ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Теории упругости материала, разносопротивляющегося напряжениям растяжения и сжатия, посвящен ряд работ советских исследователей. В настоящее время эта теория развивается, в основном, по двум направлениям: [1, 2, 3] и [4, 5].

В настоящей работе строится модель упругой среды, разносопротивляющейся деформациям растяжения и сжатия, при конечных деформациях.

На основании непрерывности напряжений и функции энергии деформации предлагается метод для определения вида функции энергии деформации указанного материала. В рамках теории упругости второго порядка и линейной теории упругости разрабатывается способ определения упругих постоянных.

Работа базируется на соотношениях общей нелинейной теории упругости [6, 7].

Представим однородную упругую среду, армированную системой тонких упругих нитей, так, чтобы они заполняли эту среду всюду и по всем направлениям равномерно.

Пусть каждая нить идеально тонкая, абсолютно гибкая и не образует каких-либо неправильных перегибов. Нити достаточно близки друг к другу и прилипают к среде, в которую они внедрены. При этом нерегулярностью деформации среды между смежными нитями можно пренебречь.

Пусть нити имеют значительно больший модуль упругости, чем окружающая их среда, и изготовлены из несжимаемого материала.

Как показывают эксперименты, каждая нить в композиционном материале, если выдерживает сжимающую силу, не учитывая всестороннего гидростатического давления, то вследствие возникновения некоторой формы неустойчивости она теряет прямолинейную форму и оказывает сопротивление меньшее, чем при растягивающих напряжениях [8].

Так как нити изготовлены из несжимаемого материала, то появление сжимающей силы (не считая всестороннего гидростатического давления, при котором нити не теряют устойчивости) в них обусловливается появлением соответствующей деформации сжатия.

Таким образом, можно принять, что рассматриваемая среда изготовлена из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию, и, ввиду вышесказанного, появление такого эффекта мы будем связывать с деформациями.

При растяжении или сжатии материала со всех сторон его упругие свойства по всем направлениям одинаковы. Тогда его функция энергии деформации W зависит только от инвариантов деформации I_1, I_2 и I_3

$$W = W^{+}(I_1, I_2, I_3) \tag{1}$$

при растяжении его со всех сторон и

$$W = W^{-}(I_1, I_2, I_3) \tag{2}$$

при сжатии его со всех сторон.

С деформируемым телом свяжем ортогональную систему координат $(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \overline{\Theta}_3)$ так, чтобы в каждой точке она совпадала с главными направлениями тензора деформаций $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$. Свяжем с системой $(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \overline{\Theta}_3)$ метрические тензоры

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{\Theta}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{\Theta}^j}, \qquad \overline{g}^{ij} = \frac{\partial \overline{\Theta}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{\Theta}^j}{\partial x^r} \tag{3}$$

недеформированного состояния и

$$\overline{G}_{ij} = \frac{\partial y^r}{\partial \overline{\Theta}^i} \frac{\partial y^r}{\partial \overline{\Theta}^j}, \qquad \overline{G}^{ij} = \frac{\partial \overline{\Theta}^i}{\partial y^r} \frac{\partial \overline{\Theta}^j}{\partial y^r}\,* \tag{4}$$

деформированного состояния. Здесь (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3) — координаты точки по отношению к фиксированной прямоугольной декартовой системе координат в недеформированном и деформированном состояниях соответственно.

Если материал растягивается (сжимается) по направлению оси $\overline{\Theta}_i$ и сжимается (растягивается) по всем ей перпендикулярным направлениям, то упругие свойства материала по всем направлениям, перпендикулярным этой оси, одинаковы и различаются от упругих свойств материала по направлению $\overline{\Theta}_i$. Можно принять, что в пределах деформированного состояния указанного вида материал однороден в том смысле, что упругие свойства, отнесенные к осям $(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \overline{\Theta}_3)$, одинаковы в каждой точке этой области.

