

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, Н. М. НЕСКОРОДЕВ

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В работе [1] предложен приближенный метод для решения задач о напряженном состоянии анизотропных сред, ослабленных рядом криволинейных отверстий, мало отличающихся от эллиптических (круговых). Метод основан на введении малого параметра, который характеризует отличие криволинейных отверстий от эллиптических.

Здесь вводятся другие малые параметры, характеризующие отклонения заданных контуров криволинейных отверстий от тех контуров, которые расположены ближе, чем указанные выше эллиптические контуры. Эффективность этого приема продемонстрирована на примере растяжения анизотропной пластинки с двумя одинаковыми квадратными отверстиями. При этом отверстия были либо свободными от внешних усилий, либо подкреплены жесткими кольцами.

Рассмотрим анизотропную пластинку, ослабленную двумя одинаковыми криволинейными отверстиями, контуры которых  $L_1$  и  $L_2$  заданы уравнениями

$$x \pm l = c \cos \theta + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\theta \quad (i)$$

$$y = c \sin \theta - \sum_{n=1}^N a_n \sin n\theta$$

Здесь  $\theta$  — полярный угол,  $c$ ,  $a_n$  — постоянные коэффициенты,  $2l$  — расстояние между центрами отверстий.

Пусть на контурах отверстий заданы либо перемещения, либо внешние усилия, главный вектор которых на каждом из контуров равен нулю. Кроме того, внешние усилия могут быть заданы вдали от отверстий.

Будем считать комплексные параметры  $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ), характеризующие анизотропию пластинки, чисто мнимыми, т. е.  $\mu_j = i\beta_j$ . Тогда в областях  $S_j$ , получаемых из заданной путем известных аффинных преобразований, уравнения контуров будут такими:

$$x_j = x, \quad y_j = \beta_j y \quad (2)$$

Аффиксы точек контуров  $L_{ij}$  отверстий в областях  $S_j$ , соответствующих контурам  $L_i$ , будут иметь следующий вид:

$$t_j \pm l = R_j \left[ z + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_{nj}}{z^n} + \sum_{n=2}^N i_j^{n-1} \beta_{nj} z^n \right] \quad (3)$$

Здесь  $R_j$ ,  $\alpha_{nj}$  и  $\beta_{nj}$  — постоянные коэффициенты, зависящие от  $a_n$  и  $\beta_n$ ;  $i_j$  — малые параметры;  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ .

Преобразуем выражение (3) к виду

$$t_j \pm l = R_j \left[ z_j + \sum_{n=1}^N \frac{x_{nj}}{z_j^n} + i_j \left( m_{0j}^1 z_j + \sum_{n=1}^N \frac{m_{nj}^1}{z_j^n} \right) \right] \quad (4)$$

где  $z_j = \cos \psi_j + i \sin \psi_j$ , а коэффициенты  $m_{nj}^1$  зависят от малого параметра  $i_j$  и вычисляются, как это показано ниже, путем использования метода Л. В. Канторовича [2]. Из выражений (3) и (4) следует, что при  $i_j = 0$  угол  $\theta = \psi_j$ , а при малых значениях  $i_j$  можно провести следующие разложения:

$$\theta = \psi_j + \sum_{n=1}^{\infty} i_j^n \varphi_{nj}(\psi_j), \quad \psi_j = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} i_j^n f_{nj}(\theta) \quad (5)$$

