ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Ж. Г. АПИКЯН

ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

В работах [1] и [2] рассмотрено действие нормального давления, приложенного на участке границы упругой полуплоскости, движущегося с постоянной скоростью. На границе полуплоскости касательное напряжение равно нулю.

В настоящей заметке определяются напряжения и перемещения упругой полуплоскости, обусловленные действием подвижного штампа, приложенного к ее границе и движущегося со сверхзвуковой скоростью.

Рассмотрим динамическую задачу линейной теории упругости для полуплоскости, когда на движущемся со сверхзвуковой скоростью V конечном участке длины l ее границы заданы перемещения. Касательное и нормальное напряжения на границе вне участка задания перемещений отсутствуют.

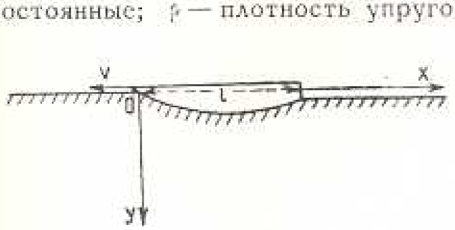
Уравнения движения в подвижных координатах xOy, связанных с движущимся штампом (фиг. 1), будут [1], [2]:

$$\varphi_{yy}=\alpha^2\varphi_{xx}, \quad \psi_{yy}=\beta^2\psi_{xx} \tag{1}$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — продольный и поперечный потенциалы; $u=\varphi_x-\psi_y$, $v=\varphi_y+\psi_x$ — компоненты перемещения;

$$\alpha^2=\frac{V^2}{a^2}-1, \quad \beta^2=\frac{V^2}{b^2}-1, \quad a^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad b^2=\frac{\mu}{\rho}$$

λ и μ — упругие постоянные; ρ — плотность упругой среды.



Фиг. 1.

Имеем граничные условия

$$\begin{gathered} u(x, 0)=u_0(x), \quad v(x, 0)=v_0(x), \quad 0<x\leqslant l \\ \sigma_{xy}(x, 0)=\sigma_{yy}(x, 0)=0, \quad x<0, \quad x>l \end{gathered} \tag{2}$$

Будем рассматривать квазистационарную задачу.

Решение для подвижной сосредоточенной нагрузки P имеет вид [1]:

$$u = \frac{P}{\mu}\left[c_1 H(x-\alpha y) + \beta c_2 H(x-\beta y)\right]$$

$$v = \frac{P}{\mu}\left[c_2 H(x-\beta y) - \alpha c_1 H(x-\alpha y)\right] \tag{3}$$

Здесь

$$c_1 = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+4\alpha\beta}, \quad c_2 = \frac{2\alpha}{(1-\beta^2)^2+4\alpha\beta}$$

$H(x)$ — функция Хевисайда.

Используя интеграл Дюамеля, можно получить решение для распределенной на границе нормальной нагрузки $P(x) \neq 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ и $P(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > l$:

I. $$u = v = 0 \quad \text{при } x < \alpha y$$

II. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} P dx, \quad v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} P dx \quad \text{при } x < \beta y,\ \alpha y < x < \alpha y + l$$

III. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{l} P dx, \quad v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{l} P dx \quad \text{при } \alpha y + l < x < \beta y$$

IV. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} P dx + \frac{\beta c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} P dx \tag{4}$$

$$\text{при } \beta y < x < \alpha y + l$$

$$v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} P dx + \frac{c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} P dx$$

V. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{l} P dx + \frac{\beta c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} P dx$$

$$\text{при } \alpha y + l < x < \beta y + l,\ x > \beta y$$

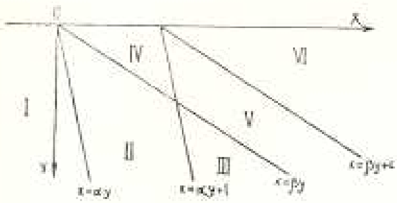
$$v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{l} P dx + \frac{c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} P dx$$

VI.
$$u=\frac{c_1+\beta c_2}{\mu}\int\limits_0^l Pdx$$

при $x>\beta y+l$

$$v=\frac{c_2-\alpha c_1}{\mu}\int\limits_0^l Pdx \tag{4}$$

В дальнейшем, области, где справедливы данные выражения решения, для краткости не будем отмечать. Эти области (фиг. 2) определяются римскими цифрами, стоящими слева от соответствующих выражений.



Фиг. 2.

Аналогичным образом можно найти перемещения в полуплоскости, когда на подвижном участке границы полуплоскости задано касательное напряжение $\sigma_{xy}(x, 0)=T(x)$ при $0\leqslant x\leqslant l$ и $\sigma_{xy}(x, 0)=0$ при $x<0$ и $x>l$, а нормальное напряжение отсутствует:

I.
$$u=v=0$$

II.
$$u=\frac{c_3}{\mu}\int\limits_0^{x-\alpha y} Tdx,\quad v=-\frac{\alpha c_3}{\mu}\int\limits_0^{x-\alpha y} Tdx$$

III.
$$u=\frac{c_3}{\mu}\int\limits_0^{l} Tdx,\quad v=-\frac{\alpha c_3}{\mu}\int\limits_0^{l} Tdx$$

IV.
$$u=\frac{c_3}{\mu}\int\limits_0^{x-\alpha y} Tdx+\frac{\beta c_4}{\mu}\int\limits_0^{x-\beta y} Tdx \tag{5}$$

$$v=-\frac{\alpha c_3}{\mu}\int\limits_0^{x-\alpha y} Tdx+\frac{c_4}{\mu}\int\limits_0^{x-\beta y} Tdx$$

