ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

В. Ф. АБСУЛОВ

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

В рамках обычных допущений прикладной теории упругости [4, 6] рассматривается задача о деформациях пластинок постоянной толщины, выполненных из изотропного разномодульного материала [1, 2, 3] при их поперечном изгибе для случая, когда вся пластинка разбивается на области только первого рода [2].

1. В ряде случаев изгиба пластинки ее объем разбивается только на области двухосного растяжения или двухосного сжатия (так называемые области первого рода [2]). Следуя С. А. Амбарцумяну [2], можно для областей первого рода записать следующую связь между компонентами напряжений и прогибом нейтральной поверхности:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{E^{\pm} z}{1-(\nu^{\pm})^2}\left(w_{xx}+\nu^{\pm} w_{yy}\right) \\
\sigma_y &= -\frac{E^{\pm} z}{1-(\nu^{\pm})^2}\left(w_{yy}+\nu^{\pm} w_{xx}\right) \qquad (1.1) \\
\tau_{xy} &= -\frac{E^{\pm} z}{1+\nu^{\pm}} w_{xy}
\end{aligned}
$$

где z — расстояние от нейтральной поверхности (положение которой пока неизвестно);
$w_{xx}, w_{xy} \cdots$ — частные производные второго порядка по переменным, указанным нижними индексами.

Предположим, что нижние точки одной из нормалей к нейтральной поверхности испытывают растяжение в направлениях осей x и y, верхние — сжатие, и пусть h^{+} — толщина растянутой зоны, а h^{-} — сжатой. Тогда, произведя интегрирование первых двух уравнений равновесия [4, 6] по толщине пластинки и определяя постоянные интегрирования из граничных условий [4, 6] с учетом (1.1), найдем

$$
\begin{aligned}
\tau_{xz} &= -\frac{E^{\pm}\left[(h^{\pm})^2-z^2\right]}{2\left[1-(\nu^{\pm})^2\right]}\left(w_{xx}+w_{yy}\right)_{,x} \\
& \qquad (1.2) \\
\tau_{yz} &= -\frac{E^{\pm}\left[(h^{\pm})^2-z^2\right]}{2\left[1-(\nu^{\pm})^2\right]}\left(w_{xx}+w_{yy}\right)_{,y}
\end{aligned}
$$

Здесь и далее нижние индексы после запятой означают частное дифференцирование по соответствующему аргументу.

Отсюда, выполняя условие непрерывности касательных напряжений, получим

$$\frac{E^{+}(h^{+})^{2}}{1-(\nu^{+})^{2}}=\frac{E^{-}(h^{-})^{2}}{1-(\nu^{-})^{2}} \tag{1.3}$$

что является обобщением результатов [1, 5, 7], соответствующих нулевым коэффициентам Пуассона.

Уравнение (1.3) вместе с условием $h=h^{+}+h^{-}$ определяет положение нейтральной поверхности.

На границе смены зон происходит „перескок“ нейтральной поверхности на величину $(h^{-}-h^{+})$.

2. Из третьего уравнения равновесия [4, 6], произведя интегрирование для каждой зоны в отдельности с учетом (1.2), найдем

$$\sigma_{z}=-\frac{E^{\pm}\left[(h^{\pm})^{2}-\frac{z^{2}}{3}\right]z}{2[1-(\nu^{\pm})^{2}]}\nabla^{4}w+\psi^{\pm}(x,\ y)$$

Постоянные интегрирования $\psi^{\pm}(x,\ y)$ вычисляются из условий на контуре $(\sigma_{z})_{z=-h^{+}}=0$, $(\sigma_{z})_{z=h^{-}}=-q$, из которых

$$\psi^{+}(x,\ y)=\frac{E^{+}(h^{+})^{3}}{3[1-(\nu^{+})^{2}]}\nabla^{4}w$$
$$\psi^{-}(x,\ y)=-q-\frac{E^{-}(h^{-})^{3}}{3[1-(\nu^{-})^{2}]}\nabla^{4}w \tag{2.1}$$

Из условия непрерывности нормальных напряжений следует $\psi^{+}(x,\ y)=\psi^{-}(x,\ y)$, а тогда из (2.1) получим дифференциальное уравнение для прогибов

$$\nabla^{4}w=-\frac{q}{D} \tag{2.2}$$

где

$$D=\frac{E^{+}h^{3}}{12[1-(\nu^{-})^{2}]}\left(\frac{2k}{1+k}\right)^{2}$$
$$k=\frac{h^{+}}{h^{-}}=\sqrt{\frac{E^{-}[1-(\nu^{+})^{2}]}{E^{+}[1-(\nu^{-})^{2}]}} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) сохранится и при взаимной смене зон сжатия и растяжения вдоль рассматриваемой нормали.

Таким образом, дифференциальное уравнение для прогибов нейтральной поверхности разномодульной пластинки по форме совпадает с соответствующим уравнением обычной пластинки [4, 6]. Поэтому разрешающие функции указанных пластинок будут по форме также совпадать, если одинаковы граничные условия. Различие будет состоять в положении нейтральной поверхности и в величине напряжений.

Рассмотрим эти различия на конкретных примерах, в которых заведомо будут иметь место только области первого рода.

