ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Ю. С. НШАНЯН

К ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ ПОЛУСФЕРЫ

Первыми исследованиями, посвященными задаче о равновесии упругой сферы являются работы Лямэ [1] и В. Томсона [2, 3]. В дальнейшем эта задача рассматривалась в работе Кри [4], который исследовал деформацию несжимаемого твердого шара под действием чисто радиальных поверхностных напряжений.

Эта задача рассматривалась также в работах К. Вебера [5], Е. Штернберга и Ф. Розенталя [6], В. Лейтерта [7] и других. В первых двух работах исследуется осесимметричная деформация упругой сферы, находящейся под действием сосредоточенных сил. В работе Лейтерта исследуется случай, когда сфера находится под действием собственного веса, который уравновешивается одной сосредоточенной силой, приложенной на поверхности сферы. Для нескольких случаев нагружения сплошной сферы решение дается в работах А. Лява [8], И. Снеддона и Берри [9].

Ряд задач для сплошной и полой сферы и сферической оболочки рассматривается в работах Б. Г. Галеркина [10], А. И. Лурье [11], [12], [13] и других.

Несколько контактных задач для сплошной сферы было исследовано в работах Н. Х. Арутюняна, Б. Л. Абрамяна и А. А. Баблояна [14—16]. Некоторые динамические контактные задачи для упругой сферы решены Н. Х. Арутюняном и А. А. Баблояном [17].

В данной работе рассматривается осесимметричная задача о деформации сплошной полусферы, когда на ее плоской поверхности отсутствует перемещение (жесткое закрепление).

Насколько нам известно, такая задача рассматривается впервые.

Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных уравнений, которая квази-вполне регулярна.

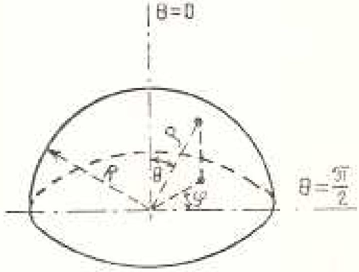
§ 1. Постановка и решение задачи

Рассмотрим задачу осесимметричной деформации упругой полусферы, когда на сферической поверхности заданы напряжения, а на плоской поверхности отсутствуют перемещения. Для простоты полагаем, что на поверхности сферы касательное напряжение отсутствует. Задачу будем решать в сферической системе координат ρ, θ, φ (фиг. 1). В такой постановке граничные условия задачи будут иметь вид

$$\tau_{\rho\theta}(R,\theta)=0, \quad \sigma_\rho(R,\theta)=\sigma^*(\theta) \quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.1}$$

$$U_\rho\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad U_\theta\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad (0\leqslant\rho\leqslant R) \tag{1.2}$$

Здесь U_ρ — радиальный, а U_θ — меридиальный компоненты перемещения, $\tau_{\rho\theta}$ и σ_ρ — соответственно касательное и нормальное напряжения, $\sigma^*(\theta)$ — кусочно-непрерывная функция с ограниченным изменением на указанном интервале, характеризующая закон распределения нормальных напряжений на поверхности упругой сферы.



Фиг. 1.

Для решения задачи пользуемся также условием осесимметричности задачи, т. е.

$$\tau_{\rho\theta}(\rho,0), \quad U_\theta(\rho,0)=0 \tag{1.3}$$

Уравнения равновесия в сферических координатах при наличии осевой симметрии и отсутствии массовых сил имеют вид [8]

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\sin\theta\,\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}+\mu\frac{\partial}{\partial\rho}(2\rho\omega_\varphi\sin\theta)=0\\ (\lambda+2\mu)\rho^2\sin\theta\,\frac{\partial\Delta}{\partial\rho}-\mu\frac{\partial}{\partial\theta}(2\rho\omega_\varphi\sin\theta)=0\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь λ и μ — упругие постоянные Ламэ, ω_φ — компонент вращения, Δ — объемное расширение

$$\begin{gathered}\omega_\varphi=\frac{1}{2\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho U_\theta)-\frac{\partial U_\rho}{\partial\theta}\right]\\ \Delta=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2U_\rho\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho U_\theta\sin\theta)\right]\end{gathered} \tag{1.5}$$

