ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 6, 1970 Механика

А. А. БАБЛОЯН, В. С. ТОНОЯН

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Исследованию осесимметричной задачи для сплошного и полого круглого цилиндра конечной длины посвящено много работ, о которых подробно изложено в [1—2]. Во всех этих работах на боковых поверхностях заданы напряжения и, кроме [1—2], все задачи решены приближенно.

В настоящей статье дается точное решение осесимметричной задачи теории упругости для полого круглого цилиндра конечной длины, когда на боковой поверхности известны компоненты вектора перемещения, а на торцах заданы компоненты напряжения. Задача решается методом Фурье. Решение представляется в виде рядов Фурье и Фурье-Дини. Определение коэффициентов интегрирования сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны, а свободные члены ограничены.

Рассмотрим осесимметричную задачу для полого круглого изотропного цилиндра длиной $l$ и радиусами $R$ и $s$ $(R > s)$, когда на торцах цилиндра заданы напряжения, а на цилиндрических поверхностях известны перемещения. Будем пользоваться цилиндрической системой координат. Известно [3], что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к определению одной бигармонической функции $\Phi(r, z)$, которая в рассматриваемой задаче удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$
\begin{gathered}
\sigma_z(r, 0) = f_1(r), \quad 2Gu(s, z) = f_3(z) \\
\sigma_z(r, l) = f_2(r), \quad 2Gu(R, z) = f_4(z) \\
\begin{matrix} 2Gw(s, z) = f_5(z), \\ 2Gw(R, z) = f_6(z), \end{matrix} \qquad \tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, l) = 0
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Решив бигармонические уравнения методом разделения переменных, для круглого полого цилиндра функцию $\Phi(r, z)$ получим в виде

$$
\Phi(r, z) = \Phi_0(r, z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z)\, W_0(\beta_k r) \tag{2}
$$

$$(s \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant z \leqslant l)$$

где $W_i(x)$ — функции Вебера

$$W_i(\beta_k r) = J_i(\beta_k r)\,Y_0(\beta_k R) - Y_i(\beta_k R)\,J_0(\beta_k R) \tag{3}$$

$J_i(x)$ и $Y_k(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента, соответственно, первого и второго родов,

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$$

а $\beta_k$ — корни уравнения

$$W_0(\beta_k s) = 0 \tag{4}$$

$$\Phi_0(r, z) = z(Ar^2 + Bz^2 + Cz + D\ln r)$$

$$Z_k(z) = A_k \operatorname{sh}\beta_k z + B_k \operatorname{ch}\beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{sh}\beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{ch}\beta_k z$$

$$R_k(r) = E_k P_0(\lambda_k r) + F_k Q_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r P_1(\lambda_k r) + H_k \lambda_k r Q_1(\lambda_k r)$$

$$P_0(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_0(\lambda_k R) - I_0(\lambda_k R) K_0(\lambda_k r) \tag{5}$$

$$Q_0(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_0(\lambda_k s) - I_0(\lambda_k s) K_0(\lambda_k r)$$

$$P_1(\lambda_k r) = I_1(\lambda_k r) K_1(\lambda_k s) - K_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k s)$$

$$Q_1(\lambda_k r) = I_1(\lambda_k R) K_1(\lambda_k r) - I_1(\lambda_k r) K_1(\lambda_k R)$$

$I_i(x)$, $K_i(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента, соответственно, первого и второго родов.

Используя обычные формулы для напряжений и перемещений, выраженных через искомую функцию $\Phi(r, z)$ [3], будем иметь

$$\sigma_z(r, z) = 4(2-\nu)A + 6(1-\nu)B +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{[(1-2\nu)D_k - A_k]\operatorname{ch}\beta_k z + [(1-2\nu)C_k - B_k]\operatorname{sh}\beta_k z -$$

$$- C_k\beta_k z\operatorname{ch}\beta_k z - D_k\beta_k z\operatorname{sh}\beta_k z\} W_0(\beta_k r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \{R_k(\lambda_k r) + 2(2-\nu)[G_k P_2(\lambda_k r) - H_k Q_2(\lambda_k r)]\} \cos\lambda_k z$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{[A_k + 2\nu D_k]\operatorname{sh}\beta_k z + [B_k + 2\nu C_k]\operatorname{ch}\beta_k z +$$

