ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Е. Н. БРЮХАНОВА

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУХСВЯЗНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ

В работе исследуется напряженное состояние двухсвязной изотропной пластинки, возникающее под влиянием температурного поля. С помощью метода малого параметра устанавливаются законы распределения температур и напряжений.

§1. Рассмотрим изотропную пластинку, имеющую в плане вид двухсвязной области. Параметрическое уравнение L_i контура таково [1]:

$$x = R_i(\cos\Theta + \delta_i\varepsilon\cos m\Theta), \quad y = R_i(\sin\Theta - \delta_i\varepsilon\sin m\Theta) \quad (i = 1, 2)$$

$$R_1 < R_2(1 - \varepsilon)$$

Здесь $i = 1$ соответствует внутреннему контуру, $i = 2$ — внешнему; $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$.

Напряженное состояние в пластинке возникает под воздействием температуры, меняющейся вдоль внешнего контура по заданному закону. На внутренней боковой поверхности поддерживается нулевая температура. Основания пластинки теплоизолированы. Объемные и поверхностные силы не действуют. Полагаем, что пластинка испытывает малые деформации, а упругие и тепловые характеристики материала от температуры не зависят.

Задача термоупругости сводится к решению уравнений [2]

$$\nabla^2 T = 0, \quad \nabla^2\nabla^2 F = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия на L_i-контуре имеют вид

$$T(x_i + \delta_i\varepsilon h,\ y_i + \delta_i\varepsilon s) = (Ax_i + A\varepsilon h + B)\,\delta_i$$

$$\sigma_x(x_i + \delta_i\varepsilon h,\ y_i + \delta_i\varepsilon s)\cos(n, x) + \tau_{xy}(x_i + \delta_i\varepsilon h,\ y_i + \delta_i\varepsilon s)\cos(n, y) = 0$$

$$\tau_{xy}(x_i + \delta_i\varepsilon h,\ y_i + \delta_i\varepsilon s)\cos(n, x) + \sigma_y(x_i + \delta_i\varepsilon h,\ y_i + \delta_i\varepsilon s)\cos(n, y) = 0 \tag{1.2}$$

В формулах (1.2) принято: $x_i = R_i\cos\Theta$, $y_i = R_i\sin\Theta$, $h = R_2\cos m\Theta$, $s = -R_2\sin m\Theta$, $A = M/R_2$, $B = M(1 + \varepsilon)$; M — заданная постоянная величина.

Заметим, что x_2 и y_2 являются координатами точки, расположенной на окружности радиуса R_2; εh и εs — величинами приращений координат x_2 и y_2, устанавливающими соответствие между точками окружности радиуса R_2 и точками внешнего контура области.

§2. Решение задачи ищем методом малого параметра. За параметр принимается величина ε. Представим искомые функции T и F в виде рядов по степеням ε

$$T=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k T_k,\quad F=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k F_k \tag{2.1}$$

Функции T_k и $F_k\,(k=0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют уравнениям вида (1.1). Разложим функцию температур и компоненты напряжений в точках внешнего контура в ряды Тейлора по степеням приращений εh и εs. Представление в виде ряда Тейлора дает возможность выразить функцию, заданную на сложном криволинейном контуре, через значения функции и ее частных производных на круговом контуре радиуса R_2.

Условие на границе (1.2) для функции T принимает вид

$$T(x_2, y_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\varepsilon^n\Delta_n T(x_2, y_2)=Ax_2+A\varepsilon h+B$$

где

$$\Delta_n T=\left(h\frac{\partial T}{\partial x}+s\frac{\partial T}{\partial y}\right)^n$$

Здесь использована символическая форма записи ряда Тейлора [3]. Два других условия (1.2) видоизменяются подобным образом. Подставив в преобразованные условия (1.2) формулы вида (2.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях, получим рекуррентные соотношения для точек окружности радиуса R_2:

$$T_0=M(1+\cos\Theta),\quad \sigma_x^{(0)}\cos\Theta+\tau_{xy}^{(0)}\sin\Theta=0,\quad \tau_{xy}^{(0)}\cos\Theta+\sigma_y^{(0)}\sin\Theta=0$$

$$T_k=g_k M(1+\cos m\Theta)-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}\Delta_n T_{k-n}\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

$$\sigma_x^{(k)}\cos\Theta+\tau_{xy}^{(k)}\sin\Theta=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\sigma_x^{(k-n)})\cos\Theta+(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n)})\sin\Theta\right]+$$

$$+m\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\sigma_x^{(k-n-1)})\cos m\Theta-(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n-1)})\sin m\Theta\right]\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

$$\tau_{xy}^{(k)}\cos\Theta+\sigma_y^{(k)}\sin\Theta=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n)})\cos\Theta+(\Delta_n\sigma_y^{(k-n)})\sin\Theta\right]+$$

$$+m\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n-1)})\cos m\Theta-(\Delta_n\sigma_y^{(k-n-1)})\sin m\Theta\right] \tag{2.2}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots)$$

$$g_1=1,\quad g_k=0\ \text{ при }\ k\geqslant 2$$

В точках окружности параметр θ является полярным углом. Следовательно, условия (2.2) на окружности целесообразно привести к полярной системе координат. Используя формулы перехода компонентов напряжений от декартовых к полярным координатам, а также преобразуя оператор Δ_n к полярной системе, представим условия (2.2) на внешнем контуре в новой системе координат. В силу громоздкости преобразованные условия здесь не выписаны.