Решая уравнения (1.4) методом разделения переменных и переходя от координат ρ и θ к координатам

$$\xi=\cos\theta, \quad t=\ln\frac{\rho}{R} \tag{1.6}$$

можем перемещения U_ρ и U_θ представить суммой ряда и интеграла в следующем виде:

$$U_\rho = \gamma e^t - \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \left[nD_n e^{(n-1)t} + \frac{\lambda n + \mu(n-2)}{\lambda(n+3)+\mu(n+5)}(n+1)C_n e^{(n+1)t} \right] \times$$

$$\times P_n(\xi) - e^{\frac{t}{2}} \int_0^{\infty} \{ [Aw_1 - Bw_2 - (Dh_1 + Cg_1) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \sin t\tau - [Aw_2 +$$

$$+ Bw_1 - (Ch_1 - Dg_1) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \cos t\tau \} \left(\frac{9}{4} + \tau^2\right) d\tau \qquad (1.7)$$

$$U_\theta = \sum_{n=2,4\ldots}^{\infty} [D_n e^{(n-1)t} + C_n e^{(n+1)t}] \sqrt{1-\xi^2}\, P_n'(\xi) +$$

$$+ e^{\frac{t}{2}} \sqrt{1-\xi^2} \int_0^{\infty} \{ [Aw_3 - Bw_4 + CP'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \sin t\tau -$$

$$- [Aw_4 + Bw_3 - DP'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \cos t\tau \} d\tau \qquad (1.8)$$

Здесь γ, D_n, C_n, $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ — неопределенные коэффициенты и функции, подлежащие определению из граничных условий (1.1) — (1.3), $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра, $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$ — функция конуса [19].

Здесь использованы также следующие обозначения:

$$w_1(\xi, \tau) = \left(2\xi^2 - \frac{1}{2}\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi) - \frac{1+2\tau^2}{\frac{1}{4}+\tau^2}\, \xi(1-\xi^2) P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$$

$$w_2(\xi, \tau) = \tau(2\xi^2 - 1) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi) + \frac{\tau}{\tau^2 + \frac{1}{4}}\, \xi(1-\xi^2) P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$$

$$w_3(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{3}{2}\, w_1(\xi, \tau) - \tau w_2(\xi, \tau)\right] \qquad (19)$$

$$w_4(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\tau w_1(\xi, \tau) + \frac{3}{2}\, w_2(\xi, \tau)\right]$$

$$h_1(\tau) = \frac{\tau}{\tau^2 + \frac{9}{4}} \cdot \frac{(\lambda^* + 1)^2 \tau^2 + \frac{1}{4}(\lambda^* + 2)^2 - \frac{9}{2}(\lambda^* + 2) + \frac{1}{4}}{(\lambda^* + 2)^2\left(\tau^2 + \frac{25}{4}\right) + \tau^2 + \frac{1}{4}}$$

$$g_1(\tau)=$$

$$=\frac{1}{\tau^2+\frac{9}{4}}\,\frac{\left[\frac{5}{2}(\lambda^*+2)^2-\lambda^*-\frac{7}{2}\right]\tau^2+\frac{5}{8}(\lambda^*+2)^2+\frac{7}{2}(\lambda^*+2)-\frac{3}{8}}{(\lambda^*+2)^2\left(\tau^2+\frac{25}{4}\right)+\tau^2+\frac{1}{4}}$$

$$\lambda^*=\frac{\lambda}{\mu} \tag{1.9}$$

Пользуясь соотношениями (1.7), (1.8) и известными формулами, выражающими σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ через перемещения U_ρ, U_θ, получим

$$\sigma_\rho=\frac{3\lambda+2\mu}{R}\gamma-\frac{2\mu}{R}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\left[n(n-1)D_n e^{(n-2)t}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda(n^2-n-3)+\mu(n+1)(n-2)}{\lambda(n+3)+\mu(n+5)}(n+1)C_n e^{nt}\right]P_n(\xi)-\frac{2\mu}{R}e^{-\frac{t}{2}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\left\{\left[A\left(\frac{1}{2}w_1+\tau w_2\right)-B\left(\frac{1}{2}w_2-\tau w_1\right)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)(Cg_2+\right.\right.$$

$$\left.+Dh_2)\right]\sin t\tau-A\left(\frac{1}{2}w_2-\tau w_1\right)+B\left(\frac{1}{2}w_1+\tau w_2\right)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)(Dg_2-$$

