учетом двух приближений (в ряду (5) сохранялись слагаемые с точностью до ε^2) отличается от точного решения [1—3] не более чем на 3%. Решение нелинейной задачи для кругового отверстия при этом законе упругости (2) дает право с небольшой погрешностью решать поставленную задачу с учетом трех приближений.

Подставляя неизвестную функцию (5) в разрешающее уравнение (4), в каждом из приближений получим последовательность бесконечных неоднородных бигармонических уравнений

$$\Delta\Delta F^{(i,j)} = L_{ij}\left(F^{(0,0)}, \dots, F^{(i-1,j-1)}\right) \tag{6}$$

Явный вид операторов L_{ij} для физически нелинейной пластинки с круговым отверстием в первом приближении имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta\Delta F^{(1,0)} + \alpha\Delta\left[\left(\Delta F^{(0,0)}\right)^2\right] + \beta\left\{\Delta\left[F^{(0,0)}_{,rr}F^{(0,0)}_{,rr} + \left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r} + \frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi\varphi}\right)^2 + \right.\right. \\ \left. + 2\left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r\varphi} - \frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\Delta F^{(0,0)}F^{(0,0)}_{,rr}\right) + \\ + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left[\Delta F^{(0,0)}\left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r} + \frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi\varphi}\right)\right] +\end{gathered} \tag{7}$$

$$+4\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left[\Delta F^{(0,0)}\left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r\varphi}-\frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi}\right)\right]\Bigg\}=0 \qquad (7)$$

Для определения напряженного состояния нелинейно-упругой пластинки с криволинейным отверстием имеем уравнение

$$\Delta\Delta F^{(1,1)}+\alpha\Delta\left[2\Delta F^{(0,0)}\,\Delta F^{(0,1)}\right]+\beta\Bigg\{2\Delta\Bigg[F^{(0,0)}_{,rr}F^{(0,1)}_{,rr}+\left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r}+\frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi\varphi}\right)\left(\frac{1}{r}F^{(0,1)}_{,r}+\frac{1}{r^2}F^{(0,1)}_{,\varphi\varphi}\right)+$$
$$+2\left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r\varphi}-\frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi}\right)\left(\frac{1}{r}F^{(0,1)}_{,r\varphi}-\frac{1}{r^2}F^{(0,1)}_{,\varphi}\right)\Bigg]+2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[(\Delta F^{(0,0)})F^{(0,1)}_{,rr}+\right.$$
$$\left.+(\Delta F^{(0,1)})F^{(0,0)}_{,rr}\right]+2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Bigg[\Delta F^{(0,0)}\left(\frac{1}{r}F^{(0,1)}_{,r}+\frac{1}{r^2}F^{(0,1)}_{,\varphi\varphi}\right)+ \qquad (8)$$
$$+\Delta F^{(0,1)}\left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r}+\frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi\varphi}\right)\Bigg]+4\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\times$$
$$\times\left[\Delta F^{(0,0)}\left(\frac{1}{r}F^{(0,1)}_{,r\varphi}-\frac{1}{r^2}F^{(0,1)}_{,\varphi}\right)+\Delta F^{(0,1)}\left(\frac{1}{r}F^{(0,0)}_{,r\varphi}-\frac{1}{r^2}F^{(0,0)}_{,\varphi}\right)\right]\Bigg\}=0.$$

Для определения напряженного состояния пластинки с криволинейным отверстием (1) необходимо воспользоваться формулами преобразования при повороте системы координат [1]. Представляя компоненты тензора напряжений σ_{ij} также в виде двойного ряда

$$\sigma_{km}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^i\beta^j\sigma^{(i,j)}_{km} \qquad (9)$$

и учитывая вид отображающей функции (1), получим напряжения в криволинейной системе координат

$$\sigma^{(i,j)}_{\rho}=\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)F^{(i,j)}(\rho,\theta)+\sum_{k=0}^{j-1}\Bigg[L_1^{(j-k)}\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)+$$
$$+L_2^{(j-k)}\left(2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\Delta\right)-L_3^{(j-k)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}\Bigg]F^{(i,k)}(\rho,\theta)$$

$$\sigma^{(i,j)}_{\theta}=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}F^{(i,j)}(\rho,\theta)+\sum_{k=0}^{j-1}\Bigg[L_1^{(j-k)}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+ \qquad (10)$$
$$+L_2^{(j-k)}\left(\Delta-2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)+L_3^{(j-k)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}\Bigg]F^{(i,k)}(\rho,\theta)$$

$$\tau_{\rho\theta}=-\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}F^{(i,j)}(\rho,\theta)+\sum_{k=0}^{j-1}\Bigg[\left(L_1^{(j-k)}-2L_2^{(j-k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}+$$
$$+\frac{1}{2}L_3^{(j-k)}\left(\Delta-2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\Bigg]F^{(i,k)}(\rho,\theta)$$