Для определения вида функции энергии деформации в пределах области определенного характера напряженного состояния, например, в области, где материал по направлению оси $\overline{\Theta}_1$ растягивается, а по перпендикулярным ей направлениям сжимается, выделим в какой-то точке P этой области элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны главным направлениям $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ в этой точке.

---

* Положение индексов у координат x_i, y_i и $\overline{\Theta}_i$ не имеет значения, поэтому для удобства они помещаются вверху или внизу.

Заметим, что мы получили бы такое же напряженное состояние, какое в действительности имеет наш элементарный параллелепипед, если приняли бы, что его материал трансверсально изотропен с соответствующими упругими свойствами по отношению к направлению $\bar{y}_1$ [7]. Тогда W материала нашего параллелепипеда, как и в случае трансверсально изотропного тела, будет зависеть от инвариантов деформаций I_1, I_2 и I_3, от $\bar{e}_{11}$ и от $\bar{e}_{31}^2+\bar{e}_{12}^2$, где $\bar{e}_{ij}$ — компоненты деформации по отношению к осям $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ в точке P.

Так как $\bar{e}_{31}=\bar{e}_{12}=0$, то функция энергии деформации в указанной области выражается инвариантами деформаций и безразмерной компонентой деформаций

$$\gamma_{(11)}=\frac{\bar{\gamma}_{11}}{\sqrt{\bar{g}_{11}\bar{g}_{11}}}=\bar{e}_{11} \tag{5}$$

Обозначим $W=W_1'(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(11)})$.

Аналогичным образом получим еще пять новых видов функции энергии деформации для остальных случаев напряженного состояния указанного характера

$$W=W_{(2)}'(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(22)})$$

$$W=W_{(3)}'(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(33)})$$

если материал по направлению $\bar{\Theta}_2$ или $\bar{\Theta}_3$ ($\bar{y}_2$ или $\bar{y}_3$) растягивается, и

$$W=W_{(s)}''(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(ss)})$$

если материал по направлению $\bar{\Theta}_s$ $(s=1, 2, 3)$ сжимается.

Определенным таким образом функциям W^+, W^-, $W_{(s)}'$* и $W_{(s)}''$ $(s=1, 2, 3)$ пусть соответствуют контрвариантные компоненты напряжений τ_+^{ij}, τ_-^{ij}, $\tau_{(s)}'^{ij}$ и $\tau_{(s)}''^{ij}$ соответственно, которые определяются выражениями [7]

$$\begin{gathered}\tau_+^{ij}=\Phi^+g^{ij}+\Psi^+B^{ij}+p^+G^{ij}\\ \tau_{(s)}'^{ij}=\Phi_{(s)}'g^{ij}+\Psi_{(s)}'B^{ij}+p_{(s)}'G^{ij}+\Theta_{(s)}'M_{(ss)}^{ij}\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_{(s)}'=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W_{(s)}'}{\partial I_1}, \quad \Psi_{(s)}'=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W_{(s)}'}{\partial I_2}, \quad p_{(s)}'=2\sqrt{I_3}\frac{\partial W_{(s)}'}{\partial I_3}\\ \Theta_{(s)}'=\frac{1}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W_{(s)}'}{\partial\gamma_{(ss)}}, \quad M_{(ss)}^{ij}=\frac{\partial\Theta^i}{\partial\bar{\Theta}^s}\frac{\partial\Theta^j}{\partial\bar{\Theta}^s}\Big/\bar{g}_{ss}\end{gathered} \tag{7}$$

(по индексу s не суммировать).

---

* Индексы в скобках являются свободными индексами и суммирование по этим индексам не производится.

τ_{-}^{ij} и $\tau_{(s)}^{*ij}$ определяются аналогичными выражениями.