V.
$$u=\frac{c_3}{\mu}\int\limits_0^{l} Tdx+\frac{\beta c_4}{\mu}\int\limits_0^{x-\beta y} Tdx$$

$$v = -\frac{\alpha c_3}{\mu}\int_0^l T dx + \frac{c_4}{\mu}\int_0^{x-\beta y} T dx$$

VI. $$u = \frac{c_3 + \beta c_4}{\mu}\int_0^l T dx, \quad v = \frac{c_4 - \alpha c_3}{\mu}\int_0^l T dx \tag{5}$$

где

$$c_3 = \frac{2\beta}{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha\beta}, \quad c_4 = \frac{\beta^2 - 1}{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha\beta}$$

Складывая решения (4) и (5), получим выражения перемещений, когда на границе полуплоскости одновременно заданы нормальное напряжение $P(x)$ и касательное напряжение $T(x)$:

I. $$u = v = 0$$

II. $$u = \int_0^{x-\alpha y} R dx, \quad v = -\alpha\int_0^{x-\alpha y} R dx$$

III. $$u = \int_0^l R dx, \quad v = -\alpha\int_0^l R dx$$

(6)

IV. $$u = \int_0^{x-\alpha y} R dx + \beta\int_0^{x-\beta y} Q dx, \quad v = -\alpha\int_0^{x-\alpha y} R dx + \int_0^{x-\beta y} Q dx$$

V. $$u = \int_0^l R dx + \beta\int_0^{x-\beta y} Q dx, \quad v = -\alpha\int_0^l Q dx + \int_0^{x-\beta y} Q dx$$

VI. $$u = \int_0^l (R + \beta Q)\, dx, \quad v = \int_0^l (Q - \alpha R)\, dx$$

Здесь

$$R(x) = \frac{1}{\mu}\left[c_1 P(x) + c_3 T(x)\right]$$

$$Q(x) = \frac{1}{\mu}\left[c_2 P(x) + c_4 T(x)\right]$$

На границе при $y = 0$ и $0 \leqslant x \leqslant l$ из (6.IV) имеем

$$u_0(x) = \int_0^x (R + \beta Q)\, dx, \quad v_0(x) = \int_0^x (Q - \alpha R)\, dx \tag{7}$$

Определяя $R(x)$ и $Q(x)$ из соотношений (7) и подставляя эти значения в (6), получаем решение основной задачи:

I. $$u = v = 0$$

II. $$cu = u_0(x - \alpha y) - \beta v_0(x - \alpha y), \quad cv = \alpha\,[\beta v_0(x - \alpha y) - u_0(x - \alpha y)]$$

III. $$cu = u_0(l) - \beta v_0(l), \quad cv = \alpha\,[\beta v_0(l) - u_0(l)]$$

IV. $$cu = u_0(x - \alpha y) - \beta v_0(x - \alpha y) + \beta\,[v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)]$$
$$cv = \alpha\,[\beta v_0(x - \alpha y) - u_0(x - \alpha y)] + v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)$$

V. $$cu = u_0(l) - \beta v_0(l) + \beta\,[v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)]$$
$$cv = \alpha\,[\beta v_0(l) - u_0(l)] + v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)$$

VI. $$u = u_0(l), \quad v = v_0(l)$$

где $c = 1 + \alpha\beta$.

Таким образом, решение постоянно в областях I, III и VI. Заметим, что рассматриваемое решение справедливо только тогда, когда вместе с непрерывностью перемещений в интервале их задания выполняется условие равенства нулю перемещений на переднем конце интервала. При невыполнении последнего условия полуплоскость получит разрывы на границе.

Отметим, что этим путем решаются все квазистационарные задачи со смешанными граничными условиями на движущемся со сверхзвуковой скоростью участке границы упругой полуплоскости при совместимости этих условий с соотношениями (7), в частности, при пропорциональности касательного и нормального напряжений при заданном $u_0(x)$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 3 IV 1970

Ժ. Գ. ԱՓԻԿՅԱՆ

ԿՈՇՏ ԴՐՈՇՄԻ ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱՅՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է առաձգականության գծային տեսության դինամիկ խնդիր կիսահարթության համար, երբ նրա եզրի շարժվող հատվածում տրված են տեղափոխությունները։ Այդ հատվածից դուրս կիսահարթության եզրում լարումները բացակայում են։

Որոշված են առաձգական կիսահարթության եզրով գերձայնային արագությամբ շարժվող կոշտ դրոշմի առաջացրած տեղափոխությունները։

THE MOTION OF A RIGID PUNCH AT A SUPERSONIC SPEED ON AN ELASTIC HALF-PLANE

J. G. APIKIAN

S u m m a r y

The dynamic problem of the linear theory of elasticity on a half-plane, when displacements are given on the moving section of its border, is considered.

The displacements of the elastic half-plane due to the action of a punch, applied to its border and moving with a supersonic speed are determinated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Cole, J. Huth.* Stresses produced in a half plane by moving loads. J. of Applied mechanics, 1958, December, vol. 25, No. 4.
2. *Сабодаш П. Ф.* О поведении упругой полуплоскости при движении вдоль ее границы нормального импульса давления с постоянной скоростью. Материалы Всесоюзного симпозиума по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах. Баку, октябрь, 1964.