где $L_1^{(j-k)}$, $L_2^{(j-k)}$, $L_3^{(j-k)}$ — дифференциальные операторы, вид которых зависит от отображающей функции (1).

Функции $F^{(i,j)}(\rho, \theta)$, входящие в (10), представляют собой решение уравнения (6) в виде ряда Фурье, в которых переменные r, φ заменены соответственно на ρ и θ.

2. Исследуем напряженное состояние нелинейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием при всестороннем растяжении. Функция напряжений линейной задачи для кругового отверстия имеет вид [2]

$$F^{(0,0)} = \frac{p}{2}(r^2 - 2\ln r) \tag{11}$$

Подставляя значение этой функции и ее производных в уравнение (6), (7), получим характеристики напряженного состояния нелинейно-упругой пластинки с круговым отверстием во втором приближении

$$\begin{gathered} F^{(1,0)} = -p^2\left(\frac{1}{2r^2} + 4\ln^2 r + \ln r\right) \\ F^{(2,0)} = \alpha p^3\left(\frac{2}{r^2} + 16\ln^2 r - 4\ln r\right) + \beta p^3\left(34\ln^2 r + \frac{27}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{r^4} - \right. \\ \left. - 80\ln^2 r + \frac{80}{3}\ln^3 r + \frac{89}{3}\ln r\right) - \gamma p^3\left(2\ln^2 r + \frac{1}{2}\frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6}\frac{1}{r^4} + \frac{5}{3}\ln r\right) - \omega p^3\left(4\ln^2 r + \frac{1}{r^2} + 2\ln r\right) \end{gathered} \tag{12}$$

Для линейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием функции напряжений с точностью ε^2 имеют вид

$$\begin{gathered} F^{(0,1)} = p\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\cos 2\varphi \\ F^{(0,2)} = p\left[\left(\frac{3}{2}\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2}\right)\cos 4\varphi - \ln r\right] \end{gathered} \tag{13}$$

Подставляя значение функций (11) — (13) и их производных в уравнение (8), получим разрешающее уравнение для нелинейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием

$$\Delta\Delta F^{(1,1)} + \beta p^2\left(\frac{320}{r^6} + \frac{768}{r^5}\right)\cos 2\varphi = 0 \tag{14}$$

Решение этого уравнения представим в виде частного интеграла

$$F^{(1,1)}_{\text{част.}} = \left(k_1\frac{\ln r}{r^2} + k_2\frac{1}{r^4}\right)\cos 2\varphi \tag{15}$$

и интеграла однородного уравнения

$$F^{(1,1)}_{\text{одн.}} = \sum_{m=2}^{\infty}(c_{m2}r^{-m+2} + c_{m1}r^{-m})\cos m\varphi \tag{16}$$

Постоянные интегрирования c_{m3}, c_{m4} определим из граничных условий на контуре свободного от внешних усилий отверстия при

$$\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)F^{(1,1)}\Big|_{\rho=1}+\Big|L_1^{(1)}\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)+L_2^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-$$

$$-L_3^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}\Big|F^{(1,0)}\Big|_{\rho=1}=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}F^{(1,1)}\Big|_{\rho=1}+\Big|(L_1^{(1)}-2L_2^{(1)})\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}+ \tag{17}$$

$$+\frac{1}{2}L_3^{(1)}\left(\Delta-2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\Big|F^{(1,0)}\Big|_{\rho=1}=0$$

где L_i для отображающей функции $z=R\left(\zeta+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$ имеют вид

$$L_1^{(1)}=\frac{\cos 2\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin 2\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad L_2^{(1)}=0,\quad L_3^{(1)}=\frac{4\sin 2\theta}{\rho^2} \tag{18}$$

Учитывая (14) — (18), получим

$$F^{(1,1)}(r,\varphi)=\beta p^2\left(\frac{20}{3}\frac{\ln r}{r^2}-\frac{2}{r^4}+\frac{5}{3}+\frac{11}{r^2}\right)\cos 2\varphi \tag{19}$$

Для анализа нелинейных эффектов напряженного состояния приведем выражения коэффициентов концентрации напряжений $k=\frac{\sigma_\theta}{p}$. Учитывая (9), (11), (12), (13), (19), найдем компоненты тензора напряжений (10).