Предположим, в какой-то зоне деформированного состояния материал по направлению $\bar{y}_1$ растягивается, а по перпендикулярным к нему направлениям деформации равны нулю. Тогда из того условия, что функция энергии деформации и напряжения должны быть непрерывными, получаем

$$\begin{gathered} W^{+}(I_1, I_2, I_3) = W_{(1)}^{*}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(11)}) = W_{(2)}^{*}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(22)}) = \\ = W_{(3)}^{*}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(33)}), \quad \tau_{+}^{ij} = \tau_{(1)}^{*ij} = \tau_{(2)}^{*ij} = \tau_{(3)}^{*ij} \end{gathered} \tag{8}$$

Если в какой-то зоне материал по направлению $\bar{y}_2$ растягивается, по направлению $\bar{y}_3$ сжимается, а по $\bar{y}_1$ деформации равны нулю, то имеют место соотношения

$$\begin{gathered} W_{(2)}^{*}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(22)}) = W_{(3)}^{*}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(33)}) \\ \tau_{(2)}^{*ij} = \tau_{(3)}^{*ij} \end{gathered} \tag{9}$$

В другой же зоне, где деформации по направлению $\bar{y}_1$ равны нулю, а по направлениям, перпендикулярным $\bar{y}_1$, материал сжимается, имеем

$$\begin{gathered} W^{-}(I_1, I_2, I_3) = W_{(1)}^{*}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(11)}) \\ \tau_{-}^{ij} = \tau_{(1)}^{ij} \end{gathered} \tag{10}$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для других подобных случаев деформированного состояния.

Если каким-то путем определено упругое поведение материала в некоторых видах деформированного состояния, то из указанных соотношений могут быть определены упругие свойства материала.

Если деформации небольшие, то функция $W_{(s)}^{*}$ может быть представлена степенным рядом по переменным (I_1-3), (I_2-3), (I_3-1) и $\gamma_{(11)}$

$$W_{(s)}^{*} = \sum_{i,\,j,\,k,\,l=0}^{\infty} C_{ijkl}\,(I_1-3)^i\,(I_2-3)^j\,(I_3-1)^k\,\gamma_{(ss)}^{l}$$

где $C_{0000}=0$, поскольку в недеформированном состоянии $W_{(s)}^{*}=0$. Величины (I_1-3), (I_2-3), (I_3-1) и $\gamma_{(ss)}$, вообще говоря, оказываются первого порядка малости по отношению к главным удлинениям.

Функцию $W_{(k)}^{*}$ можно представить в другом виде

$$W_{(s)}^{*} = \sum_{i,\,j,\,k,\,l=0}^{\infty} A_{ijkl}^{*}\,J_1^i\,J_2^j\,J_3^k\,\gamma_{(ss)}^{l} \tag{11}$$

где

$$J_1 = I_1 - 3, \quad J_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad J_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1 \tag{12}$$

оказываются соответственно первого, второго и третьего порядка малости по отношению к главным удлинениям [7].

A'_{ijkl} — постоянные, причем

$$A'_{0000} = A'_{1000} = A'_{0001} = 0$$

так как в недеформированном состоянии напряжения и $W'_{(s)}$ равны нулю.

Если в уравнении (11) пренебрегаем членами более высокой степени, чем третья по отношению к главным удлинениям, то получаем

$$W'_{(s)} = A'_{0100} J_2 + A'_{2000} J_1^2 + A'_{1100} J_1 J_2 + A'_{3000} J_1^3 + A'_{0010} J_3 +$$
$$+ A'_{0002} \gamma^2_{(ss)} + A'_{0003} \gamma^3_{(ss)} + A'_{1001} J_1 \gamma_{(ss)} + A'_{1002} J_1 \gamma^2_{(ss)} +$$
$$+ A'_{2001} J_1^2 \gamma_{(ss)} + A'_{0101} J_2 \gamma_{(ss)} \tag{13}$$

Для $W''_{(s)}$ получаем аналогичное выражение

$$W''_{(s)} = A''_{0100} J_2 + A''_{2000} J_1^2 + \cdots + A''_{0101} J_2 \gamma_{(ss)} \tag{14}$$

