ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВЫНУЖДАЮЩИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РАДИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Рассматриваются следующие две задачи устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки:

1) оболочка шарнирно оперта на обоих торцах и одному ее торцу сообщается осесимметричное радиальное перемещение $W_0 = C$;

2) оболочка шарнирно оперта на обоих торцах и на расстоянии $x = a$ от левого торца сообщается осесимметричное радиальное перемещение $W_0 = C$.

В обоих случаях ставится задача определения критического значения вынуждающих перемещений $W_0^{\text{кр.}} = C_{\text{кр.}}$, при которых оболочка теряет статическую устойчивость.

I. Разрешающая система нелинейных уравнений оболочки имеет вид

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2}L(W;\ W) = 0 \tag{1.1}$$

$$D\nabla^4 W - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - L(W;\ \Phi) = q$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{1.2}$$

$$L(W;\ \Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

q — интенсивность внешней нагрузки, E — модуль Юнга, h — толщина стенки оболочки, μ — коэффициент Пуассона, R — радиус срединной плоскости цилиндрической оболочки, x и y — параметры, определяющие положение точки цилиндра, причем x — расстояние вдоль образующей, y — длина направляющей дуги цилиндра, $\Phi(x, y)$ — силовая функция, $W(x, y)$ — радиальное перемещение.

До потери статической устойчивости значения Φ и W обозначим Φ_0 и W_0. Последние удовлетворяют уравнениям (1.1), которые могут быть приведены к виду

$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} + 4\beta^4 W_0 = \frac{q}{D} \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2\Phi_0}{dx^2} = -\frac{Eh}{R} W_0, \quad \beta^4 = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2} \tag{1.4}$$

Общий интеграл уравнения (1.3) при $q = 0$ представляем в виде:

$$\text{I задача} \quad W_0 = A_1 Y_1(\beta x) + A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) \tag{1.5}$$

$$\text{II задача} \quad 0 \leqslant x \leqslant a \quad W_0 = A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) \tag{1.6}$$

$$a \leqslant x \leqslant l \quad W_0 = A_1' Y_1(\beta x) + A_2' Y_2(\beta x) + A_3' Y_3(\beta x) + A_4' Y_4(\beta x)$$

где $Y_1(\beta x)$, $Y_2(\beta x)$, $Y_3(\beta x)$, $Y_4(\beta x)$ — известные балочные функции А. Н. Крылова; $A_i A_i'$ — постоянные интегрирования, которые определяются по заданным краевым условиям и условиям сопряжения.

При достижении перемещением $W_0 = C$ критического значения $C_{\text{кр.}}$ деформации оболочки перестают быть осесимметричными и в уравнениях (1.1) должны быть приняты

$$\begin{gathered} W = W_0 + W_1 \\ \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $W_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ — возмущения, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 \Phi_1 + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 W_0}{dx^2}\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0 \tag{1.8}$$

$$D\nabla^4 W_1 - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{d^2 W_0}{dx^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \frac{d^2\Phi_0}{dx^2}\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0$$

Представим возмущения W_1 и Φ_1 в виде рядов

$$W_1 = \cos\mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \tag{1.9}$$

$$\Phi_1 = \cos\mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\lambda_m x, \quad \mu_n = \frac{n}{R}$$

а известное решение (1.5) и (1.6) W_0 в виде

$$W_0 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos\lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.10}$$

После подстановки (1.9) и (1.10) в (1.8) с учетом (1.4) приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$(V_p - 2S_0 + S_{2p})\, a_p - \sum_{m=1}^{p-1} (S_{p-m} - S_{p+m})\, a_m - \sum_{m=p+1}^{\infty} (S_{m-p} - S_{m+p})\, a_m = 0 \tag{1.11}$$

где

$$V_p = \frac{2}{R\mu_n^2}\left[\frac{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}{4\beta^4} + \frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]$$

$$S_i^{m,p} = \left\{1 + \left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2} + \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]\lambda_i^2\right\} f_i; \quad i = \begin{pmatrix} p-m \\ p+m \\ m-p \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Приравнивая нулю детерминант системы (1.11), получаем условия потери статической устойчивости в виде зависимости искомой величины вынуждающих перемещений $W_0 = C$ от числа полуволн n в окружном направлении.

$$\begin{vmatrix} V_1 - 2S_0 + S_2 & -\overset{p=2}{S_1^{m=1}} + \overset{p=2}{S_3^{m=1}} & -\overset{p=3}{S_2^{m=1}} + \overset{p=3}{S_4^{m=1}} & \cdots \\ -\overset{p=1}{S_1^{m=2}} + \overset{p=1}{S_3^{m=2}} & V_2 - 2S_0 + S_4 & -\overset{p=3}{S_1^{m=2}} + \overset{p=3}{S_5^{m=2}} & \cdots \\ -\overset{p=1}{S_2^{m=3}} + \overset{p=1}{S_4^{m=3}} & -\overset{p=2}{S_1^{m=3}} + \overset{p=2}{S_5^{m=3}} & V_3 - 2S_0 + S_6 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{1.13}$$

II. Ниже приведены результаты расчетов, причем в разложениях (1.9) и (1.10) учитываются несколько первых членов, соответствующих определителю четвертого порядка.