Условия на внутреннем контуре имеют вид

$$T_k = 0, \quad \sigma_r^{(k)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \text{ при } r = R_1 \tag{2.3}$$

Задача сведена к последовательному интегрированию уравнений вида (1.1) для функций T_k и F_k, заданных на круговых контурах радиусов $r = R_1$ и $r = R_2$.

§ 3. Приведем решение задачи в третьем приближении. Распределение температур в пластинке представляется так:

$$(M)^{-1} T = \omega_0(\rho) + f_0(\rho)\cos\theta + \varepsilon\left[\omega_1(\rho) + \sum_{\varkappa=0}^{2} f_{1+\varkappa}^{(1)}(\rho^{m+\varkappa})\cos(m+\varkappa)\theta\right] +$$

$$+ \varepsilon^2\left\{\omega_2(\rho) + f_2(\rho)\cos\theta + \sum_{\varkappa=0}^{1}\left[f_{1+2\varkappa}^{(2)}(\rho^{(\varkappa+1)(m+1)})\cos(\varkappa+1)(m+1)\theta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f_{2(\varkappa+1)}^{(2)}(\rho^{2(m+\varkappa)+1})\cos(2m+1+2\varkappa)\theta\right]\right\} + \varepsilon^3\left\{\omega_3(\rho) + \right.$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{1}\left[f_{1+2\varkappa}^{(3)}(\rho^{m+2\varkappa})\cos(m+2\varkappa)\theta + f_{5+2\varkappa}^{(3)}(\rho^{3m+2(\varkappa+1)})\cos(3m+2\varkappa+2)\theta\right] +$$

$$\left. + \sum_{\varkappa=1}^{3} f_{2\varkappa}^{(3)}(\rho^{\varkappa(m+1)})\cos\varkappa(m+1)\theta\right\} \tag{3.1}$$

где

$$\omega_k(\rho) = a_k\ln\rho + b_k \quad (k=0, 1, 2, 3), \quad f_k(\rho) = e_k\rho + d_k\rho^{-1} \quad (k=0, 2)$$

$$f_k^{(i)}(\rho^\lambda) = e_k^{(i)}\rho^\lambda + d_k^{(i)}\rho^{-\lambda} \quad (i=1, 2, 3; \ k=1, 2, \cdots, 7), \ \rho = r/R_2 \tag{3.2}$$

Напряженное состояние находится по формулам

$$(R_2)^2\sigma^{(j)} = \Phi_0^{(j)}(\rho) + \varphi_0^{(j)}(\rho)\cos\theta + \varepsilon\left[\Phi_1^{(j)}(\rho) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\varkappa=0}^{2}\varphi_{1+\varkappa}^{(1,j)}(\rho, m+\varkappa)\cos(m+\varkappa)\theta\right] + \varepsilon^2\left\{\Phi_2^{(j)}(\rho) + \varphi_2^{(j)}(\rho)\cos\theta + \right.$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{1}\left[\varphi_{1+2\varkappa}^{(2,j)}(\rho, (\varkappa+1)(m+1))\cos(\varkappa+1)(m+1)\theta + \right.$$

$$+ \varphi^{(2,\,j)}_{2(\varkappa+1)}(\rho,\ 2(m+\varkappa)+1)\cos(2m+1+2\varkappa)\Theta\Big]\Big\} + \varepsilon^3\Big\{\Phi^{(j)}_3(\rho) +$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[\varphi^{(3,\,j)}_{1+2\varkappa}(\rho,\ m+2\varkappa)\cos(m+2\varkappa)\Theta +$$

$$+ \varphi^{(3,\,j)}_{5+2\varkappa}(\rho,\ 3m+2(\varkappa+1))\cos(3m+2(\varkappa+1))\Theta\Big] +$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{3}\varphi^{(3,\,j)}_{2\varkappa}(\rho,\ \varkappa(m+1))\cos\varkappa(m+1)\Theta\Big\} \qquad (j=1,\ 2)$$

$$(R_2)^2\tau_{\rho\Theta} = \psi^{(1)}_0(\rho)\sin\Theta + \varepsilon\sum_{\varkappa=0}^{2}\psi^{(1)}_{1+\varkappa}(\rho,\ m+\varkappa)\sin(m+\varkappa)\Theta +$$

$$+\varepsilon^2\Big\{\psi^{(1)}_2(\rho)\sin\Theta + \sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[\psi^{(2)}_{1+2\varkappa}(\rho,\ (\varkappa+1)(m+1))\sin(\varkappa+1)(m+1)\Theta +$$

$$+ \psi^{(2)}_{2(\varkappa+1)}(\rho,\ 2(m+\varkappa)+1)\sin(2m+1+2\varkappa)\Theta\Big]\Big\} +$$

$$+\varepsilon^3\Big\{\sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[\psi^{(3)}_{1+2\varkappa}(\rho,\ m+2\varkappa)\sin(m+2\varkappa)\Theta +$$

$$+ \psi^{(3)}_{5+2\varkappa}(\rho,\ 3m+2(\varkappa+1))\sin(3m+2(\varkappa+1))\Theta\Big] +$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{3}\psi^{(3)}_{2\varkappa}(\rho,\ \varkappa(m+1))\sin\varkappa(m+1)\Theta\Big\} \qquad (3.3)$$