$$+ C_k\beta_k z\operatorname{sh}\beta_k z + D_k\beta_k z\operatorname{ch}\beta_k z\} W_1(\beta_k r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \{R_k(\lambda_k r) + 2(1-\nu)[G_k P_2'(\lambda_k r) - H_k Q_2(\lambda_k r)]\} \sin\lambda_k z$$

$$2Gu(r, z) = -2Ar - \frac{D}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 W_1(\beta_k r)[(A_k + D_k)\operatorname{ch}\beta_k z +$$

$$+ (B_k + C_k)\operatorname{sh}\beta_k z + C_k\beta_k z\operatorname{ch}\beta_k z + D_k\beta_k z\operatorname{sh}\beta_k z] -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 R_k'(\lambda_k r) \cos \lambda_k z$$

$$2Gw(r, z) = 2(1-2\nu) C + [8(1-\nu) A + 6(1-2\nu) B] z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \{ [2(1-2\nu) D_k - A_k] \operatorname{sh} \beta_k z + [2(1-2\nu) C_k - B_k] \operatorname{ch} \beta_k z -$$

$$- C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z - D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z \} W_0(\beta_k r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{ R_k(\lambda_k r) + 4(1-\nu) [G_k P_2(\lambda_k r) - H_k Q_2(\lambda_k r)] \} \sin \lambda_k z \qquad (6)$$

где

$$P_2(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_1(\lambda_k s) + K_0(\lambda_k r) I_1(\lambda_k s)$$
$$Q_2(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_1(\lambda_k R) + K_0(\lambda_k r) I_1(\lambda_k R) \qquad (7)$$

В граничных условиях (1) допускаем, что функции $\{f_i\}$ можно представить в виде рядов Фурье и Фурье-Дини [4]

$$f_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k W_0(\beta_k r), \quad f_2(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k' W_0(\beta_k r)$$

$$f_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos \lambda_k z, \quad f_4(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k' \cos \lambda_k z \qquad (8)$$

$$f_5(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \lambda_k z, \quad f_6(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k' \sin \lambda_k z$$

Кроме того, предполагаем, что функции $f_3, f_4, f_5, f_6$ и их первые производные непрерывны в указанных интервалах.

Удовлетворяя условиям (1) и имея в виду (8), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (5), получаем следующие соотношения:

$$C = 0, \quad B = -\frac{4(1-\nu)}{3(1-2\nu)} A$$

$$2AR + \frac{D}{R} + b_0' + \frac{2\nu}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k R) [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] = 0 \qquad (9)$$

$$2As + \frac{D}{s} + b_0 + \frac{2\nu}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k s) [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] = 0$$

$$B_k = -2\nu C_k, \quad A_k = -\beta_k l C_k - D_k (2\nu + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l) \qquad (10)$$

$$\delta_{1k} E_k = -\frac{c_k}{\lambda_k^2} + \frac{4(1-\nu)}{\lambda_k s} G_k + [\delta_{2k} \lambda_k s - 4(1-\nu) \delta_{4k}] H_k$$

$$\delta_{1k} F_k = \frac{c_k}{\lambda_k^2} - [\delta_{2k} \lambda_k R + 4(1-\nu)\delta_{3k}] G_k + \frac{4(1-\nu)}{\lambda_k R} H_k \tag{10}$$

$$\lambda_p R_p'(\lambda_p R) + b_p' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta_k^3 (-1)^p W_1(\beta_k R) [(1-\nu)\lambda_p^2 - \nu\beta_k^2]}{l(\beta_k^2 + \lambda_p^2)^2} \times$$

$$\times \{D_k \operatorname{sh}\beta_k l + C_k [\operatorname{ch}\beta_k l - (-1)^p]\}$$

$$\lambda_p R_p'(\lambda_p s) + b_p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta_k^3 (-1)^p W_1(\beta_k s) [(1-\nu)\lambda_p^2 - \nu\beta_k^2]}{l(\beta_k^2 + \lambda_p^2)^2} \times$$

$$\times \{D_k \operatorname{sh}\beta_k l + C_k [\operatorname{ch}\beta_k l - (-1)^p]\}$$