3. *Изгиб прямоугольной пластинки по цилиндрической поверхности постоянной нагрузкой* q. Длинные края пластинки защемлены. Начало координат поместим в центре малой стороны, длина которой равна $2a$. Тогда, как и для соответствующей обычной пластинки [4],

$$w = -\frac{qa^4}{24D}\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)^2$$

Для рассматриваемого примера смена зон и „перескок" нейтральной поверхности происходит при $|x| = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Поэтому напряжения в соответствии с (1.1) определятся выражениями:

при $0 \leqslant |x| \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$\sigma_x = \begin{cases} \dfrac{qa^2}{6D}\left(\dfrac{3x^2}{a^2}-1\right)\dfrac{E^+ z}{1-(\nu^+)^2}; & -h^- \leqslant z \leqslant 0 \\ \dfrac{qa^2}{6D}\left(\dfrac{3x^2}{a^2}-1\right)\dfrac{E^- z}{1-(\nu^-)^2}; & 0 \leqslant z \leqslant h^- \end{cases}$$

при $\frac{a}{\sqrt{3}} \leqslant |x| \leqslant a$

$$\sigma_x = \begin{cases} \dfrac{qa^2}{6D}\left(\dfrac{3x^2}{a^2}-1\right)\dfrac{E^+ z}{1-(\nu^+)^2}; & 0 \leqslant z \leqslant h^+ \\ \dfrac{qa^2}{6D}\left(\dfrac{3x^2}{a^2}-1\right)\dfrac{E^- z}{1-(\nu^-)^2}; & -h^- \leqslant z \leqslant 0 \end{cases}$$

Напряжения σ_y соответственно

$\sigma_y = \nu^+ \sigma_x$ — для зон растяжения,

$\sigma_y = \nu^- \sigma_x$ — для зон сжатия.

Написанные выражения вместе с (2.3) характеризуют упомянутое выше различие в напряженном состоянии разномодульной и обычной пластинок.

4. *Изгиб прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру, распределенной нагрузкой*,

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

где a, b — размеры пластинки; начало координат в одном из углов пластинки.

Краевым условиям данной задачи и дифференциальному уравнению (2.2) удовлетворяет функция [4]

$$w = w_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

через которую с помощью (1.1), (1.2) и (2.2), (2.3) нетрудно определить прогиб в центре пластинки w_0 и напряжения в любой точке. В данной задаче нейтральная поверхность не имеет „перескоков“: верхние волокна всюду сжаты, а нижние—растянуты.

5. *Изгиб прямоугольной пластинки, защемленной одной стороной, под действием постоянной нагрузки q.* Начало координат у защемленного края. Легко убедиться, что функция

$$w = -\frac{q}{24D}\left(x^4 + 6a^2x^2 - 4ax^3\right)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2) и граничным условиям задачи: при $x = 0$ $w = w_x = 0$, при $x = a$ $w_{xx} = 0$.

Экстремальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2}\frac{qa^2}{h^2}\frac{1+k}{k}, \qquad \sigma_{\min} = -\frac{3}{2}\frac{qa^2}{h^2}(1+k)$$

Отношение экстремальных напряжений

$$\left|\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\right| = \frac{1}{k}$$

тогда как для соответствующей обычной пластинки это отношение составляет единицу.

Саратовское высшее командно-инженерное училище

Поступила 24 XI 1969

Վ. Յ. ԱԲՍՈԼՈՎ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՍԱԼԵՐԻ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Առաձգականության կիրառական տեսության սովորական ընդունելությունների պայմաններում ստացված է դիֆերենցիալ հավասարում ընդլայնական ծռման ենթարկված տարամոդուլ իզոտրոպ սալի չեզոք մակերևույթի ճկվածքների համար։

Լարումները արտահայտված են չեզոք մակերևույթի ճկվածքների միջոցով։

Դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կատարված է երեք մասնավոր դեպքի համար՝ ուղղանկյուն սալի ծռումը գլանային մակերևույթով, եզրագծում հոդակապերով հենված ուղղանկյուն սալի ընդլայնական ծռումը սինուսոիդալ բեռի դեպքում, մեկ կողմով ամրակցված ուղղանկյուն սալի ծռումը q հաստատուն բեռի ազդեցության տակ։

CROSS BENDING OF DIFFERENT MODULUS PLATES

V. F. ABSULOV

Summary

A differential equation for bendings in the neutral surface of a different modulus isotropic plate on its cross deflection has been derived under familiar assumptions of the applied theory of elasticity.

The stresses are expressed through deflections in the neutral surface.

The differential equation has been solved for the three particular cases: 1) the bending of a rectangular plate along the cylindrical surface; 2) the cross bending of a rectangular plate supported on hinges along the contour when loaded sinusoidally; 3) the bending of a rectangular plate with its side fastened under a constant load q.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1965.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. журнал МТТ, № 2, 1966.
3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости. Инж. ж. МТТ, №6, 1966.
4. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд. Высшая школа, М., 1961.
5. *Верзина Л. И.* К определению положения нейтральной поверхности неметаллических оболочек, пластин и стержней. Изв. ВУЗов „Машиностроение“, № 6, 1967.
6. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. ОГИЗ, 1947.
7. *Шапиро Г. С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, №2, 1966.