Здесь

$$\sigma^{(1)} = \sigma_\rho, \quad \sigma^{(2)} = \sigma_\theta$$

$$\Phi^{(j)}_k(\rho) = A_k(2\ln\rho + 1 + 2\delta_j) + 2B_k + \mu_j C_k\rho^{-2} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$\varphi^{(j)}_k(\rho) = 2(1+2\delta_j)E_k\rho + K_k\rho^{-1} - 2\mu_j N_k\rho^{-3} \quad (k=0,\ 2)$$

$$\varphi^{(i,\,j)}_k(\rho,\lambda) = -\mu_j\{(\lambda-1)[\lambda E^{(i)}_k\rho^{\lambda-2} + (\lambda+2\mu_j)N^{(i)}_k\rho^{-\lambda}] +$$

$$+(\lambda+1)[\lambda K^{(i)}_k\rho^{-(\lambda+2)} + (\lambda-2\mu_j)M^{(i)}_k\rho^{\lambda}]\}$$

$$\psi^{(i)}_k(\rho,\lambda) = \lambda\{(\lambda-1)[E^{(i)}_k\rho^{\lambda-2} - N^{(i)}_k\rho^{-\lambda}] +$$

$$+(\lambda+1)[M^{(i)}_k\rho^{\lambda} - K^{(i)}_k\rho^{-(\lambda+2)}]\} \qquad (3.4)$$

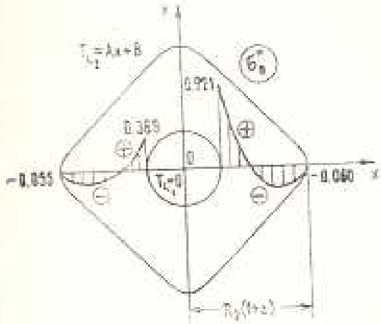
$$(i=1,\ 2,\ 3;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 7)$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1$$

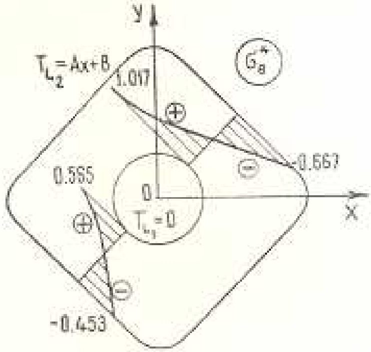
Неизвестные коэффициенты, содержащиеся в формулах (3.2), (3.4), определяются из граничных условий (2.2), (2.3) и требования однозначности перемещений.

В качестве примера приведем результаты расчета пластинки с параметрами $m = 3$, $\varepsilon = 1/9$, $R_1/R_2 = 1/3$.

Распределение тангенциальных напряжений вдоль указанных на фиг. 1 и 2 направлениях представлено графически. Числовые значения даны для безразмерной величины $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta/H$, где $H = M\alpha E$; α — коэффициент линейного расширения материала, E — модуль Юнга. Исследования показали, что максимальное напряжение достигается в точке внутреннего контура при $\Theta = 45°$ и равно $\sigma_\theta = 1.017H$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Для оценки погрешности решения было вычислено нормальное напряжение в ряде точек внешнего контура. Так $\sigma_n\big|_{\Theta=0°} = 0.007\,H$, $\sigma_n\big|_{\Theta=45°} = 0.004\,H$. Отсюда видно, что ошибка при удовлетворении граничных условий меньше одного процента. За сто процентов принято наибольшее напряжение в пластинке.

Если на внешнем контуре поддерживается постоянная температура, то решение следует из полученного как частный случай.

Саратовский политехнический институт

Поступила 11 II 1970

Ն. Ն. ԲՐՅՈՒԽԱՆՈՎԱ

ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿԿԱՊ ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկված է ջերմաառաձգականության խնդիրը երկկապ իզոտրոպ սալի համար։

Ջերմաստիճանի և լարումների բաշխումը սալում գտնված է փոքր պարամետրի մեթոդի օգնությամբ։

THERMOELASTIC STRESSES IN A TWO-CONNECTED ISOTROPIC PLATE

E. N. BRUCHANOVA

Summary

The problem of thermoelasticity for a two-connected isotropic plate is considered. By means of the small parameter method the distribution of temperature and stresses is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Изд. АН УССР, К., 1968.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 1, Физматгиз, М., 1961.