$$\beta_p^3 N_p \{[D_p(1-2\nu) - A_p](\operatorname{ch}\beta_p l + 1) + [C_p(1-2\nu) - B_p]\operatorname{sh}\beta_p l -$$

$$- \beta_p l (C_p \operatorname{ch}\beta_p l + D_p \operatorname{sh}\beta_p l)\} - (a_p + a_p') N_p -$$

$$- \frac{8\nu A}{1-2\nu} \frac{R W_1(\beta_p R) - s W_1(\beta_p s)}{\beta_p} +$$

$$+ 2\beta_p \sum_{k=2,4}^{\infty} \lambda_k^3 \left\{ \frac{c_k' R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{\lambda_k^2 (\lambda_k^2 + \beta_p^2)} + \right. \tag{11}$$

$$+ \frac{2[(1-\nu)\lambda_k^2 - \nu\beta_p^2]}{\lambda_k(\lambda_k^2 + \beta_p^2)^2} \left[ W_1(\beta_p s)(G_k - H_k \lambda_k s \delta_{4k}) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\beta_p R}(H_k - G_k \lambda_k R \delta_{3k}) \right] \right\} = 0$$

$$\beta_p^3 N_p \{[D_p(1-2\nu) - A_p](\operatorname{ch}\beta_p l - 1) + [C_p(1-2\nu) - B_p]\operatorname{sh}\beta_p l -$$

$$- \beta_p l (C_p \operatorname{ch}\beta_p l + D_p \operatorname{sh}\beta_p l)\}$$

$$- N_p (a_p' - a_p) = 2\beta_p \sum_{k=1,3}^{\infty} \lambda_k^3 \left\{ \frac{c_k' R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{\lambda_k^2 (\lambda_k^2 + \beta_p^2)} + \right.$$

$$+ \frac{2[(1-\nu)\lambda_k^2 - \nu\beta_p^2]}{\lambda_k(\lambda_k^2 + \beta_p^2)^2} \left[ W_1(\beta_p s)(G_k - H_k \lambda_k s \delta_{4k}) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\beta_p R}(H_k - G_k \lambda_k R \delta_{3k}) \right] \right\}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta_{1k} &= K_0(\lambda_k s) I_0(\lambda_k R) - I_0(\lambda_k s) K_0(\lambda_k R) \\
\delta_{2k} &= K_1(\lambda_k s) I_1(\lambda_k R) - I_1(\lambda_k s) K_1(\lambda_k R) \\
\delta_{3k} &= K_1(\lambda_k s) I_0(\lambda_k R) + I_1(\lambda_k s) K_0(\lambda_k R) \\
\delta_{4k} &= K_1(\lambda_k R) I_0(\lambda_k s) + I_1(\lambda_k R) K_0(\lambda_k s)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$N_p = \int_s^R r W_1^2(\beta_p r)\,dr = \int_s^R r W_0^2(\beta_p r)\,dr = \frac{R^2}{2} W_1^2(\beta_p R) - \frac{s^2}{2} W_1^2(\beta_p s) \quad (13)$$

При получении этих соотношений были использованы разложения Фурье функций $\mathrm{sh}\beta_k z$, $\mathrm{ch}\beta_k z$, $z\mathrm{sh}\beta_k z$, $z\mathrm{ch}\beta_k z$ по функциям $\left\{1;\ \cos\frac{p\pi z}{l}\right\}$ и Фурье-Дини [4] функций $P_i(\lambda_k r)$, $Q_i(\lambda_k r)$ $(i = 0, 1, 2)$ по функциям $\{W_0(\beta_k r)\}$, где $\beta_k$ — корни уравнения (4).