$$\left.-Ch_2)\cos t\tau\right\}\left(\frac{9}{4}+\tau^2\right)d\tau \tag{1.10}$$

$$\tau_{\rho\theta}=\frac{\mu}{R}\sqrt{1-\xi^2}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\left[2(n-1)D_n e^{(n-2)t}+\frac{\lambda(n+2)+\mu(n^2+2n-1)}{\lambda(n+3)+\mu(n+5)}\times\right.$$

$$\left.\times C_n e^{nt}\right]P_n'(\xi)-\frac{2\mu}{R}e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{1-\xi^2}\int_0^\infty\left\{\left[3Aw_3+2Bw_2'\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(Cg_3+Dh_3)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\right]\sin t\tau+\left[2\tau Bw_4+(Ch_3-Dg_3)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\right]\cos t\tau\right\}d\tau \tag{1.11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$h_2(\tau)=\left(\frac{5}{4}\lambda^*+\frac{1}{2}\right)h_1-g_1\tau\left(\frac{1}{2}\lambda^*+1\right)$$

$$g_2(\tau)=\left(\frac{5}{4}\lambda^*+\frac{1}{2}\right)g_1+h_1\tau\left(\frac{1}{2}\lambda^*+1\right)$$

$$h_3(\tau)=\tau+h_1\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)$$

$$g_3(\tau) = \frac{1}{2} + g_1\left(\tau^2 + \frac{9}{4}\right)$$

§ 2. Определение постоянных интегрирования

Легко видеть, что выражениями (1.8) — (1.11) условия симметрии (1.3) удовлетворяются тождественно.

Заметим далее, что в выражениях для напряжений и перемещений имеем: по координате ξ разложение по полиномам Лежандра, а по координате t — по функциям вида

$$T_\tau(t) = e^{a_\tau t}\,(a_\tau \sin t\tau + b_\tau \cos t\tau)$$

Подобные функции были получены в работе А. А. Баблояна [19], где рассмотрен случай

$$a_\tau = \frac{1}{2} \qquad b_\tau = \pm\,\tau$$

При удовлетворении условий (1.1) пользуемся формулами интегральных преобразований по полиномам Лежандра и их производным.

Для того, чтобы удовлетворить условиям (1.2), полагаем $a_\tau = 0$ и проводим косинус-преобразование Фурье.

Проведя вышеуказанные преобразования и приравнивая соответствующие коэффициенты, определим постоянную и неизвестные функции γ, $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ через коэффициенты C_n, D_n.

Введя новые неизвестные X_n, Y_n, где

$$D_n = \frac{[\lambda^*(n^2-n-3)+(n+1)(n-2)]\,(n+1)\,Y_n + [\lambda^* n\,(n+2)+n^2+2n-1]\,X_n}{(n-1)\,[\lambda^*(n^3+2n^2-8n+5)+n^3-2n^2-5n-4]\,P_n(0)}$$

$$C_n = \frac{(2X_n - nY_n)\,[\lambda^*(n+3)+n+5]}{[\lambda^*(n^3+2n^2-8n+5)+n^3-2n^2-5n-4]\,P_n(0)} \tag{2.1}$$

Будем иметь

$$\gamma = -\tau_0\,\bar{c} + \bar{c}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}(a^*_{0,k}X_k - b^*_{0,k}Y_k) \tag{2.2}$$

$$A(\tau)\,A_0 = -\frac{1}{2}\gamma\,\Psi_0 + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}(H_k X_k - G_k Y_k) \tag{2.3}$$

$$B(\tau) = B_0(\tau)\,A(\tau);\quad C(\tau) = C_0(\tau)\,A(\tau),\quad D(\tau) = D_0(\tau)\,A(\tau) \tag{2.4}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_0(\tau) = (1+B_0^2)\left[w_2(0) + \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}\,(w_3(0)h_1 + w_4(0)\,g_1)\right]\left(\tau^2 + \frac{9}{4}\right)$$

$$B_0(\tau) = \frac{-\frac{1}{2}\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)+4\tau^3 h_1+g_1\left(\tau^4-\frac{9}{2}\tau^2-\frac{27}{16}\right)}{-\tau\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)+h_1\left(\tau^4-\frac{9}{2}\tau^2-\frac{27}{16}\right)-4\tau^3 g_1}$$