Для постоянных интегрирования уравнения (1.3) получаем следующие выражения:

$$\text{I. задача} \quad A_1 = C, \quad A_2 = -C\frac{\operatorname{sh}2\beta l + \sin 2\beta l}{\operatorname{ch}2\beta l - \cos 2\beta l}$$

$$A_4 = 2C\frac{\operatorname{sh}2\beta l - \sin 2\beta l}{\operatorname{ch}2\beta l - \cos 2\beta l} \tag{2.1}$$

а для задачи II значения постоянных, полученные из граничных условий, а также из условий сопряжений участков оболочки, приведены в табл. 1

Таблица 1

a \ A_i	A_3	A_4	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'
$l/2$	$0.05822C$	$-0.15473C$	$13.67268C$	$43.17338C$	$-113.69213C$	$141.0375C$
$l/4$	$0.45726C$	$0.52355C$	$-9.38863C$	$13.53523C$	$-8.29320C$	$-10.48406C$

Считая $\beta l \geqslant 6$, что имеет место даже для весьма коротких оболочек, для первой задачи имеем следующие коэффициенты разложения W_0 в ряд (1.10):

$$f_0 = \frac{C^*}{4\beta l}, \quad f_m = \frac{C^*}{2\beta l}(D_1 + D_2) \tag{2.2}$$

Для второй задачи

$$f_0 = \frac{C^*}{2\beta l}\left[\frac{A_2}{C} Y_3(\beta a) - \frac{A_4}{4C}(Y_1(\beta a) - 1) + \frac{\operatorname{ch}\beta a - \operatorname{sh}\beta a}{2C} \times \right.$$

$$\left. \times \left(A_2' \sin\beta a + \frac{A_4'}{2}\cos\beta a\right)\right] \tag{2.3}$$

$$f_m = \frac{C^*}{\beta l}\left\{\frac{(-1)^m Y_3(\beta a)}{C}\left(A_2 D_1 + \frac{A_4}{2} D_2\right) + \frac{1}{2C}\left((-1)^m Y_1(\beta a) - 1\right) \times \right.$$

$$\times \left(A_2 D_2 - \frac{A_4}{2} D_1\right) + \frac{\operatorname{ch}\beta a - \operatorname{sh}\beta a}{2C}\left[\cos\lambda_m a\left(\sin\beta a\left(A_2' D_1 + \frac{A_4'}{2} D_2\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \cos\beta a\left(A_2' D_2 - \frac{A_4'}{2} D_1\right)\right) + \sin\lambda_m a\left(\cos\beta a\left(A_2' D_3 - \frac{A_4'}{2} D_4\right) - \right.$$

$$\left.\left.\left. - \sin\beta a\left(A_2' D_4 + \frac{A_4'}{2} D_3\right)\right)\right]\right\}$$

где

$C^* = C/h$ — относительная величина нормального перемещения,
D_1, D_2, D_3, D_4 — постоянные

$$D_1 = \frac{2\beta - \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} + \frac{2\beta + \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]}$$

$$D_2 = \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} - \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]}$$

$$D_3 = \frac{2\beta + \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]} - \frac{2\beta - \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} \tag{2.4}$$

$$D_4 = \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]} + \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]}$$

Ниже приведена таблица значений $C^*_{\text{кр.}} = C_{\text{кр.}}/h$, соответствующих потере устойчивости оболочки, имеющей следующие характеристики

$$\frac{h}{R} = 0.331 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{l}{R} = 0.1\pi \tag{2.5}$$

В первой строке таблицы даны значения $C^*_{\text{кр.}} = C_{\text{кр.}}/h$ без учета начального докритического прогиба, т. е. без учета в системе (1.8) членов: $\dfrac{d^2 W_0}{dx^2}\dfrac{d^2 W_1}{\partial y^2}, \ \dfrac{d^2 W_0}{dx^2}\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}$.

Во второй строке даны значения $C^*_{\text{кр.}}$ с учетом этих членов.

В табл. 3 приведены значения $C^*_{\text{кр.}}$ для различных конкретных a при $n = 19$.

Таблица 2

№ \ n	17	18	19	20	21
I	0.227 0.209	0.219 0.205	0.216 0.204	0.219 0.205	0.223 0.207
II $a=l/2$	0.219 0.208	0.213 0.201	0.208 0.197	0.212 0.201	0.217 0.205

Таблица 3

n	19		
a	0	$l/4$	$l/2$
II	0.216 0.204	0.209 0.197	0.208 0.197

Из этой таблицы видно, что значения $W^* = C^*_{\text{кр.}}$ возрастают при уменьшении $x = a$ весьма незначительно.

Разница между значениями $C^*_{\text{кр.}}$, вычисленными с учетом и без учета начального докритического прогиба, составляет $\approx 5 - 10\,\%$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 10 VI 1970

Գ. Ի. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ՀԱՐԿԱԴՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է եզրերում հոդակապերով հենված վերջավոր երկարության գլանային թաղանթի կայունության վերաբերյալ երկու խնդիր՝ առանցքասիմետրիկ շառավղային տեղափոխության առկայության դեպքում: Առաջին խնդրում տեղափոխությունները վերցված են ձախ հենարանում: Երկրորդ խնդրում՝ հենարանների միջև:

Դրվում է հարկադրական տեղափոխությունների կրիտիկական արժեքների որոշման խնդիրը, որի դեպքում թաղանթը կորցնում է ստատիկական կայունությունը:

Երկու դեպքում էլ հավասարումների հիմնական սիստեմները բերված են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի, որոնց որոշիչի զրո լինելը հանդիսանում է թաղանթի ստատիկական կայունությունը կորցնելու պայման։

ON THE STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER FORCED AXISYMMETRIC RADIAL DISPLACEMENTS

G. I. AVANESOVA

Summary

In the present paper two problems on stability of a cylindrical shell of finite length hingely supported at the butt-ends under the action of axisymmetric radial displacements are considered. In the first problem this displacement is taken at the left butt-end, and in the second—in the span of the shell.

The problem on determination of the critical value of forced displacements when the shell loses statical stability is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
2. *Гнуни В. Ц., Мовсесян Л. А.* К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Докл. АН Арм. ССР, т. XVI, №4, 1968.