Из соотношений (9) и (10) коэффициенты $A$, $B$, $D$, $A_k$, $B_k$, $E_k$, $F_k$ выражаются через коэффициенты $C_k$, $D_k$, $G_k$, $H_k$. Для определения постоянных $C_k$, $D_k$, $G_k$ и $H_k$ из соотношений (11) получаем следующую бесконечную систему четырех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
d_{11}U_p + d_{12}V_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} Z_{kp} + \gamma_p^{(1)} \\
d_{21}U_p - d_{11}V_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} Z_{kp} + \gamma_p^{(2)} \\
d_{22}X_p = \sum_{k=1,\,3}^{\infty} c_{kp} L_{kp} + \gamma_p^{(3)} \\
d_{33}Y_p = -\sum_{k=2,\,4}^{\infty} c_{kp} L_{kp} + \gamma_p^{(4)}
\end{gathered} \quad (14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\beta_k^3 [D_k \mathrm{sh}\beta_k l + C_k (\mathrm{ch}\beta_k l + 1)] = \frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{N_k} X_k \\
\beta_k^3 [D_k \mathrm{sh}\beta_k l + C_k (\mathrm{ch}\beta_k l - 1)] = \frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{N_k} Y_k
\end{gathered} \quad (15)$$

$$\begin{gathered}
\frac{\lambda_k^2 R}{2} [(1 - \lambda_k \sqrt{Rs}\,\delta_{1k}) H_k + (\sqrt{R/s} - \lambda_k R \delta_{3k}) G_k] = V_k \\
\frac{\lambda_k^2 R}{2} [(1 + \lambda_k \sqrt{Rs}\,\delta_{1k}) H_k - (\sqrt{R/s} + \lambda_k R \delta_{3k}) G_k] = U_k
\end{gathered} \quad (16)$$

$$Z_{kp} = Y_k + \frac{1-(-1)^p}{2}(X_k - Y_k)$$

$$L_{kp} = \frac{1}{2}[V_k + U_k + (-1)^p (1 + M_p)(V_k - U_k)] \quad (17)$$

$$M_p = (-1)^p \sqrt{R/s}\,\beta_p R W_1(\beta_p s) - 1$$

$$a_{kp}=\frac{4(-1)^p\alpha\lambda_pR}{l}\,\frac{W_1^2(\beta_kR)\left[(1-\nu)\lambda_p^2-\nu\beta_k^2\right]}{N_k(\beta_k^2+\lambda_p^2)^2}\left(\sqrt{s/R}\,\frac{W_1(\beta_ks)}{W_1(\beta_kR)}+1\right)$$

$$b_{kp}=\frac{4(-1)^p\alpha\lambda_pR}{l}\,\frac{W_1^2(\beta_kR)\left[(1-\nu)\lambda_p^2-\nu\beta_k^2\right]}{N_k(\beta_k^2+\lambda_p^2)^2}\left(\sqrt{s/R}\,\frac{W_1(\beta_ks)}{W_1(\beta_kR)}-1\right)$$

$$c_{kp}=\frac{8}{R^2}\,\frac{(1-\nu)\lambda_k^2-\nu\beta_p^2}{(\beta_p^2+\lambda_k^2)^2} \tag{18}$$

$$R\delta_{1p}d_{11}=4(1-\nu)(\delta_{4p}-\delta_{3p})+\frac{(\delta_{1p}-\delta_{2p})(R+s)}{\lambda_pRs\left[\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}\right]}-$$
$$-\frac{\lambda_pR\delta_{4p}(\delta_{1p}\delta_{3p}-\delta_{2p}\delta_{4p})-\lambda_ps\delta_{3p}(\delta_{2p}\delta_{3p}-\delta_{1p}\delta_{4p})}{\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}}$$

$$R\delta_{1p}d_{12}=4(1-\nu)(\delta_{4p}+\delta_{3p})+\frac{(\delta_{1p}+\delta_{2p})(R-s)}{\lambda_pRs\left[\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}\right]}+$$
$$+\frac{2}{\lambda_p\sqrt{Rs}}\left[4(1-\nu)+\frac{\lambda_p\delta_{2p}(R\delta_{1p}-s\delta_{3p})}{\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}}\right]-$$
$$-\frac{\lambda_pR\delta_{4p}(\delta_{1p}\delta_{3p}-\delta_{2p}\delta_{4p})+\lambda_ps\delta_{3p}(\delta_{2p}\delta_{3p}-\delta_{1p}\delta_{4p})}{\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}}$$