$$C_0(\tau)\,P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0) = -w_3(0)+B_0 w_4(0)$$

$$D_0(\tau)\,P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0) = w_4(0)+B_0 w_3(0)$$

$$\Psi_k = \frac{2k+1}{\pi\left[\tau^2+\left((k+\frac{1}{2}\right)^2\right]}$$

$$H_k(\tau) = \frac{2(k^2-1)\left[(\lambda^*+1)k-2\right]\Psi_k-k\left[k(k+2)(\lambda^*+1)-1\right]\Psi_{k+2}}{(k-1)\left[\lambda^*(2k^3-k^2-8k-5)+k^3-2k^2-5k-4\right]} \tag{2.5}$$

$$G_k(\tau) = \frac{(k-1)\left[(\lambda^*+1)k-2\right]\Psi_k-\left[(k+1)(k-2)+\lambda^*(k^2-k-3)\right]\Psi_{k+2}}{\lambda^*(2k^3-k^2-8k-5)+k^3-2k^2-5k-4]}\times$$

$$\times\frac{k\,(k+1)}{k-1}$$

$$M_n(\tau) = \frac{\pi\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)}{A_0(\tau)}\left|\frac{1}{2}J_2-\tau J_1+B_0\left(\frac{1}{2}J_1+\tau J_2\right)+C_0 h_2-\right.$$

$$\left.-D_0 g_2\right|\Psi_n P_n(0)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

$$a^*_{n,k} = \int_0^\infty H_k(\tau)\,M_n(\tau)\,d\tau, \qquad b^*_{n,k} = \int_0^\infty G_k(\tau)\,M_n(\tau)\,d\tau$$

для определения неизвестных X_k, Y_k получаем бесконечные системы линейных уравнений следующего вида:

$$X_n = -b_n - \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\left[a_{n,k}X_k - b_{n,k}Y_k\right]$$

$$Y_n = d_n + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\left[c_{n,k}X_k - d_{n,k}Y_k\right] \qquad (n=2,4,\cdots) \tag{2.6}$$

Свободные члены определяются из соотношений

$$b_n = P_n(0)\left[\sigma_n + \overline{c}\,\frac{\sigma_0}{2}\int_0^\infty M_n(\tau)\,\Psi_0(\tau)\,d\tau\right.$$

$$d_n = \frac{1}{2}\bar{c}\sigma_0 P_n(0)\int\limits_0^\infty L_n(\tau)\,\Psi_0(\tau)\,d\tau$$

а коэффициенты при неизвестных из соотношений

$$a_{n,k} = P_n(0)\left[a^*_{n,k} - \frac{1}{2}\bar{c}\,a^*_{0,k}\int\limits_0^\infty M_n(\tau)\,\Psi_0(\tau)\,d\tau\right]$$

$$b_{n,k} = P_n(0)\left[b^*_{n,k} - \frac{1}{2}\bar{c}\,b^*_{0,k}\int\limits_0^\infty M_n(\tau)\,\Psi_0(\tau)\,d\tau\right] \qquad (2.7)$$

$$c_{n,k} = P_n(0)\int\limits_0^\infty\left[H_k(\tau) - \frac{1}{2}\bar{c}\,a^*_{0,k}\Psi_0(\tau)\right]L_n(\tau)\,d\tau$$

$$d_{n,k} = P_n(0)\int\limits_0^\infty\left[G_k(\tau) - \frac{1}{2}\bar{c}\,b^*_{0,k}\Psi_0(\tau)\right]L_n(\tau)\,d\tau$$

где приняты следующие обозначения:

$$L_n(\tau) = \frac{\pi\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)}{A_0\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)}\left\{2\tau B_0\left(\frac{3}{2}J_2+\tau J_1\right) - C_0 h_3 + \right.$$

$$\left. + D_0 g_3\right\}\Psi_n(\tau)\,P_n(0)\,P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

$$J_1(n,\tau) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2}{\tau^2+\frac{1}{4}}\;\frac{\frac{5}{2}(l_n-\tau^2)\left(\tau^2+\frac{9}{20}\right)-4\tau^2}{(l_n-\tau^2)^2+16\tau^2}$$

$$J_2(n,\tau) = \tau\,\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2}{\tau^2+\frac{1}{4}}\;\frac{(l_n-\tau^2)\left(\tau^2-\frac{3}{4}\right)+10\left(\tau^2+\frac{9}{20}\right)}{(l_n-\tau^2)^2+16\tau^2}$$

$$\sigma_m = \frac{R}{2\mu}(2m+1)\int\limits_0^1 \sigma(\xi)\,P_m(\xi)\,d\xi \qquad (m=0,\,2,\ldots)$$

$$l_n = \left(n+\frac{5}{4}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)$$