Функции W^+ и W^- с той же степенью точности определяются выражением Мурнагана

$$\begin{aligned} W^+ &= A_1^+ J_2 + A_2^+ J_1^2 + A_3^+ J_1 J_2 + A_4^+ J_1^3 + A_5^+ J_3 \\ W^- &= A_1^- J_2 + A_2^- J_1^2 + A_3^- J_1 J_2 + A_4^- J_1^3 + A_5^- J_3 \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда функции Φ^+, Ψ^+, p^+, $\Phi'_{(s)}$, $\Psi'_{(s)}$, $p'_{(s)}$ и $\Theta'_{(s)}$, входящие в уравнения (6), с помощью (7), (13) и (15) определяются выражениями

$$\Phi^+ = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[A_5^+ - 2A_1^+ + 2\left(A_2^+ - A_3^+\right)(I_1 - 3) + \right.$$
$$\left. + A_3^+ (I_2 - 3) + 3A_4^+ (I_1 - 3)^2 \right]$$

$$\Psi^+ = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[A_1^+ - A_5^+ + A_3^+ (I_1 - 3) \right], \quad p^+ = 2\sqrt{I_3}\, A_5^+ \tag{16}$$

$$\Phi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[A'_{0010} - 2A'_{0100} + 2(A'_{2000} - A'_{1100})(I_1 - 3) + A'_{1100} (I_2 - 3) + \right.$$
$$\left. + 3A'_{3000} (I_1 - 3)^2 + (A'_{1001} - 2A'_{0101}) \gamma_{(ss)} + A'_{1002} \gamma^2_{(ss)} + 2A'_{2001} \gamma_{(ss)} (I_1 - 3) \right]$$

$$\Psi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[A'_{0100} - A'_{0010} + A'_{1100} (I_1 - 3) + A'_{0101} \gamma_{(ss)} \right]$$

$$p'_{(s)} = 2\sqrt{I_3}\, A'_{0010} \tag{17}$$

$$\Theta'_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{I_3}}[2A'_{0002}\gamma_{(ss)} + 3A'_{0003}\gamma^2_{(ss)} + (A'_{1001} - 2A'_{0101})(I_1-3) +$$

$$+ 2A'_{1002}\gamma_{(ss)}(I_1-3) + A'_{2001}(I_1-3)^2 + A'_{0101}(I_2-3)] \tag{17}$$

Функции Φ^-, Ψ^-, p^-, $\Phi''_{(s)}$, $\Psi''_{(s)}$, $p''_{(s)}$ и $\Theta''_{(s)}$ определяются аналогичными выражениями.

Из равенств (8), (9) и (10) видно, что упругие постоянные, входящие в выражения $W'_{(s)}$ и $W''_{(s)}$, некоторым образом зависят от упругих постоянных, входящих в выражения W^+ и W^-.

Попытаемся найти эти зависимости.

В какой-то точке деформированного тела рассмотрим напряженное состояние элементарного параллелепипеда, ребра которого параллельны главным направлениям деформаций. Пусть системы координат y_i, Θ^i и $\overline{\Theta}^i$ выбраны так, что в этой точке они совпадают с системой $\overline{y}_i$ (главные направления деформаций). Если указанный параллелепипед растягивается со всех сторон, то его деформацию можно представить состоящей только из однородных растяжений с коэффициентами растяжений $\lambda_1 \geqslant 1$, $\lambda_2 \geqslant 1$ и $\lambda_3 \geqslant 1$, соответствующими главным направлениям $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_3$ соответственно.

Решение задачи однородного растяжения изотропного тела дано в работе [6]

$$\begin{aligned} \tau^{11}_{+} &= \sigma^{+}_{11} = \lambda_1^2\Phi^+ + \lambda_1^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)\Psi^+ + p^+ \\ \tau^{22}_{+} &= \sigma^{+}_{22} = \lambda_2^2\Phi^+ + \lambda_2^2(\lambda_3^2+\lambda_1^2)\Psi^- + p^+ \\ \tau^{33}_{+} &= \sigma^{+}_{33} = \lambda_3^2\Phi^+ + \lambda_3^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\Psi^- + p^+ \\ \tau^{12}_{+} &= \tau^{23}_{+} = \tau^{31}_{+} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

где σ^{+}_{ij} — физические компоненты напряжений для функции W^+.

