ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 6, 1970 Механика

Б. И. ПОПОВИЧ, Д. В. ГРИЛИЦКИЙ

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЕЗАМИ ВДОЛЬ ОКРУЖНОСТИ

В статье [1] исследовано термонапряженное состояние однородной изотропной пластинки с термоизолированной дугообразной трещиной при заданном однородном тепловом потоке на бесконечности. В публикации [2] рассмотрена задача определения термоупругого равновесия изотропной плоскости, содержащей инородное круговое включение, когда на части границы включения имеется теплоизолированная трещина.

В данной работе определяется установившееся термоупругое равновесие неограниченной изотропной пластинки с впаянным инородным круговым включением при наличии на линии раздела материалов конечного числа разрезов, на берегах которых заданы смешанные условия на температурные и условия первого или второго рода на механические характеристики, на бесконечности — однородный тепловой поток.

1. Пусть имеется неограниченная изотропная пластинка, в круговое отверстие которой впаяно без предварительной деформации круговое ядро (шайба) из другого изотропного материала. Линия спая ослаблена конечным числом разрезов $a_j b_j$ $(j=1, 2, \cdots, p)$. Совокупность разрезов обозначим через L'', дуг спая — через L' $(L'+L''=L)$. Радиус отверстия и, соответственно, шайбы примем равным единице.

Теплофизические и механические характеристики, относящиеся к шайбе, будем снабжать индексом 1, к пластинке—индексом 2.

На бесконечности пластинки задан однородный тепловой поток $\bar{q}_0$; на берегах разрезов со стороны шайбы известна величина

$$\frac{\partial T_1}{\partial r}=\varphi_1(t) \qquad (t\in L'') \tag{1.1}$$

пропорциональная нормальной составляющей потока тепла, а со стороны пластинки — температура

$$T_2=\varphi_2(t) \qquad (t\in L') \tag{1.2}$$

или же, наоборот, на берегах разрезов со стороны шайбы задана температура

$$T_1=f_1(t) \qquad (t\in L'') \tag{1.1'}$$

а со стороны пластинки — величина

$$\frac{\partial T_2}{\partial r}=f_2(t) \qquad (t\in L'') \tag{1.2'}$$

Далее, предположим, что на бесконечности пластинки напряжения отсутствуют, а берега разрезов либо свободны от внешних напряжений

$$\sigma_r^{(1)}(t)=\sigma_r^{(2)}(t)=\tau_{r\varphi}^{(1)}(t)=\tau_{r\varphi}^{(2)}(t)=0 \quad (t\in L'') \tag{1.3}$$

либо на них заданы смещения, которые без уменьшения общности задачи будем считать постоянными (в общем, разными для разных разрезов)

$$u_1'(t)=u_2'(t)=v_1'(t)=v_2'(t)=0 \quad (t\in L'') \tag{1.4}$$

На L' выполняются условия спая и идеального теплового контакта, то есть

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)}(t)+i\tau_{r\varphi}^{(1)}(t)&=\sigma_r^{(2)}(t)+i\tau_{r\varphi}^{(2)}(t)=\sigma_r(t)+i\tau_{r\varphi}(t)\\ u_1(t)+iv_1(t)&=u_2(t)+iv_2(t)=u(t)+iv(t)\end{aligned} \quad (t\in L') \tag{1.5}$$

$$T_1=T_2=T(t),\quad \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial r}=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial r} \quad (t\in L') \tag{1.6}$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности.

Основания кусочно-однородной пластинки предполагаются теплоизолированными.

Требуется определить температурное поле и распределение температурных напряжений в пластинке и в шайбе.

2. Известно [3], что стационарное температурное поле в изотропной пластинке в случае теплоизоляции ее оснований определяется с помощью аналитической функции комплексной переменной

$$T=F(z)+\overline{F(z)} \quad (z=x+iy=re^{i\varphi}) \tag{2.1}$$

Из (2.1) на окружности единичного радиуса L находим соотношения

$$tF'(t)-\bar t\,\overline{F'(t)}=i\frac{\partial T}{\partial t} \quad (t\in L) \tag{2.2}$$

$$tF'(t)+\bar t\,\overline{F'(t)}=\frac{\partial T}{\partial r} \quad (t\in L) \tag{2.3}$$

3. Определим температурное поле в рассматриваемой кусочно-однородной пластинке для случая граничных условий (1.1) и (1.2).

Исходя из условия (1.1) и соотношения (2.3), находим

$$F_1'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L''}\frac{\varphi^{(1)}(t)\,dt}{t-z} \tag{3.1}$$

При этом должно выполняться условие

$$\int_{L'} \varphi(t)\,dt + \int_{L'} \varphi^{(1)}(t)\,dt = 0 \tag{3.2}$$

В формулах (3.1) и (3.2) обозначено

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad \varphi^{(1)}(t) = \frac{1}{t}\varphi_1(t) \tag{3.3}$$

$F_1(z)$ — функция распределения температуры в шайбе, голоморфная внутри L.