где  $\varphi_{nj}$  и  $f_{nj}$  — некоторые вещественные функции, подлежащие определению. Легко видеть, что

$$z^n = e^{in(\psi_j + i_j \varphi_{1j} + i_j^2 \varphi_{2j} + \dots)} \quad (6)$$

$$z_j^n = e^{in(\theta + i_j f_{1j} + i_j^2 f_{2j} + \dots)}$$

Разложим выражения (6) в ряды по малым параметрам  $i_j$ . Ограничиваясь членами, содержащими  $i_j$  в степенях не выше третьей, получим

$$z^n = z_j^n \left[ 1 + i_j in \varphi_{1j} + i_j^2 \left( in \varphi_{2j} - \frac{n^2}{2} \varphi_{1j}^2 \right) + i_j^3 \left( in \varphi_{3j} - n^2 \varphi_{1j} \varphi_{2j} - \frac{in^3}{6} \varphi_{1j}^3 \right) \right] \quad (7)$$

$$z_j^n = z^n \left[ 1 + i_j in f_{1j} + i_j^2 \left( in f_{2j} - \frac{n^2}{2} f_{1j}^2 \right) + i_j^3 \left( in f_{3j} - n^2 f_{1j} f_{2j} - \frac{in^3}{6} f_{1j}^3 \right) \right]$$

Функции  $\varphi_{nj}(\psi_j)$  и  $f_{nj}(\theta)$  выберем в виде

$$\varphi_{nj}(\psi_j) = -i \sum_{k=1}^{2p} A_{knj} (z_j^k - z_j^{-k}) \quad (8)$$

$$f_{nj}(\theta) = -i \sum_{k=1}^{2p} B_{knj} (z^k - z^{-k})$$

Подставим выражения (8) в (7). Будем иметь

$$z^n = \sum_{p=0}^{n-1} C'_{n, n-p+1} z_j^p + \sum_{p=1}^{(n)} C''_{n, n-p+1} z_j^{-p} \quad (9)$$

$$\sigma_j^n = \sum_{p=q(n)}^{n+6} d_{n, n-p+6}^j \sigma^p + \sum_{p=1}^{v(n)} d_{n, n-p+6}^j \sigma^{-p} \quad (9)$$

здесь

$$q(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n < 6; \\ n-6, & \text{если } n \geq 6; \end{cases} \quad v(n) = \begin{cases} 6-n, & \text{если } n < 6 \\ 0, & \text{если } n \geq 6 \end{cases}$$

В случае, когда отверстия являются прямоугольными (квадратными), коэффициенты  $C_{nk}^j$  имеют вид

$$C_{n0}^j = \lambda_j^3 \left( nA_{03j} + n^2 A_{21j} A_{42j} + \frac{n^3}{6} A_{21j} \right)$$

$$C_{n2}^j = \lambda_j^3 \left( nA_{42j} + \frac{n^2}{2} A_{21j}^2 \right) + \lambda_j^3 (nA_{43j} + n^2 A_{21j} A_{22j})$$

$$C_{n4}^j = \lambda_j nA_{21j} + \lambda_j^3 nA_{22j} + \lambda_j^3 \left( nA_{23j} - n^2 A_{21j} A_{42j} - \frac{n^3}{2} A_{21j}^3 \right)$$

$$C_{n6}^j = 1 - \lambda_j^3 n^2 A_{21j} - \lambda_j^3 2n^2 A_{21j} A_{22j} \quad (10)$$

$$C_{n8}^j = -\lambda_j nA_{21j} - \lambda_j^3 nA_{22j} - \lambda_j^3 \left( nA_{23j} + n^2 A_{21j} A_{42j} - \frac{n^3}{2} A_{21j}^3 \right)$$

$$C_{n10}^j = \lambda_j^3 \left( -nA_{42j} + \frac{n^2}{2} A_{21j}^2 \right) + \lambda_j^3 (-nA_{43j} + n^2 A_{21j} A_{22j})$$

$$C_{n12}^j = \lambda_j^3 \left( -nA_{63j} + n^2 A_{21j} A_{42j} - \frac{n^3}{6} A_{21j}^3 \right)$$

Выражения для  $d_{nk}^j$  получаются из соотношений (10), если в них заменить  $A_{kpj}$  на  $B_{kpj}$ .