Если наш элементарный параллелепипед сжимается по главным направлениям, т. е. $\lambda_1 \leqslant 1$, $\lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_3 \leqslant 1$, то напряжения определяются выражениями, аналогичными (18), где вместо Φ^+, Ψ^- и p^- фигурируют функции Φ^-, Ψ^- и p^-.

Если вырезанный параллелепипед растягивается по направлению $\overline{y}_1$, а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается, т. е. $\lambda_1 \geqslant 1$, $\lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_3 \leqslant 1$, то нетрудно доказать, что компоненты напряжений в этом случае (соответствующие функции энергии деформации $W'_{(1)}$) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \tau'^{11}_{(1)} &= \sigma'^{(1)}_{11} = \lambda_1^2\Phi'_{(1)} + \lambda_1^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)\Psi'_{(1)} + p'_{(1)} + \Theta'_{(1)}M^{11}_{(11)} \\ \tau'^{22}_{(1)} &= \sigma'^{(1)}_{22} = \lambda_2^2\Phi'_{(1)} + \lambda_2^2(\lambda_3^2+\lambda_1^2)\Psi'_{(1)} + p'_{(1)} \\ \tau'^{33}_{(1)} &= \sigma'^{(1)}_{33} = \lambda_3^2\Phi'_{(1)} + \lambda_3^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\Psi'_{(1)} + p'_{(1)} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\tau_{(1)}^{'12} = \tau_{(1)}^{'23} = \tau_{(1)}^{'31} = 0 \tag{19}$$

где

$$M_{(11)}^{11} = \frac{\partial\Theta^1 \partial\Theta^1}{\partial\overline{\Theta}^1 \partial\overline{\Theta}^1} \Big/ \overline{g}_{11} = \frac{1}{\overline{g}_{11}} = \lambda_1^2$$

Остальные виды напряженного состояния, соответствующие разным значениям λ_1, λ_2 и λ_3, определяются аналогичными выражениями.

Если наш элементарный параллелепипед деформирован так, что $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, то имеют место равенства (8), откуда получаем

$$\lambda_1^2 \Phi^+ + 2\lambda_1^2 \Psi^+ + p^- = \lambda_1^2 \Phi'_{(1)} + 2\lambda_1^2 \Psi'_{(1)} + p'_{(1)} + \lambda_1^2 \Theta'_{(1)} =$$

$$= \lambda_1^2 \Phi'_{(2)} + 2\lambda_1^2 \Psi'_{(2)} + p'_{(2)} = \lambda_1^2 \Phi'_{(3)} + 2\lambda_1 \Psi'_{(3)} + p'_{(3)}$$

$$\Phi^+ + (1 + \lambda_1^2) \Psi^- + p^+ = \Phi'_{(1)} + (1 + \lambda_1^2) \Psi'_{(1)} + p'_{(1)} =$$

$$= \Phi'_{(2)} + (1 + \lambda_1^2) \Psi'_{(2)} + p'_{(2)} + \Theta'_{(2)} = \Phi'_{(3)} + (1 + \lambda_1^2) \Psi'_{(3)} + p'_{(3)} =$$

$$= \Phi'_{(2)} + (1 + \lambda_1^2) \Psi'_{(2)} + p'_{(2)} = \Phi'_{(3)} + (1 + \lambda_1^2) \Psi'_{(3)} + p'_{(3)} + \Theta'_{(3)} \tag{20}$$

Тогда инварианты определяются выражениями

$$I_1 - 3 = \lambda_1^2 - 1, \quad I_2 - 3 = 2(\lambda_1^2 - 1), \quad I_3 - 1 = \lambda_1^2 - 1 \tag{21}$$

В случае, когда $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, получаем аналогичные равенства.