Коэффициент концентрации напряжений на контуре отверстия имеет вид

$$k=2-10\beta p+\left(40\alpha\beta-\frac{82}{3}\beta^2-\frac{26}{3}\delta-12\omega\right)p^2+$$

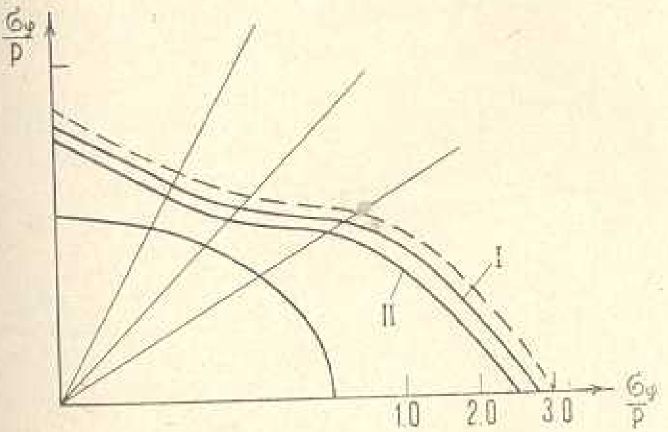
$$+4\varepsilon\cos 2\theta+\varepsilon^2(16\cos 4\theta-12)-\frac{80}{2}p\beta\varepsilon\cos 2\theta \tag{20}$$

На фиг. 1 приведен коэффициент концентрации (20) по контуру отверстия для различных параметров внешней нагрузки, механических свойств материала и кривизны контура. Пунктирная линия относится к линейной теории, а сплошная—к нелинейной.

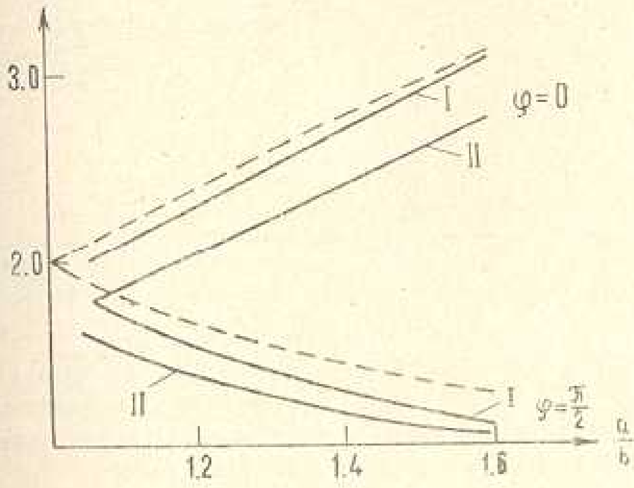
Кривая I построена для сжатия при $p=120$; $\beta=0.1\cdot10^{-3}$; $\alpha=0.1\cdot10^{-3}$; $\delta=0.1\cdot10^{-1}$; $\omega=0.1\cdot10^{-1}$; $\frac{a}{b}=1.5$. Кривая II—для тех же параметров при растяжении.

На фиг. 2 приведено значение коэффициента концентрации (20) в зависимости от кривизны контура для материала с характеристиками

$\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0.1 \cdot 10^{-4}$; $\omega = 0.1 \cdot 10^{-4}$ при $p = 100$. Пунктирная линия относится к линейной теории, сплошная—к нелинейной.



Фиг 1.