Используя (1.6) и (2.2), получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L'} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-\sigma} = T'(\sigma) - \frac{1}{\pi i}\int_{L'} \frac{\varphi^{(1)}(t)\,dt}{t-\sigma} \quad (\sigma \in L') \tag{3.4}$$

Учитывая условия (1.2), (1.6) и формулу (2.2), находим

$$F_2'(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{T'(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{\varphi_2'(t)\,dt}{t-z} + a_2^{(1)} + \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{z^2} \tag{3.5}$$

где $F_2(z)$ — функция распределения температуры в пластинке; параметр $a_2^{(1)}$ определяется с помощью известного теплового потока на бесконечности

$$a_2^{(1)} = \frac{q_0}{2\lambda_2} e^{-i\alpha_0} \tag{3.6}$$

Здесь α_0 — угол, образованный направлением теплового потока на бесконечности с осью Ox, $q_0 = |\overline{\mathbf{q}_0}|$.

Используя теперь условие $(1.6)_2$ и формулу (2.3), будем иметь

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L'} \frac{T'(t)\,dt}{t-\sigma} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\varphi(\sigma) = -\frac{1}{\pi i}\int_{L'} \frac{\varphi_2'(t)\,dt}{t-\sigma} + 2\left(a_2^{(1)} + \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{\sigma^2}\right) \quad (\sigma \in L') \tag{3.7}$$

Соотношения (3.4) и (3.7) в совокупности составляют систему двух сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $T'(\sigma)$ и $\varphi(\sigma)$, которые входят в формулы (3.1) и (3.5).

Решение системы (3.4) и (3.7) имеет вид [4]

$$T'(\sigma) + \gamma_k \varphi(\sigma) = W_k^+(\sigma) - W_k^-(\sigma) \quad (k = 1, 2;\ \sigma \in L') \tag{3.8}$$

где

$$W_k(z) = \frac{1}{2\pi i X_k(z)}\int_{L'} \frac{\omega_k(t) X_k^+(t)\,dt}{t-z} + \frac{P_{p-1}^{(k)}(z)}{X_k(z)} \quad (k = 1, 2) \tag{3.9}$$

Под функциями

$$X_k(z) = \prod_{j=1}^{p} (z-a_j)^{\frac{1}{2}-\gamma_k} (z-b_j)^{\frac{1}{2}+\gamma_k} \quad (k = 1, 2) \tag{3.10}$$

подразумеваются ветви, для которых

$$\lim_{|z|\to\infty}\left[z^{-p}X_k(z)\right]=1$$

$$\gamma_k=\frac{\ln g_k}{2\pi i},\quad g_k=\frac{1+\nu_k}{1-\nu_k}\quad (k=1,\ 2),\quad \nu_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\tag{3.11}$$

$$\omega_k(\sigma)=\frac{1}{1-\nu_k}\left[2\left(a_2^{(1)}+\frac{\overline{a_2^{(1)}}}{\sigma^2}\right)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\varphi_2'(t)+\nu_k\varphi_1'(t)}{t-\sigma}\,dt\right]$$

$$(k=1,\ 2;\ \sigma\in L')\tag{3.12}$$

$P_{p-1}^{(k)}(z)=D_0^{(k)}+D_1^{(k)}z+\cdots+D_{p-1}^{(k)}z^{p-1}\quad (k=1,\ 2)$ — полиномы.

Для определения $2p$ постоянных $D_j^{(k)}\ (j=0,\ 1,\cdots,\ p-1;\ k=1,\ 2)$ служат условия однозначности температуры на каждом из разрезов

$$\int\limits_{a_k}^{b_k}\left[T_2'(t)-T_1'(t)\right]dt=0\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ p)\tag{3.13}$$

и соотношения

$$\int\limits_{b_k}^{a_{k+1}}T'(t)\,dt=\varphi_2(a_{k+1})-\varphi_2(b_k)\quad (k=1,\ 2,\cdots,p;\ a_{p+1}=a_1)\tag{3.14}$$

Таким образом, производные от функций распределения температуры в шайбе и пластинке найдены. Путем интегрирования находятся функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

В случае одного разреза $a_1b_1\ (a_1=e^{-i\theta},\ b_1=e^{i\theta})$ при условии, что $\varphi_2(t)=T_0=\mathrm{const}$, а $\varphi_1(t)=0$, функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ определяются формулами

$$F_1(z)=\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left[a_2^{(1)}-\frac{\overline{a_2^{(1)}}}{X_k(0)\,z}\right]X_k(z)+\frac{T_0}{2}$$

$$F_2(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left[a_2^{(1)}-\frac{\overline{a_2^{(1)}}}{X_k(0)\,z}\right]X_k(z)+\frac{T_0}{2}\tag{3.15}$$