Если $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 > 1$ и $\lambda_2 < 1$, то из равенства (9) находим

$$\Phi'_{(2)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \Psi'_{(2)} + p'_{(2)} = \Phi'_{(3)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \Psi'_{(3)} + p'_{(3)}$$

$$\lambda_2^2 \Phi'_{(2)} + \lambda_2^2 (1 + \lambda_3^2) \Psi'_{(2)} + p'_{(2)} + \lambda_2^2 \Theta'_{(2)} = \lambda_2^2 \Phi'_{(3)} + \lambda_2^2 (1 + \lambda_3^2) \Psi'_{(3)} + p'_{(3)}$$

$$\lambda_3^2 \Phi'_{(2)} + \lambda_3^2 (1 + \lambda_2^2) \Psi'_{(2)} + p'_{(2)} = \lambda_3^2 \Phi''_{(3)} + \lambda_3^2 (1 + \lambda_2^2) \Psi'_{(3)} + p'_{(3)} + \lambda_3^2 \Theta'_{(3)} \tag{22}$$

В этом случае инварианты определяются

$$I_1 - 3 = 2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2$$

$$I_2 - 3 = 2(I_1 - 3) + 4\gamma_{22}\gamma_{33} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 3 \tag{23}$$

$$I_3 - 1 = (I_1 - 3) + 4\gamma_{22}\gamma_{33} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1$$

Подставляя значения Φ^+, Ψ^-, p^+, $\Phi'_{(1)}, \cdots, p'_{(3)}$, определенные из (16) – (17) и из выражений, аналогичных (16) – (17), в (20) и (22), принимая во внимание (21) и (23), получаем некоторые равенства, из которых находим упругие постоянные

$$A'_{0100} = A_1^-, \quad A'_{2000} = A_2^-, \quad A'_{1100} = A_3^-, \quad A'_{3000} = A_4^-, \quad A'_{0010} = A_5^-$$

$$A'_{0100} = A_1^+, \quad A'_{2000} = A_2^+, \quad A'_{1100} = A_3^+, \quad A'_{3000} = A_4^+, \quad A'_{0010} = A_5^+$$

$$A'_{0002} = - A^*_{0002} = 4\,(A_2^+ - A_2^-)$$

$$A'_{0003} = - A^*_{0003} = 8\,(A_4^+ - A_4^-) + 4\,(A_3^+ - A_3^-) + 4\,(A_5^+ - A_5^-)$$

$$A'_{1002} = - A^*_{1002} = 2\,(A_3^- - A_3^+) + 2\,(A_5^- - A_5^+)$$

$$A'_{0101} = - A^*_{0101} = 6\,(A_4^+ - A_4^-) + 3\,(A_3^+ - A_3^-) + (A_5^+ - A_5^-)$$

$$A'_{1001} = A^*_{1001} = A'_{2001} = A^*_{2001} = 0 \tag{24}$$

Кроме того, получаем соотношение

$$A_1^+ + 2A_2^+ = A_1^- + 2A_2^- \tag{25}$$

Найденные упругие постоянные удовлетворяют условиям (8), (9), (10) и всем другим подобным условиям.

Подставляя значения соответствующих упругих постоянных из (24) в (13) и (16), получаем

$$W'_{(s)} = A_1^- J_2 + A_2^- J_1^2 + A_3^- J_1 J_2 + A_4^- J_1^3 + A_5^- J_3 + 4\,(A_2^+ - A_2^-)\,\gamma_{(ss)}^2 +$$
$$+ 4\,[2\,(A_4^+ - A_4^-) + A_3^+ - A_3^- + A_5^+ - A_5^-]\,\gamma_{(ss)}^3 +$$
$$+ 2\,[A_3^- - A_3^+ + A_5^- - A_5^+]\,J_1\,\gamma_{(ss)}^2 +$$
$$+ [6\,(A_4^+ - A_4^-) + 3\,(A_3^+ - A_3^-) + (A_5^+ - A_5^-)]\,J_2\,\gamma_{(ss)} \tag{26}$$