$$R\delta_{1p}d_{21}=-4(1-\nu)(\delta_{3p}+\delta_{4p})-\frac{(\delta_{1p}+\delta_{2p})(R-s)}{\lambda_pRs\left[\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}\right]}+$$
$$+\frac{2}{\lambda_p\sqrt{Rs}}\left[4(1-\nu)+\frac{\lambda_p\delta_{2p}(R\delta_{4p}-s\delta_{2p})}{\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}}\right]+$$
$$+\frac{\lambda_pR\delta_{1p}(\delta_{1p}\delta_{3p}-\delta_{2p}\delta_{4p})+\lambda_ps\delta_{3p}(\delta_{2p}\delta_{3p}-\delta_{1p}\delta_{4p})}{\delta_{3p}\delta_{4p}-(\lambda_p^2Rs)^{-1}} \tag{19}$$

$$d_{22}=\alpha W_1(\beta_pR)\,\mathrm{th}\,\frac{\beta_pl}{2}\left(1-\frac{\beta_pl}{\mathrm{sh}\,\beta_pl}\right)$$

$$d_{33}=\alpha W_1(\beta_pR)\,\mathrm{cth}\,\frac{\beta_pl}{2}\left(1+\frac{\beta_pl}{\mathrm{sh}\,\beta_pl}\right)$$

$$\gamma_p^{(1)}/R=\frac{c_p\delta_{3p}-c_p'\delta_{4p}}{\delta_{1p}}+\frac{1}{\lambda_p\delta_{1p}}\left(\frac{c_p}{R}-\frac{c_p'}{s}\right)-(b_p+b_p')$$

$$\gamma_p^{(2)}/R=\frac{c_p\delta_{3p}+c_p'\delta_{4p}}{\delta_{1p}}-\frac{1}{\lambda_p\delta_{1p}}\left(\frac{c_p}{R}-\frac{c_p'}{s}\right)-(b_p-b_p')$$

$$\gamma_p^{(3)}=N_p(a_p'-a_p)+2\beta_p\sum_{k=1,3}^{\infty}\lambda_k\frac{c_k'RW_1(\beta_pR)-c_ksW_1(\beta_ps)}{\lambda_k^2+\beta_p^2}$$

$$\gamma_p^{(4)}=N_p(a_p'+a_p)+\frac{8\nu A}{1-2\nu}\,\frac{RW_1(\beta_pR)-sW_1(\beta_ps)}{\beta_p}-$$
$$-2\beta_p\sum_{k=2,4}^{\infty}\lambda_k\frac{c_k'RW_1(\beta_pR)-c_ksW_1(\beta_ps)}{\lambda_k^2+\beta_p^2} \tag{20}$$

Здесь $\alpha$ — постоянная, подлежащая определению. Если $p$ четное, то $Z_{kp}=Y_k$, $L_{kp}=V_k+M_p(V_k-U_k)$, а если $p$ нечетное, то $Z_{kp}=X_k$, $L_{kp}=U_k+M_p(U_k-V_k)$, где $M_p$ стремится к нулю. Докажем, что система (14) квази-вполне регулярна. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kp}|<\frac{4\alpha R}{l}\left[\frac{1}{2R}\frac{\delta_{4p}}{\delta_{1p}}-\frac{(1-2\nu)\lambda_p}{2R}\left(\frac{\delta_{4p}}{\delta_{1p}}\right)'-\right.$$

$$-(1-\nu)\frac{1+\sqrt{R/s}}{\lambda_p R^2\ln R/s}+\sqrt{R/s}\,\frac{(1-2\nu)\delta_{1p}'\lambda_p+2(1-\nu)\delta_{1p}}{2\lambda_p R^2\delta_{1p}^2}\approx$$

$$\approx\frac{4\alpha}{2l}\left|1-\frac{1-\nu}{\lambda_p R}\left(1+2\frac{1+\sqrt{R/s}}{\ln R/s}\right)-\frac{3-4\nu}{8\lambda_p^2R^2}-\cdots\right| \qquad (21)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{kp}|<\frac{4\alpha R}{l}\left|\frac{1}{2R}\frac{\delta_{4p}}{\delta_{1p}}-\frac{(1-2\nu)\lambda_p}{2R}\left(\frac{\delta_{4p}}{\delta_{1p}}\right)'-(1-\nu)\frac{1-\sqrt{R/s}}{\lambda_p R^2\ln R/s}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{R/s}\,\frac{(1-2\nu)\delta_{1p}'\lambda_p+2(1-\nu)\delta_{1p}}{2\lambda_p R^2\delta_{1p}^2}\right|\approx\frac{4\alpha}{2l}\left|1-\frac{1-\nu}{\lambda_p R}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{1-\sqrt{R/s}}{\ln R/s}\right)-\frac{3-4\nu}{8\lambda_p^2R^2}-\cdots\right|$$

где штрих при $\delta_{ip}$ означает производную по $\lambda_p$.