Подставляя соответствующие значения (9) в (3) и приравнявая коэффициенты при положительных степенях  $\sigma_j$  нулю, найдем постоянные  $A_{kpj}$ .

$$A_{21j} = -\beta_{3j}; \quad A_{22j} = -\alpha_{1j} (\beta_{5j} - 2\beta_{3j}^2)$$

$$A_{42j} = -\beta_{5j} + \frac{5}{2} \beta_{3j}^2; \quad A_{43j} = \alpha_{1j}^2 (-\beta_{7j} + 9\beta_{3j} \beta_{5j} - 13\beta_{3j}^3) + \\ + 3d_{3j} \left( -\beta_{7j} + 4\beta_{3j} \beta_{5j} - \frac{17}{6} \beta_{3j}^3 \right) \quad (11)$$

$$A_{43j} = \alpha_{1j} (-\beta_{7j} + 8\beta_{3j} \beta_{5j} - 11\beta_{3j}^3)$$

$$A_{63j} = -\beta_{7j} + 7\beta_{3j} \beta_{5j} - \frac{28}{3} \beta_{3j}^3$$

Теперь для определения постоянных  $m_{nj}^1$ , входящих в выражения (4), будем иметь следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 m_{0j}^1 &= \sum_{i=0}^3 C_{2i-1, 6+2i}^j \alpha_{2i-1} + 3A_{21j} (A_{21j} + A_{22j}) \\
 m_{1j}^1 &= \sum_{i=0}^3 C_{2i-1, 4+2i}^j \alpha_{2i-1} + 3A_{21j} \left( A_{22j} - \frac{3}{2} A_{21j}^2 \right) \\
 m_{2n-1, j}^1 &= \sum_{i=0}^3 C_{2i-1, 6+2(i-n)}^j \alpha_{2i-1} \quad (n \geq 2)
 \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\alpha_{-1, j} = 1$ .

Аналогичным образом найдем

$$\begin{aligned}
 B_{21j} &= -A_{21j}, & B_{22j} &= -A_{22j}, & B_{23j} &= -A_{23j} + 2A_{21j}^2 \\
 B_{23j} &= -A_{23j} - 2A_{21j} A_{22j} + 2A_{21j}^3, & B_{43j} &= -A_{43j} + 4A_{21j} A_{22j} \\
 B_{63j} &= -A_{63j} + 6A_{21j} A_{42j}
 \end{aligned} \quad (13)$$

Остановимся на случае, когда отверстия свободны от внешних усилий или подкреплены жесткими кольцами, а усилия, деформирующие пластинку, действуют вдали от отверстий. Для решения задачи о напряженном состоянии такой пластинки необходимо определить функции комплексных переменных  $\Phi_s(z_s)$ , голоморфные в областях  $S_s$ , из граничных условий вида [3].

$$2\operatorname{Re} \sum_{s=1}^2 p_s \Phi_s(z_s) = f_1, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{s=1}^2 q_s \Phi_s(z_s) = f_2 \quad (14)$$

Здесь  $p_s = 1$ ,  $q_s = \mu_s$  — в случае свободных отверстий и  $p_s = a_{11} \mu_s^2 + a_{12} - a_{16} \mu_s$ ,  $q_s = a_{22} \mu_s + a_{22} \mu_s^{-1} - a_{26}$ , где  $a_{ik}$  — коэффициенты деформации, — в случае, когда отверстия жестко подкреплены;  $f_1$  и  $f_2$  — функции, вид которых зависит от загрузки пластинки.