$$\Phi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\{A_5^- - 2A_1^- + 2\,(A_2^- - A_3^-)\,(I_1 - 3) + A_3^-\,(I_2 - 3) + 3A_4^-\,(I_1 - 3)^2 -$$
$$- 2\,[6\,(A_4^+ - A_4^-) + 3\,(A_3^+ - A_3^-) + A_5^+ - A_5^-]\,\gamma_{(ss)} -$$
$$- 2\,[A_3^+ - A_3^- + A_5^+ - A_5^-]\,\gamma_{(ss)}^2\,\}$$

$$\Psi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\{A_1^- - A_5^- + A_3^-\,(I_1 - 3) + [6\,(A_4^+ - A_4^-) + 3\,(A_3^+ - A_3^-) +$$
$$+ A_5^+ - A_5^-]\,\gamma_{(ss)}\,\}$$

$$p'_{(s)} = 2\sqrt{I_3}\,A_5^- \tag{27}$$

$$\Theta'_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{I_3}}\,\{8(A_2^+ - A_2^-)\,\gamma_{(ss)} + 12\,[2\,(A_4^+ - A_4^-) + A_3^+ - A_3^- +$$
$$+ A_5^+ - A_5^-]\,\gamma_{(ss)}^2 - 2\,[6(A_4^+ - A_4^-) + 3\,(A_3^+ - A_3^-) +$$
$$+ A_5^+ - A_5^-]\,(I_1 - 3) - 4\,[A_3^+ - A_3^- + A_5^+ - A_5^-]\,(I_1 - 3)\,\gamma_{(ss)} +$$
$$+ [6\,(A_4^+ - A_4^-) + 3\,(A_3^+ - A_3^-) + A_5^+ - A_5^-]\,(I_2 - 3)\,\}$$

Аналогичные выражения могут быть получены для функций $W^*_{(s)}$, $\Phi^*_{(s)}$, $\Psi^*_{(s)}$, $p^*_{(s)}$ и $\Theta^*_{(s)}$.

Если в уравнениях (15) и (26) пренебречь членами более высокой степени, чем второй, по отношению к главным удлинениям получим

$$W^{+} = A_1^{+} J_2 + A_2^{+} J_1^2, \quad W^{-} = A_1^{-} J_2 + A_2^{-} J_1^2 \tag{28}$$

$$W_{(s)}^{1} = A_1^{-} J_2 + A_2^{-} J_1^2 + 4\,(A_2^{+} - A_2^{-})\,\gamma_{(ss)}^2 \tag{29}$$

Вводим новые постоянные (постоянные Ляме)

$$A_1^{+} = -\frac{1}{2}\mu^{+}, \quad A_2^{+} = \frac{1}{8}(\lambda^{+} + 2\mu^{+})$$

$$A_1^{-} = -\frac{1}{2}\mu^{-}, \quad A_2^{-} = \frac{1}{8}(\lambda^{-} + 2\mu^{-}) \tag{30}$$

Тогда условие (25) принимает вид

$$\lambda^{+} = \lambda^{-} = \lambda \tag{31}$$

Подставляя значения J_1 и J_2 [7]

$$J_1 = 2\gamma_r^r$$

$$J_2 = 2\,(\gamma_r^r \gamma_k^k - \gamma_k^r \gamma_r^k) \tag{32}$$

(γ_j^i — компоненты смешанного тензора деформаций) в выражения (28) и (29) и принимая во внимание (30) и (31), получим

$$W^{+} = \frac{1}{2}\lambda\gamma_r^r \gamma_k^k + \mu^{+} \gamma_k^r \gamma_r^k$$

$$W_{(s)}^{'} = \frac{1}{2}\lambda\gamma_r^r \gamma_k^k + \mu^{-} \gamma_k^r \gamma_r^k + (\mu^{+} - \mu^{-})\,\gamma_{(ss)}^2 \tag{33}$$