Решая первые два уравнения системы (14) относительно $U_p$ и $V_p$, получим новые коэффициенты $R_{kp}$ и $Q_{kp}$ при неизвестных $Z_{kp}$

$$R_{kp}=\frac{a_{kp}d_{11}+b_{kp}d_{12}}{d_{11}^2+d_{12}d_{21}},\qquad Q_{kp}=\frac{a_{kp}d_{21}-b_{kp}d_{11}}{d_{11}^2+d_{12}d_{21}} \qquad (22)$$

Пользуясь оценками (21) и асимптотическими разложениями функций $\delta_{ip}(\lambda_p)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ [5], получим следующие оценки:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|R_{kp}|<\frac{\alpha R}{l(3-4\nu)}\left|1-\frac{1-\nu}{\lambda_p R}\left(1+2\frac{1-\sqrt{R/s}}{\ln R/s}+2\frac{R}{(3-4\nu)s}+\cdots\right|\right.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|Q_{kp}|<\frac{\alpha R}{l(3-4\nu)}\left|1-\frac{1-\nu}{\lambda_p R}\left(1+2\frac{1+\sqrt{R/s}}{\ln R/s}+2\frac{R}{(3-4\nu)s}+\cdots\right|\right. \qquad (23)$$

Аналогично для последних двух уравнений системы (14) имеем

$$\frac{1}{d_{22}}\sum_{k=1,3}^{\infty}|c_{kp}|<\frac{l}{R\alpha}\,\frac{1+(1-2\nu)\dfrac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}}{1-\dfrac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}}$$

$$\frac{1}{d_{22}}\sum_{k=2,4}^{\infty}|c_{kp}|<\frac{l}{R\alpha}\,\frac{1-\dfrac{4\nu}{\beta_p l\operatorname{cth}\beta_p l/2}-\dfrac{(1-2\nu)\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}}{1+\beta_p l/\operatorname{sh}\beta_p l} \qquad (24)$$

Если $\alpha$ выбрать из равенства

$$\frac{\alpha R}{l(3-4\nu)}=\frac{l}{\alpha R}, \quad \alpha=\frac{l}{R}\sqrt{3-4\nu} \tag{25}$$

то из оценок (23) и (24) будет видно, что суммы коэффициентов при неизвестных стремятся к пределу $(3-4\nu)^{-1}$, то есть система (14) квази-вполне регулярна. Свободные члены (20) системы (14) ограничены. Решая систему (14), получаем выражения коэффициентов $X_k$, $Y_k$, $U_k$, $V_k$. Далее по формулам (9), (10), (15) и (16) искомые коэффициенты интегрирования выражаются через $X_k$, $Y_k$, $U_k$, $V_k$ по формулам

$$A=-\frac{3(1-2\nu)}{4(1-\nu)} \quad B=\frac{b_0 s-b_0' R}{2(R^2-s^2)}-\frac{\nu\alpha}{l(R+s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{W_1^2(\beta_k R)}{\beta_k^2 N_k}Y_k$$

$$D=\frac{(b_0 s-b_0' R)Rs}{R^2-s^2}-\frac{4\nu\alpha Rs}{l(R+s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{W_1^2(\beta_k R)}{\beta_k^2 N_k}Y_k$$

$$A_k=\frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{2N_k\beta_k^3}\left[X_k \operatorname{th}\frac{\beta_k l}{2}\left(2\nu-\frac{\beta_k l}{\operatorname{sh}\beta_k l}\right)-Y_k \operatorname{cth}\frac{\beta_k l}{2}\left(2\nu+\frac{\beta_k l}{\operatorname{sh}\beta_k l}\right)\right]$$

$$C_k=-\frac{B_k}{2\nu}=\frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{2N_k\beta_k^2}(X_k-Y_k)$$