где

$$X_k(z)=(z-e^{i\theta})^{\frac{1}{2}+\gamma_k}(z-e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}-\gamma_k}\quad (k=1,\ 2)\tag{3.16}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_2-\lambda_1},\quad \lambda_2=-\lambda_1$$

При выполнении граничных условий на температурные характеристики (1.1′) и (1.2′) задача решается аналогично. В случае одного разреза и при условии, что $f_1(t)=T_0=\mathrm{const}$, $f_2(t)=0\ (t\in L'')$ функции распределения температуры определяются формулами (3.15), в которых $\overline{a_2^{(1)}}$ следует заменить на $-\overline{a_2^{(1)}}$, а функции $X_1(z)$ и $X_2(z)$ (3.16) переставлены между собою местами.

4. Определим напряженное состояние в кусочно-однородной изотропной пластинке. Граничные условия для первой и второй основных задач можно представить в виде одной формулы

$$t\left\{\delta_k^{(n)}\Phi_k^{(n)}(t)+\overline{\Phi_k^{(n)}(t)}-\frac{1}{t}\overline{\Phi_k^{(n)}(t)}-\frac{1}{t^2}\overline{\Psi_k^{(n)}(t)}-K_k\left[F_k(t)+\overline{F_k(t)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{t}F'_k(t)\right]\right\}=\varepsilon_k^{(n)}f_k^{(n)}(t)\qquad(k,\ n=1,\ 2;\ t\in L)\tag{4.1}$$

где

$$\delta_k^{(n)}=(-\varkappa_k)^{n-1},\quad \varepsilon_k^{(n)}=(\mu_k)^{n-1},\qquad K_k=\frac{1}{2}\alpha_T^{(k)}E_k\quad(k,\ n=1,\ 2)$$

$$f_k^{(1)}(t)=t[\sigma_r^{(k)}(t)+i\tau_{r\vartheta}^{(k)}(t)],\quad f_k^{(2)}(t)=2i\left[\frac{\partial u_k(t)}{\partial\vartheta}+i\frac{\partial v_k(t)}{\partial\vartheta}\right]\tag{4.2}$$

$\Phi_k^{(n)}$ и $\Psi_k^{(n)}$ — функции напряжений, F_k — функции распределения температуры; $\alpha_T^{(k)}$ — коэффициенты линейного теплового расширения; E_k, μ_k, $\varkappa_k$ — упругие постоянные; $\sigma_r^{(k)}$, $\tau_{r\vartheta}^{(k)}$ —компоненты напряжений u_k, v_k — декартовы компоненты вектора смещения. Индекс „k", принимающий здесь значения 1 и 2, указывает на принадлежность данной величины к шайбе или пластинке.

Легко видеть, что при $n=1$ соотношение (4.1) представляет собой граничное условие для первой основной задачи термоупругости, при $n=2$,—для второй [5].

Мысленно отделим шайбу от пластинки и рассмотрим раздельно термоупругое равновесие шайбы и пластинки с круговым отверстием, учитывая при этом, что, согласно условиям (1.3), (1.4) и (1.5), $f_1^{(n)}(\sigma)=f_2^{(n)}(\sigma)=f^{(n)}(\sigma)$, когда $\sigma\in L'$ и $f_1^{(n)}(\sigma)=f_2^{(n)}(\sigma)=0$, когда $\sigma\in L''$ $(n=1,\ 2)$.

Исходя из граничного условия (4.1), определим функции напряжений для шайбы $\Phi_1^{(n)}$, $\Psi_1^{(n)}$ и для пластинки $\Phi_2^{(n)}$, $\Psi_2^{(n)}$ с помощью неизвестной пока функции $f^{(n)}(\sigma)$ $(\sigma\in L')$:

$$\Phi_1^{(n)}(z)=\frac{1}{\delta_1^{(n)}}\left\{\frac{\varepsilon_1^{(n)}}{2\pi iz}\int\limits_{L'}\frac{f^{(n)}(t)\,dt}{t-z}+K_1[F_1(z)+F_1(0)]-\overline{a_0^{(n)}}\right\}$$

$$\Psi_1^{(n)}(z)=\frac{1}{z^2}\Phi_1^{(n)}(z)-\frac{1}{z}\Phi_1^{(n)\prime}(z)-\frac{\varepsilon_1^{(n)}}{2\pi iz}\int\limits_{L'}\frac{\overline{f^{(n)}(t)}\,dt}{t-z}-\frac{a_0^{(n)}}{z^2}-$$

$$-K_1\left[\frac{1}{z^2}F_1(z)-\frac{1}{z}F'_1(z)-\frac{1}{z^2}F_1(0)\right]\tag{4.3}$$