Для контрвариантных компонентов тензора напряжений (6), соответствующих выражениям (33), находим

$$\tau_{+}^{ij} = \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^{+} \gamma^{ij}$$

$$\tau_{(s)}^{'ij} = \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^{-} \gamma^{ij} + 2\,(\mu^{+} - \mu^{-})\,\gamma_{(ss)} M_{(ss)}^{ij} \tag{34}$$

В системе прямоугольных декартовых координат выражения (33) и (34) принимают вид

$$W^{+} = \frac{1}{2}\lambda\Delta^2 + \mu^{+}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2\mu^{+}(e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2)$$

$$W_{(s)}^{'} = \frac{1}{2}\lambda\Delta^2 + \mu^{-}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2\mu^{-}(e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2) + (\mu^{+} - \mu^{-})\,\bar{e}_{ss}^2 \tag{35}$$

$$\sigma_{ij}^{+} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{+} e_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^{'(s)} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{-} e_{ij} + 2\,(\mu^{+} - \mu^{-})\,\bar{e}_{ss} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_s} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{y}_s} \tag{36}$$

Здесь σ_{ij}^{+} и $\sigma_{ij}^{(s)}$ — физические компоненты напряжений, соответствующие W^{+} и $W_{(s)}$, e_{ij} — компоненты тензора деформации в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2, x_3), $\overline{e}_{ss}$ — главное значение деформации по направлению $\overline{y}_s$, δ_{ij} — символы Кронекера

$$\Delta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

Аналогичные выражения могут быть получены для W^{-}, $W'_{(s)}$, σ_{ij}^{-} и $\sigma_{ij}^{'(s)}$.

Из (34) или (36) нетрудно получить зависимости деформаций от напряжений, однако эти зависимости будут иметь довольно сложный вид.

Выражения (33) — (36), полученные в рамках линейной теории упругости, отличаются от соответствующих выражений, известных в литературе [1, 2, 3, 4, 5] и др., так как в настоящей работе в качестве критерия различия понятий „растяжение", „сжатие" принята деформация, а не напряжение.

Автор выражает глубокую благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 1970

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆ ՑՈՒՅՑ ՏՎՈՂ ՆՅՈՒԹԻ ՄԵԿ ՄՈԴԵԼԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում կառուցվում է ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր դիմադրություն ցույց տվող առաձգական միջավայրի մոդել:

Դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիայի և լարումների անընդհատությունից ելնելով առաջարկվում է նշված նյութի դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիայի տեսքը որոշելու եղանակ:

Առաձգական հաստատունների որոշումը կատարվում է երկրորդ կարգի և գծային առաձգականության տեսության սահմաններում:

ON A MODEL OF A MEDIUM HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION DEFORMATIONS

R. E. MKRTCHIAN

Summary

This paper presents a model of an elastic medium heteroresistant to tension and compression deformations.

In virtue of the principle of continuity of the strain-energy function and stress a method is suggested to determine the form of the strain-energy function of the medium. The definition of elastic constants is made in terms of the theory of elasticity of the second order and of the linear theory of elasticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, №2, 1966.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К вопросу теории упругости разномодульного материала. Докл. АН Арм. ССР, XVIII. 4, 1969.
4. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О нелинейных соотношениях разномодульной теории упругости. Сб. работ по теории упругости. Тульский политехнический ин-т, Тула, 1968.
5. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах. Инж. ж., МТТ, № 6, 1968.
6. *Green A. E. Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
7. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд. Мир, М., 1965.
8. *Согоян А. С.* О связи между деформациями и напряжениями для разносопротивляющегося на растяжение и сжатие композиционного материала строго однонаправленной структуры. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, т. XIX, № 6, 1966.