Функции  $\Phi_s(z_s)$  выберем в виде [1]

$$\Phi_s(z_s) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^* \{ [\zeta_s^*(z_s - l)]^{-k} + (-1)^{k+1} [\zeta_s^*(z_s + l)]^{-k} \} \quad (15)$$

При этом переменные  $\zeta_s$  связаны с  $z_s$  следующими неявными зависимостями:

$$z_s \pm l = m_{0s} \zeta_s + m_{1s} \zeta_s^{-1} + m_s \sum_{n=2}^{\infty} m_{2n-1, s} \zeta_s^{1-2n} \quad (16)$$

где

$$m_s = R_s (1 + i_s m_{1s}^1), \quad m_{1s} = R_s (z_{1s} + i_s m_{1s}^1), \quad m_{3s} = R_s (\alpha_{3s} + i_s m_{3s}^1)$$

$$m_{2n-1, s} = R_s (z_{2n-1, s} + i_s m_{2n-1, s}^1) / m_{3s} \quad (n \geq 2), \quad m_s = m_{3s}$$

приняты в качестве малого параметра.

В областях  $S_s$  функции  $[\zeta_s^*(z_s + l)]^{-k}$  являются голоморфными вне левого отверстия. Их можно разложить в ряды по полиномам Фабера внутри эллипсов, охватывающих контуры  $L_{1s}$ . Это разложение проведем следующим образом. Из выражения (16) имеем

$$z_s + l = m_{0s} \zeta_s^{*-1} + m_{1s} \zeta_s^* + m_s \sum_{n=2}^{\infty} m_{2n-1, s} \zeta_s^{*2n-1} \quad (17)$$

где  $\zeta_s^* = \zeta_s^{-1}$ .

Функцию  $\zeta_s^*$  разложим в ряд по степеням малого параметра  $m_s$ , как это сделано в работе [1].

$$\zeta_s^* = \zeta_{0s}^* + m_s \sum_{k=2}^{\infty} a_k^s \zeta_{0s}^{*2k+1} + m_s^2 \sum_{k=4}^{\infty} b_k^s \zeta_{0s}^{*2k+1} + \dots \quad (18)$$

Здесь

$$a_k^s = \sum_{n=0}^{k-2} m_{2k-2n-1, s} m_{1s}^n m_{0s}^{-(n+1)} \quad (19)$$

$$b_k^s = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{k-2} \sum_{i=1}^{n-1} m_{1s}^{k-n-2} m_{0s}^{n-k} m_{2k-2i-1, s} m_{2i+1, s} (k-n-1)(3n-4i+k+2)$$

а функция  $\zeta_{0s}^*$  определяется из уравнения

$$z_s + l = m_{0s} \zeta_{0s}^{*-1} + m_{1s} \zeta_{0s}^* \quad (20)$$

Представим  $\zeta_{0s}^*$  в виде [4]

$$\zeta_{0s}^* = \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}^s P_k(z_s - l) \quad (21)$$

где  $P_k(z_s - l)$  — полиномы Фабера.

Используя разложения (21), из (18) получим

$$\zeta_s^{*k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kn}^s P_n(z_s - l) \quad (22)$$

Коэффициенты  $\alpha_{kn}^s$  зависят от постоянных, входящих в выражения (18) и от коэффициентов разложения  $A_{nk}^s$ .

Теперь, удовлетворяя граничным условиям (14) на контуре правого отверстия, где  $\zeta_s(z_s - l) = \sigma_s$ , для определения коэффициентов  $\alpha_k^s$  получим следующую бесконечную систему:

$$\sum_{s=1}^2 P_s \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^s \left( \sum_{p=q(n)}^{n+6} d_{p, p-n+6}^s + \sum_{p=1}^{(n)} d_{p, p+n+6}^s \right) \times \right. \\ \left. \times (\delta_{mp} + (-1)^{m+1} a_{mp}^s (k_s^p + 1)) \right\} = f_{1n}^s \quad (23)$$

$$\sum_{s=1}^2 q_s \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} z_m^s \left( \sum_{p=q(n)}^{n+\delta} d_{p, p-n+\delta}^s - \sum_{p=1}^{v(n)} d_{p, p+n+\delta}^s \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \delta_{mp} + (-1)^{m+1} \alpha_{mp}^s (k_s^p - 1) \right) \right\} = f_{2n}^s \quad (23)$$

Здесь  $f_{1n}^s$  и  $f_{2n}^s$  — коэффициенты, зависящие от нагружения пластинки;

$$k_s = \frac{m_{1s}}{m_{0s}}; \quad \delta_{mp} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = p \\ 0, & \text{если } m \neq p \end{cases}$$

После определения коэффициентов  $\alpha_m^s$  функции  $\Phi_s(z_s)$  становятся известными.