$$\Phi_2^{(n)}(z)=\frac{1}{\delta_2^{(n)}}\left\{\frac{-\varepsilon_2^{(n)}}{2\pi iz}\int\limits_{L'}\frac{f^{(n)}(t)dt}{t-z}+K_2\left[F_2(z)+b_2^{(n)}z+b_1^{(n)}-\frac{a_{-2}}{z}\right]\right\}$$

$$\Psi_2^{(n)}(z)=\frac{1}{z^2}\Phi_2^{(n)}(z)-\frac{1}{z}\Phi_2^{(n)'}(z)+\frac{\varepsilon_2^{(n)}}{2\pi iz}\int\limits_{L'}\frac{\overline{f^{(n)}(t)}\,dt}{t-z}-$$

$$-K_2\left[\frac{1}{z^2}F_2(z)-\frac{1}{z}F_2'(z)-\frac{\overline{b_2^{(n)}}}{z^3}-\frac{\overline{b_1^{(n)}}}{z^2}-\frac{\overline{a}_{-2}}{z}\right] \qquad (4.4)$$

В формулах (4.3) и (4.4) введены обозначения

$$a_0^{(n)}=\Phi_1^{(n)}(0),\quad b_2^{(n)}=[\delta_2^{(n)}-1]\,a_2^{(1)},\quad b_1^{(n)}=\frac{\delta_2^{(n)}}{2}[a_2^{(0)}+\overline{a_2^{(0)}}]-a_2^{(0)} \qquad (4.5)$$

a_{-2}, $a_2^{(0)}$ — коэффициенты разложения в ряд при больших $|z|$ функции $F_2(z)$:

$$F_2(z)=a_2^{(1)}z+a_2^{(0)}+\frac{a_{-2}}{z}+\cdots. \qquad (4.6)$$

Из (4.3) следует равенство

$$\int\limits_{L'}\frac{f^{(n)}(t)\,dt}{t}=\int\limits_{L'}\frac{\overline{f^{(n)}(t)}\,dt}{\overline{t}}=0 \qquad (4.7)$$

Для определения функции $f^{(n)}(\sigma)$ $(\sigma\in L')$ удовлетворим второму условию спая на L' (одно условие спая на L' мы уже удовлетворили)

$$\varepsilon_2^{(m)}\sigma\left\{\delta_1^{(m)}\Phi_1^{(n)}(\sigma)+\overline{\Phi_1^{(n)}(\sigma)}-\frac{1}{\sigma}\overline{\Phi_1^{(n)'}(\sigma)}-\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Psi_1^{(n)}(\sigma)}-\right.$$

$$\left.-K_1[F_1(\sigma)+\overline{F_1(\sigma)}-\frac{1}{\sigma}\overline{F_1'(\sigma)}]\right\}^+=\varepsilon_1^{(m)}\sigma\left\{\delta_2^{(m)}\Phi_2^{(n)}(\sigma)+\right.$$

$$\left.+\overline{\Phi_2^{(n)}(\sigma)}-\frac{1}{\sigma}\overline{\Phi_2^{(n)'}(\sigma)}-\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Psi_2^{(n)}(\sigma)}-K_2\left[F_2(\sigma)+\overline{F_2(\sigma)}-\frac{1}{\sigma}\overline{F_2'(\sigma)}\right]\right\}^- $$

$$(\sigma\in L') \qquad (4.8)$$

Здесь $\varepsilon_k^{(m)}$ и $\delta_k^{(m)}$ $(k,\ m=1,2)$ определяются формулами (4.2). В условии (4.8) следует полагать $m=2$, когда $n=1$ и $m=1$, когда $n=2$.

Легко видеть, что в первом случае, т. е. когда $n=1$ и $m=2$, получим решение первой основной задачи термоупругости, во втором — решение второй основной задачи.

Удовлетворив условию (4.8), получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции

$$l_1^{(n)}f^{(n)}(\sigma)+\frac{l_2^{(n)}}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{f^{(n)}(t)\,dt}{t-\sigma}=L_2^{(n)}F_2^-(\sigma)-L_1^{(n)}F_1^+(\sigma)+\sum_{k=0}^{2}C_k^{(n)}\sigma^k$$

$$(\sigma\in L') \qquad (4.9)$$

В уравнении (4.9) введены обозначения

$$l_1^{(n)}=\frac{1}{2}\left[M_1^{(n)}\xi_1^{(n)}-M_2^{(n)}\xi_2^{(n)}\right],\qquad l_2^{(n)}=\frac{1}{2}\left[L_1^{(n)}\xi_1^{(n)}+L_2^{(n)}\xi_2^{(n)}\right]$$

$$M_1^{(n)}=\left[\frac{\delta_1^{(m)}}{\delta_1^{(n)}}+1\right]\xi_2^{(m)},\qquad M_2^{(n)}=\left[\frac{\delta_2^{(m)}}{\delta_2^{(n)}}+1\right]\xi_1^{(m)},\qquad L_1^{(n)}=\left[\frac{\delta_1^{(m)}}{\delta_1^{(n)}}-1\right]\xi_2^{(m)}.$$

$$L_2^{(n)}=\left[\frac{\delta_2^{(m)}}{\delta_2^{(n)}}-1\right]\xi_1^{(m)},\qquad C_0^{(n)}=-K_2L_2^{(n)}a_{-2},\qquad C_2^{(n)}=K_2L_2^{(n)}b_2^{(n)} \tag{4.10}$$

$$C_1^{(n)}=K_2L_2^{(n)}b_1^{(n)}-L_1^{(n)}\left[K_1\overline{F_1(0)}-\overline{a_0^{(n)}}\right]$$