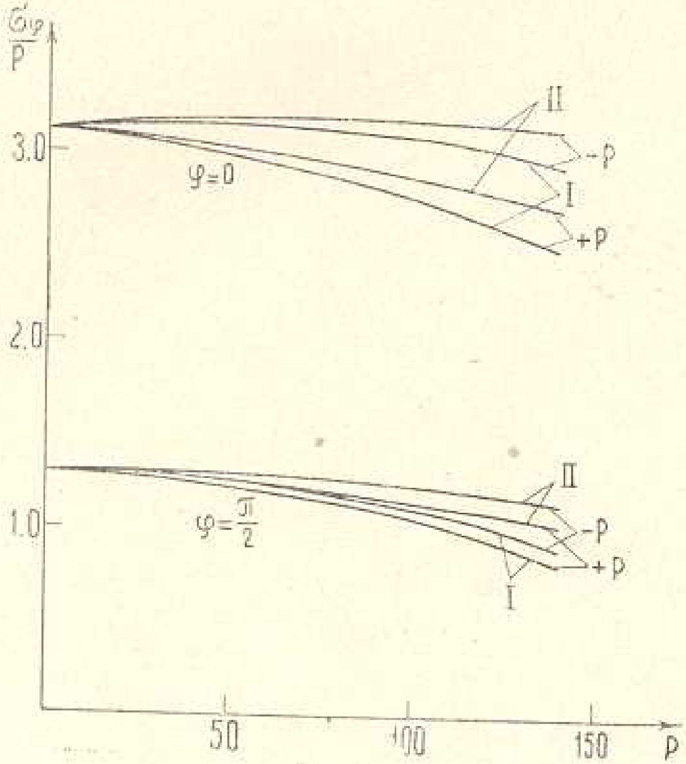


Фиг. 2.

Кривая I построена при сжатии, II—при растяжении.

На фиг. 3 показано изменение коэффициента концентрации (20) в зависимости от величины внешней нагрузки при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ для растяжения и сжатия для различных физически нелинейных материалов. Кривая I —для материала с характеристиками $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0.1 \cdot 10^{-4}$; $\omega = 0.1 \cdot 10^{-4}$; II — $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0.5 \cdot 10^{-5}$; $\omega = 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Результаты анализа решений поставленной задачи показывают: коэффициенты концентрации нелинейно зависят от свойств материала, величины нагрузки и кривизны контура; для высокоэластичных материалов незначительное увеличение нагрузки приводит к существенному уменьшению коэффициента концентрации в наиболее опасной



Фиг. 3.

точке контура; учет нелинейных эффектов приводит к выравниванию поля напряжений в зоне концентрации; коэффициент концентрации в отличие от другого варианта нелинейной теории упругости [1—3] имеет разное значение при растяжении и сжатии.

Институт механики
АН Украинской ССР

Поступила 20 VII 1970

Ս. Ն. ԲԱԲՅՈՒԿ, Ի. Ա. ՑՈՒՐՊԱԼ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՅԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ ԿՈՐԱԳԻԾ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ՍԱԼԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Կամայական անցքով թուլացված սալերի համար առաջարկված է լարումների և դեֆորմացիաների ոչ գծային կախվածության հաշվառմամբ լարումների կոնցենտրացիայի մասին խնդիրների լուծման եղանակ: Խնդիրները լուծվում են փոքր պարամետրի մեթոդով: Որպես օրինակ դիտարկվում է կորագիծ անցքի մոտ լարումների կոնցենտրացիայի մասին խնդրի լուծումը:

Ցույց է տրված նոր Հաստատունների և արտաքին բեռի մեծության ազդեցությունը լարումների կոնցենտրացիայի վրա:

NONLINEAR PROBLEMS OF STRESS CONCENTRATION FOR PLATES WITH CURVILINEAR HOLES

S. N. BABIUK, I. A. CIURPAL

Summary

The paper presents a method for solving problems of stress concentration near arbitrary holes without corner points with an arbitrary stress field on the infinity for a new variant (the cubic law) of nonlinear stress-strain relations. To solve the nonlinear equations a combination of the method of disturbance of the boundary shape with the method of small parameter is employed.

As an example the problem of stress concentration near a curvilinear hole is considered. The effect of physical nonlinearity and of the value of load on the stress concentration along the hole boundary is also studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Савин Г. Н., Цурпал И. А.* Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке. Arch. Mech. Stos., т. 16, 4, 1964, 1009.
2. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Изд. „Наукова думка", К., 1968.
3. *Цурпал И. А.* Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий и полостей с учетом физической нелинейности материала. Сб. Концентрация напряжений. 1968, вып. 2, 241.
4. *Пистер К. С., Иаенс Р. И.* Расчет упругих напряжений в физически нелинейных твердых топливах. Ракетная техника и космонавтика, 4, 11, 1966, 35.
5. *Цурпал И. А.* Об одном варианте задач о концентрации напряжений в нелинейной постановке. Прикл. механ., т. 4, вып. 10, 1968, 51.