Напряжения, возникающие в пластинке, выражаются через эти функции по формулам [3]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 - 2\operatorname{Re} \sum_{s=1}^2 \beta_s^2 \Phi_s'(z_s) \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + 2\operatorname{Re} \sum_{s=1}^2 \Phi_s'(z_s) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 - 2\operatorname{Re} \sum_{s=1}^2 i\beta_s^2 \Phi_s'(z_s) \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  — напряжения, возникающие в сплошной пластинке.

Пусть пластинка растягивается на бесконечности усилиями  $p$  вдоль линии центров отверстий и усилиями  $q$  поперек этой линии. Тогда правые части системы (23) примут вид:

$$\begin{aligned} f_{11}^s &= -(1 + \alpha_1)(A_0 p_1 + B_0 p_2) \\ f_{21}^s &= -(1 - \alpha_1)(A_0 \beta_1 q_1 + B_0 \beta_2 q_2) \\ f_{1, 2n-1}^s &= -\alpha_{2n-1}(A_0 p_1 + B_0 p_2) \quad (n \geq 2) \\ f_{2, 2n-1}^s &= -\alpha_{2n-1}(A_0 \beta_1 q_1 + B_0 \beta_2 q_2) \quad (n \geq 2) \\ A_0 &= \frac{p + \beta_2^2 q}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)}, \quad B_0 = -\frac{p + \beta_1^2 q}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (25)$$

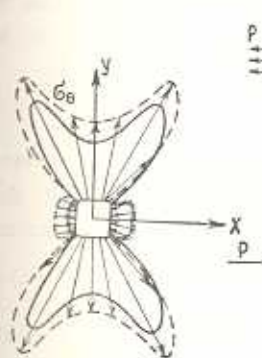
Нами были проведены многочисленные расчеты по определению напряженного состояния пластинки, ослабленной двумя квадратными отверстиями. В таблице в виде примера приведены значения для нормальных напряжений, действующих на площадках, нормальных или касательных к контуру правого отверстия. При этом напряжения  $\sigma_0$  относятся к случаю, когда отверстия свободны от внешних усилий, а  $\tau_0$  — к случаю жестко подкрепленных отверстий. Считалось, что пластинка изготовлена из аниационной фанеры, для которой  $\beta_1 = 4.11$ ,

$\beta_2 = 0.343$ . Расстояние между отверстиями было равно половине длины стороны одного из отверстий. Приведенные кривизны в угловых точках отверстий равны 15, что имеет место, когда в выражениях (1)  $c = 1$ ,  $a_3 = -1/6$ ,  $a_7 = 0.00846$ ,  $a_n = 0$  ( $n \neq 3, n \neq 7$ ).