Решение уравнения (4.9) определяется формулой

$$f^{(n)}(\sigma)=W^{(n)+}(\sigma)-W^{(n)-}(\sigma)\qquad(\sigma\in L') \tag{4.11}$$

где

$$W^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{f^{(n)}(t)\,dt}{t-z}=\frac{X^{(n)}(z)}{2\pi i\,(l_1^{(n)}+l_2^{(n)})}\int_{L'}\frac{\omega^{(n)}(t)\,dt}{X^{(n)+}(t)\,(t-z)}+$$
$$+Q_{p-1}^{(n)}(z)\,X^{(n)}(z) \tag{4.12}$$

Через $\omega^{(n)}(t)$ обозначена правая часть уравнения (4.9);

$Q_{p-1}^{(n)}(z)=A_0^{(n)}+A_1^{(n)}z+\cdots+A_{p-1}^{(n)}z^{p-1}$ — полином;

под функцией

$$X^{(n)}(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-b_j)^{-\frac{1}{2}+i\beta_n}(z-a_{j+1})^{-\frac{1}{2}-i\beta_n}\qquad(a_{p+1}=a_1)$$

$$\beta_n=\frac{\ln g^{(n)}}{2\pi},\qquad g^{(n)}=\frac{l_2^{(n)}-l_1^{(n)}}{l_2^{(n)}+l_1^{(n)}} \tag{4.13}$$

подразумевается ветвь, для которой $\lim\limits_{|z|\to\infty}\left[z^pX^{(n)}(z)\right]=1$.

В случае первой основной задачи термоупругости $(n=1,\ m=2)$ для определения постоянных $A_j^{(1)}$ $(j=0,\ 1,\cdots,p-1)$ служат условия однозначности смещений на каждом из разрезов [3]

$$\int_{a_k}^{b_k}\frac{1}{t}\left[\frac{\partial u_2}{\partial\varphi}+i\frac{\partial v_2}{\partial\varphi}-\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}-i\frac{\partial v_1}{\partial\varphi}\right]dt=0\qquad(k=1,\ 2,\cdots,p) \tag{4.14}$$

В случае второй основной задачи термоупругости $(n=2,\ m=1)$ для определения констант $A_j^{(2)}$ $(j=0,\ 1,\cdots,p-1)$ служат соотношения [3]

$$\int\limits_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{t}\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi} + i\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right] dt = u\,(a_{k+1}) + iv(a_{k+1}) - u\,(b_k) - iv\,(b_k) \tag{4.15}$$

$$(k = 1,\ 2, \cdots, p;\ a_{p+1} = a_1)$$

Постоянная $a_0^{(n)}$ определяется с помощью первого равенства (4.5). Учитывая (4.7), находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{\overline{f^{(n)}(t)}\,dt}{t - z} = -\overline{W^{(n)}}\left(\frac{1}{z}\right) \tag{4.16}$$

Таким образом, формулы (4.3) и (4.4) вместе с (4.12) и (4.16) полностью определяют функции напряжений для шайбы и пластинки.

5. Детальнее рассмотрим кусочно-однородную плоскость, ослабленную одним разрезом $a_1 b_1\,(a_1 = e^{-i\theta},\ \ b_1 = e^{i\theta})$, берег которого со стороны шайбы теплоизолирован, а со стороны пластинки поддерживается при постоянной температуре T_0. На бесконечности действует однородный поток тепла $\overline{\mathbf{q}}_0$.

В этом случае функции распределения температуры определены формулами (3.15).