$$D_k=\frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{2N_k\beta_k^2}\left[Y_k \operatorname{cth}\frac{\beta_k l}{2}-X_k \operatorname{th}\frac{\beta_k l}{2}\right]$$

$$G_k=\frac{(1+\lambda_k\sqrt{Rs}\,\delta_{4k})V_k+(\lambda_k\sqrt{Rs}\,\delta_{4k}-1)U_k}{\lambda_k^2 R\sqrt{R/s}-\lambda_k^2 R\sqrt{Rs}\,\delta_{3k}\delta_{4k})}$$

$$H_k=\frac{(\sqrt{R/s}+\lambda_k R\delta_{3k})V_k+(\sqrt{R/s}-\lambda_k R\delta_{3k})U_k}{\lambda_k^2 R(\sqrt{R/s}-\lambda_k^2 R\sqrt{Rs}\,\delta_{3k}\delta_{4k})}$$

$$\delta_{1k}E_k=-\frac{c_k}{\lambda_k^2}+\frac{4(1-\nu)[(1+\lambda_k\sqrt{Rs}\,\delta_{4k})V_k+(\lambda_k\sqrt{Rs}\,\delta_{4k}-1)U_k]}{\lambda_k^2 Rs(\sqrt{R/s}-\lambda_k^2 R\sqrt{Rs}\,\delta_{4k}\delta_{3k})}+$$

$$+\frac{[\delta_{2k}\lambda_k s-4(1-\nu)\delta_{4k}][(\sqrt{R/s}+\lambda_k R\delta_{3k})V_k+(\sqrt{R/s}-\lambda_k R\delta_{3k})U_k]}{\lambda_k^3 R(\sqrt{R/s}-\lambda_k^2 R\sqrt{Rs}\,\delta_{4k}\delta_{3k})}$$

$$\delta_{1k}F_k=\frac{c_k'}{\lambda_k^2}-$$

$$-\frac{[\delta_{2k}\lambda_k R+4(1-\nu)\delta_{3k}][(1+\lambda_k\sqrt{Rs}\,\delta_{4k})V_k+(\lambda_k\sqrt{Rs}\,\delta_{4k}-1)U_k]}{\lambda_k^3 R(\sqrt{R/s}-\lambda_k^2 R\sqrt{Rs}\,\delta_{3k}\delta_{4k})}+$$

$$+\frac{4(1-\nu)[(\sqrt{R/s}+\lambda_k R\delta_{3k})V_k+(\sqrt{R/s}-\lambda_k R\delta_{3k})U_k]}{\lambda_k^3 R^2(\sqrt{R/s}-\lambda_k^2 R\sqrt{Rs}\,\delta_{3k}\delta_{4k})}$$

Следовательно, напряжения и перемещения по известным формулам будут определены в любой точке полого цилиндра.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 VI 1970

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

## ՎԵՐՋԱՎՈՐ, ՍՆԱՄԵՋ ԳԼԱՆԻ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում տրվում է վերջավոր երկարության կլոր սնամեջ գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի ճըշգրիտ լուծումը, երբ կողմնային մակերևույթի վրա հայտնի են տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները, իսկ հիմքերի վրա՝ լարման բաղադրիչները։ Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով։ Լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինի շարքերի գումարի տեսքով։ Ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերվել է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Ապացուցված է, որ այդ սիստեմը լիովին ռեգուլյար է և ունի սահմանափակ ազատ անդամներ։

## ON A PROBLEM OF A FINITE HOLLOW CYLINDER

A. H. BABLOYAN, V. S. TONOYAN

Summary

In the present paper an axisymmetric problem for a finite length circular hollow cylinder is considered where the vector components of displacement on the lateral surface and the stress components on the butts are prescribed. The solution is represented as a sum of the Fourier and Fourier-Diny series. The determination of the integration coefficients is reduced to the solving of an infinite system of algebraic equations. This system is proved to be quasi-quite regular.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. А., Баблоян А. А.* Об одной задаче осесимметричной деформации полого цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XV, № 2, 1962.
3. *Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Изгиб двухслойной плиты осесимметричной нагрузкой. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XVI, № 1, 1963.
3 *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ, ч. 1, М., 1949.
5. *Грей Э., Метьюз Г.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.