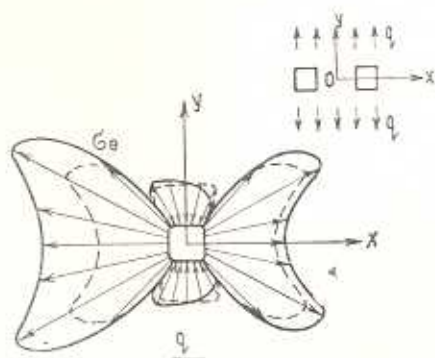
Таблица 1

$\theta^\circ$	$\frac{\sigma_0^*}{p}$	$\frac{\sigma_0}{p}$	$\frac{\sigma_0^*}{q}$	$\frac{\sigma_0}{q}$	$\frac{\sigma_r^*}{p}$	$\frac{\sigma_r}{p}$	$\frac{\sigma_r^*}{q}$	$\frac{\sigma_r}{q}$
0	-0.579	-0.532	1.810	2.097	1.111	1.257	0.092	0.073
15	-0.547	-0.550	1.984	2.268	1.147	1.246	0.080	0.072
30	-0.497	-0.431	3.056	3.457	1.285	1.371	0.059	0.057
45	1.387	1.426	2.173	2.517	1.031	1.140	1.241	1.186
60	3.561	2.820	-1.171	-0.765	0.030	0.021	1.388	1.348
75	2.186	1.771	-1.039	-0.956	0.037	0.021	1.185	1.147
90	1.999	1.504	-1.064	-1.067	0.043	0.042	1.158	1.101
105	2.186	1.650	-1.039	-1.068	0.037	0.060	1.185	1.081
120	3.561	2.881	-1.171	-1.218	0.030	0.040	1.388	1.198
135	1.378	0.141	2.173	2.464	1.031	0.891	1.241	1.025
150	-0.497	-0.187	3.056	4.619	1.285	1.640	0.059	0.056
165	-0.547	-0.109	1.984	3.464	1.147	1.793	0.080	0.009
180	-0.579	-0.218	1.810	3.375	1.111	1.312	0.092	0.064

В этой же таблице приведены значения для напряжений, обозначенных звездочками. Они относятся к аналогичной пластинке с одним отверстием.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 1, 2 приведены графики, характеризующие распределение напряжений в пластинке с неподкрепленными отверстиями вблизи правого контура. Сплошные линии графиков относятся к пластинке с двумя отверстиями, а пунктирные — с одним отверстием.

Расчеты показали, что при сближении отверстий концентрация напряжений возрастает, если пластинка растягивается поперек линии

центров отверстий и медленно уменьшается при растяжении пластинки вдоль линии центров. Указанное увеличение концентрации напряжений происходит более быстро для отверстий, кривизны в угловых точках которых имеют большие значения.

При подкреплении отверстий жесткими кольцами концентрация напряжений в пластинке существенно уменьшается, что непосредственно видно из приведенной таблицы. При сближении подкрепленных отверстий концентрация напряжений возрастает при растяжении пластинки вдоль линии центров и уменьшается при ее растяжении поперек линии центров.

Донецкий вычислительный центр  
АН УССР

Поступила 1 XII 1969

Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄԻԱՆՍԿԻ, Ն. Մ. ՆԵՍԿՈՐՈԴԵՎ

ԵՐԿՈՒ ԿՈՐԱԳԻՆՑ ԱՆՅՔՔՈՎ ԹՈՒԼԱՅՎԱՄ ԱՆԵԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ  
ԼԱՐՎԱՄԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հուծված է երկու ոչ էլիպտիկ, կորագիծ անցքով թուլացված անիզոտրոպ սալի լարվածային վիճակի խնդիրը: Ուսումնասիրված է անցքերի եզրագծերի միմյանց մոտիկություն, ինչպես նաև նրանց կորությունների ազդեցությունը լարումների կոնցենտրացիայի վրա:

## THE STRESSED STATE OF AN ANISOTROPIC PLATE WEAKENED BY TWO CURVILINEAR HOLES

A. S. KOSMODAMIANSKY, N. M. NESKORODEV

### S u m m a r y

A solution is given of the stressed state problem for an anisotropic plate weakened by two curvilinear non-elliptical holes. The effect of nearness of the holes' contours and curvature on stress concentration around holes is considered.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Космодамианский А. С. Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропной пластинки с двумя одинаковыми криволинейными отверстиями. В сб.: „Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел“, вып. 3, изд. - во Саратовского ун-та, 1967.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1952.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
4. Гурьянов В. М., Космодамианский А. С. Растяжение изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями. В сб.: „Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел“, вып. 2, изд. - во Саратовского ун-та, 1965.