Для функции $W^{(n)}(z)$ имеем выражение

$$W^{(n)*}(z) = \sum_{k=1}^{2} E_k^{(n)}\left[a_2^{(1)} z - \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{X_k(0)}\right] X_k(z) + \sum_{j=0}^{3}\left[s_j^{(n)} z^j + \gamma_j^{(n)} z^j X^{(n)}(z)\right] \tag{5.1}$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma_0^{(n)} = \frac{1}{X^{(n)}(0)}\left[\overline{a_2^{(1)}}\sum_{k=1}^{2} E_k^{(n)} - s_0^{(n)}\right], \quad \gamma_j^{(n)} = -\frac{1}{2l_2^{(n)}}\, d_j^{(n)} - r_j^{(n)} \tag{5.2}$$

$$(j = 1,\ 2,\ 3)$$

$$s_0^{(n)} = \frac{C_0^{(n)}}{2l_2^{(n)}}, \quad s_1^{(n)} = \frac{C_1^{(n)}}{2l_2^{(n)}} + E_0^{(n)}, \quad s_2^{(n)} = \frac{C_2^{(n)}}{2l_2^{(n)}}, \quad s_3^{(n)} = 0 \tag{5.3}$$

$$E_0^{(n)} = \frac{T_0\left[L_2^{(n)} K_2 - L_1^{(n)} K_1\right]}{4l_2^{(n)}}, \quad E_1^{(n)} = \frac{iL_1^{(n)} K_1\sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}} - g_1 L_2^{(n)} K_2}{2\,(l_1^{(n)} + l_2^{(n)})\,(1 - g_1 g^{(n)})} \tag{5.4}$$

$$E_2^{(n)} = \frac{iL_1^{(n)} K_1\sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}} + g_2 L_2^{(n)} K_2}{-2\,(l_1^{(n)} + l_2^{(n)})\,(1 - g_2 g^{(n)})}$$

$$d_1^{(n)} = C_2^{(n)}\alpha_{-1}^{(n)} - C_1^{(n)}\alpha_{-2}^{(n)} + C_0^{(n)}, \quad d_2^{(n)} = C_1^{(n)} - C_2^{(n)}\alpha_{-2}^{(n)}, \quad d_3^{(n)} = C_2^{(n)} \tag{5.5}$$

$$
\begin{aligned}
r_1^{(n)} &= \sum_{k=1}^{2} E_k^{(n)} \left| \gamma_{1k}^{(n)} a_2^{(1)} - \gamma_{2k}^{(n)} \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{X_k(0)} \right| + E_0^{(n)} \alpha_{-1}^{(n)} \\
r_2^{(n)} &= \sum_{k=1}^{2} E_k^{(n)} \left| \gamma_{2k}^{(n)} a_2^{(1)} - \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{X_k(0)} \right| + E_0^{(n)}, \qquad r_3^{(n)} = a_2^{(1)} \sum_{k=1}^{2} E_k^{(n)}
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{1k}^{(n)} &= \alpha_{-1k} + \alpha_{-1}^{(n)} - \alpha_{-2k}\, \alpha_{-2}^{(n)} \\
\gamma_{2k}^{(n)} &= \alpha_{-2k} - \alpha_{-2}^{(n)}
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

α_{-2k}, α_{-1k}, $\alpha_{-2}^{(n)}$, $\alpha_{-1}^{(n)}$ — коэффициенты разложения в ряд при больших $|z|$ функций $X_k(z)$ и $1/X^{(n)}(z)$:

$$
\begin{aligned}
X_k(z) &\underset{|z|\to\infty}{=} z + \alpha_{-2k} + \frac{\alpha_{-1k}}{z} + \frac{\alpha^{*}_{-2k}}{z^2} + \cdots \\
\frac{1}{X^{(n)}(z)} &\underset{|z|\to\infty}{=} z - \alpha_{-2}^{(n)} + \frac{\alpha_{-1}^{(n)}}{z} + \frac{\alpha^{*(n)}_{-2}}{z^2} + \cdots
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Постоянная $a_0^{(n)}$ определяется формулой

$$
a_0^{(n)} = \frac{\delta_1^{(n)} R_n - \eta_n \overline{R_n}}{[\delta_1^{(n)}]^2 - \eta_n^2} \tag{5.9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_n = \frac{\varepsilon_n^{(1)}}{2l_2^{(n)}} \Big\{ & [1 + \alpha_{-2}^{(n)} X^{(n)}(0)] [L_2^{(n)} K_2 b_1^{(n)} - L_1^{(n)} K_1 \overline{p_0}] - [C_0^{(n)} + C_2^{(n)} \alpha_{-1}^{(n)}] X^{(n)}(0) + \\
& + 2l_2^{(n)} \Big[E_0^{(n)} + (\alpha_1^{(n)} \eta_0^{(n)} - r_1^{(n)}) X^{(n)}(0) + \sum_{k=1}^{2} E_k^{(n)} (a_2^{(1)} X_k(0) - \overline{a_2^{(1)}} \alpha_{1k}) \Big] \Big\} + \\
& + K_1 (p_n + \overline{p_0})
\end{aligned}
$$

$$
\eta_n = 1 - \frac{\varepsilon_1^{(n)} L_1^{(n)}}{2l_2^{(n)}} [1 + \alpha_{-2}^{(n)} X^{(n)}(0)] \tag{5.10}
$$

Постоянные $\alpha_1^{(n)}$, α_{1k}, вошедшие в соотношения (5.10), — коэффициенты разложения функций $X^{(n)}(z)$ и $X_k(z)$:

$$
\begin{aligned}
X^{(n)}(z) &\underset{|z|\to\infty}{=} X^{(n)}(0) [1 + \alpha_1^{(n)} z + \alpha_2^{(n)} z^2 + \cdots] \\
X_k(z) &\underset{|z|\to 0}{=} X_k(0) [1 + \alpha_{1k} z + \alpha_{2k} z^2 + \cdots]
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Пример 1. Пусть берега разреза свободны от внешних напряжений ($n = 1$, $m = 2$), а в отношении температурных характеристик выполняются граничные условия п.5.

В этом случае все величины, вошедшие в формулы этого пункта, подсчитываются при значениях $n = 1$, $m = 2$.

Контактные напряжения σ_r и $\tau_{r\varphi}$ на L', а также кольцевые напряжения в шайбе $\sigma_\varphi^{(1)}$ и в пластинке $\sigma_\varphi^{(2)}$ на линии раздела материалов определяются формулами

$$\sigma_r(t) = \operatorname{Re}\frac{1}{t}\left[W^{(1)+}(t) - W^{(1)-}(t)\right]$$
$$\tau_{r\varphi}(t) = \operatorname{Jm}\frac{1}{t}\left[W^{(1)+}(t) - W^{(1)-}(t)\right] \quad (t\in L') \tag{5.12}$$

$$\sigma_\varphi^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re}\left[\frac{1}{t}W^{(1)-}(t) + K_1\overline{F_1(0)} - \overline{a_0^{(1)}}\right] - \sigma_r(t)$$
$$\sigma_\varphi^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re}\left[K_2\left(b_2^{(1)}t + b_1^{(1)} + \frac{a_{-2}}{t}\right) - \frac{1}{t}W^{(1)-}(t)\right] - \sigma_r(t) \quad (t\in L') \tag{5.13}$$

$$\sigma_\varphi^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re}\left[\frac{1}{t}W^{(1)}(t) + K_1\overline{F_1(0)} - \overline{a_0^{(1)}}\right]$$
$$\sigma_\varphi^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re}\left[K_2\left(b_2^{(1)}t + b_1^{(1)} + \frac{a_{-2}}{t}\right) - \frac{1}{t}W^{(1)}(t)\right] \quad (t\in L'') \tag{5.14}$$

Пример 2. В отношении температурных характеристик выполняются граничные условия п.5, а параметры n и m принимают значения: $n=2$, $m=1$.

Здесь все величины, вошедшие в формулы 5-го пункта, следует подсчитывать при значениях $n=2$, $m=1$.

Контактные напряжения $\sigma_r^{(k)}$, $\tau_{r\varphi}^{(k)}$ $(k=1,\ 2)$ и кольцевые напряжения в пластинке $\sigma_\varphi^{(2)}$ и в шайбе $\sigma_\varphi^{(1)}$ на линии раздела материалов определяются формулами

$$\sigma_r(t) = \operatorname{Re}\left[\Omega_1^+(t) - \mu_1 W^{(2)-}(t)\right], \quad \tau_{r\varphi}(t) = \operatorname{Jm}\left[\Omega_1^+(t) - \mu_1 W^{(2)-}(t)\right] \quad (t\in L') \tag{5.15}$$

$$\sigma_r^{(1)}(t) = \operatorname{Re}\left[\Omega_1(t) - \mu_1 W^{(2)}(t)\right], \quad \sigma_r^{(2)}(t) = \operatorname{Re}\Omega_2(t)$$
$$\tau_{r\varphi}^{(1)}(t) = \operatorname{Jm}\left[\Omega_1(t) - \mu_1 W^{(2)}(t)\right], \quad \tau_{r\varphi}^{(2)}(t) = \operatorname{Jm}\Omega_2(t) \quad (t\in L'') \tag{5.16}$$

$$\sigma_\varphi^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re}\Omega_3^+(t) - \sigma_r(t), \quad \sigma_\varphi^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re}\Omega_4^-(t) - \sigma_r(t) \quad (t\in L') \tag{5.17}$$

$$\sigma_\varphi^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re}\Omega_3(t) - \sigma_r^{(1)}(t), \quad \sigma_\varphi^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re}\Omega_4(t) - \sigma_r^{(2)}(t) \quad (t\in L') \tag{5.18}$$

В соотношениях (5.15) — (5.18) введены обозначения

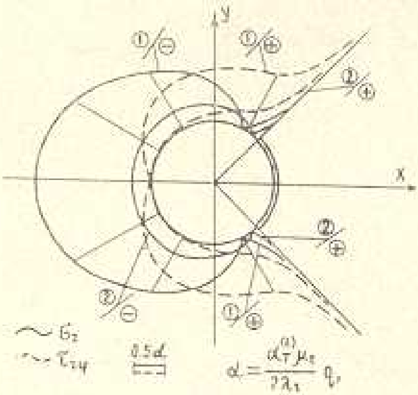
$$\Omega_1(z) = \frac{1+\varkappa_1}{\varkappa_1}\left[\overline{a_0^{(2)}} - K_1\overline{F_1(0)} - K_1F_1(z)\right] - \frac{\mu_1}{\varkappa_1}W^{(2)}(z)$$

$$\Omega_2(z) = \frac{1+\varkappa_2}{\varkappa_2}\left\{K_2\left[\frac{a_{-2}}{z} - b_1^{(2)} - b_2^{(2)}z - F_2(z)\right] + \mu_2 W^{(2)}(z)\right\} \tag{5.19}$$

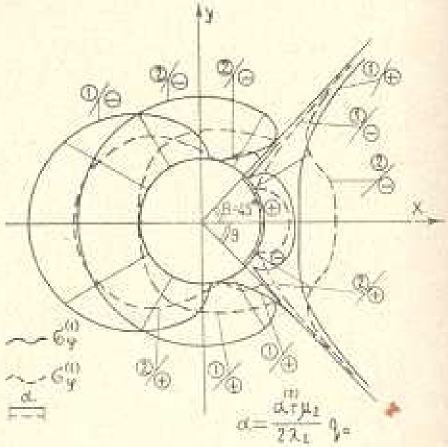
$$\Omega_3(z) = \frac{1}{\varkappa_1}\left[\overline{a_0^{(2)}} - K_1 \overline{F_1(0)}\right] - \frac{1+\varkappa_1}{\varkappa_1} K_1 F_1(z) - \frac{\mu_1}{\varkappa_1} W^{(2)}(z)$$

$$\Omega_4(z) = \frac{\mu_2}{\varkappa_2} W^{(2)}(z) - \frac{K_2}{\varkappa_2}\left[b_2^{(2)} z + b_1^{(2)} - \frac{a_{-2}}{z} \right] - \frac{1+\varkappa_2}{\varkappa_2} K_2 F_2(z) \quad (5.19)$$

На фиг. 1 и 2 изображены графики распределения контактных и кольцевых напряжений на линии раздела материалов при $\theta = 45^\circ$, подсчитанных с помощью формул (5.12) — (5.14) в предположении, что $T_0 = 0$, а $\overline{q}_0$ направлен по отрицательной оси Ox.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Цифра „1" относится к случаю, когда $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1.43$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1.84$, $\frac{\alpha_T^{(1)}}{\alpha_T^{(2)}} = 0.69$ (пластинка из алюминия, а шайба—из меди); цифра „2" — к случаю, когда $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1.43$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0.52$ и $\frac{\alpha_T^{(1)}}{\alpha_T^{(2)}} = 0.75$ (алюминиевая пластинка и латунная шайба).

Графики напряжений σ_r, $\sigma_\varphi^{(1)}$ и $\sigma_\varphi^{(2)}$ — симметричные относительно оси Ox, а напряжений $\tau_{r\varphi}$ — антисимметричные.

Львовский
государственный университет

Поступила 22 V 1970

Բ. Ի. ՊՈՊՈՎԻՉ, Դ. Վ. ԳՐԻԼԻՑԿԻ

ՇՐՋԱՆԱՁԵՎ ԵՐԿԱՅՆՔՈՎ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ, ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ՍԱԼԻ ՋԵՐՄԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ամփոփում

Լուծված են ջերմաառաձգականության հիմնական եզրային խնդիրները տարասեռ շրջանային ներդրվածքով անսահմանափակ իզոտրոպ սալի համար նյութերի բաժանման գծի վրա ճաքերի (կտրվածքների) առկայության դեպքում, երբ ճաքերի ափերին տրված են ջերմաստիճանային բնութագրերի խառը պայմաններ։

THERMOELASTIC CONDITION OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH CUTS ALONG ITS CIRCUMFERENCE

B. J. POPOVICH, D. V. GRILITSKY

Summary

A solution is presented for the first and the second fundamental problems of thermoelasticity for an infinite isotropic plate with a soldered—in circular foreign inclusion with cuts along the line of soldering on whose edges mixed conditions for temperature characteristics are prescribed.

The bases of the plate are assumed to be heat-insulated, the thermo-contact between its components on the soldering arcs to be perfect.

The temperature field and stress-conditions in the piecewise homogeneous element are also determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кит Г. С., Френчко Ю. С.* Температурные напряжения в упругой плоскости с термоизолированной дугообразной трещиной. Прикл. механ., т. IV, вып. 9, 1968.
2. *Гайвась И. В.* Установившееся термоупругое состояние неоднородной плоскости с разрезом вдоль окружности. „Физ.-хим. механ. материалов", 5, №3, 1969.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
5. *Лебедев Н. Н.* Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М., 1937.