Здесь повсюду имеем $k,\ n = 2,\ 4,\ldots$

Таким образом, решение рассмотренной задачи свелось к определению неизвестных коэффициентов X_k, Y_k из совокупности бесконечных систем линейных уравнений (2.6).

§ 3. Исследование бесконечной системы

Покажем, что система (2.6) квази-вполне регулярна в следующем смысле [20]:

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}\{|a_{n,k}|+|b_{n,k}|+|c_{n,k}|+|d_{n,k}|\}<\infty \quad \text{при } n=2,4,\ldots,N$$

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}\{|a_{n,k}|+|b_{n,k}|+|c_{n,k}|+|d_{n,k}|\}<1-\varepsilon \quad \text{при } n=N+2,\ N+4\ldots \tag{3.1}$$

$$\text{а} \qquad |b_n|+|d_n|<\infty \quad \text{при} \quad n=2,\ 4,\ \ldots$$

$$|b_n|+|d_n|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{3.2}$$

учитывая, что [21]

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth} a\pi-\frac{1}{a\pi}\right)$$

имеем

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}|H_k(\tau)|\leqslant\left(1+\frac{H_0}{N+2}\right)\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad H_0=\text{const}$$

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}|G_k(\tau)|\leqslant\left(1+\frac{G_0}{N+2}\right)\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad G_0=\text{const} \tag{3.3}$$

Оценивая ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)\,[P'_{2k+1}(0)\,]^2}{(2k+1)\,(2k+2)\left[\tau^2+\left(2k+\frac{3}{2}\right)^2\right]}=-\frac{P'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(0)}{\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

приведенный в работе [18], снизу и далее рассуждая аналогичным образом, получаем неравенство

$$\left|\frac{P'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}\right|\leqslant\frac{3}{2}\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Возвращаясь к обозначениям (2.7), будем иметь

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} |a^*_{n,k}| \leqslant \sum_{k=N+2}^{\infty} \int_0^{\infty} |M_n(\tau) H_k(\tau)| d\tau$$

Переставляя знак суммирования и интегрирования, что справедливо ввиду равномерной сходимости первого и абсолютной сходимости второго, используя неравенства (3.3) и (3.4), получим

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} |a^*_{n,k}| \leqslant P_n(0)\, M^*_0 \tag{3.5}$$

где M^*_0 представляется в виде несобственного интеграла вида

$$M^*_0 = \int_0^{\infty} \frac{Q(x)}{\chi(x)} dx$$

Здесь $Q(x)$, $\chi(x)$ — известные аналитические функции на всей действительной оси, причем для достаточно больших x имеет место неравенство

$$\left|\frac{Q(x)}{\chi(x)}\right| < \frac{Q_0}{|x|^{1+\varepsilon}}, \quad Q_0 = \text{const}$$

а $\chi(x)$ не имеет действительных нулей.

Как известно, в этом случае интеграл сходится и M^*_0 легко можно вычислить, например, зная вычеты подинтегральной функции в нулях $\chi(z)$.

Аналогично получим

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} \left| a^*_{0,k} \int_0^{\infty} M_n(\tau)\, \Psi_0(\tau)\, d\tau \right| < \Psi^*_0, \quad \Psi^*_0 = \text{const} \tag{3.6}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} |a_{n,k}| \sim \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad \text{при } n \to \infty$$

и ограничено при любом фиксированном n.

Повторяя вышеприведенные рассуждения относительно $b_{n,k}$, $c_{n,k}$, $d_{n,k}$, b_n, d_n, придем к искомым соотношениям (3.1) и (3.2).

Ереванский государственный
университет

Поступила 3 III 1970

ՅՈՒ. Ս. ՆՇԱՆՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱԳՆԴԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է կիսագնդի առանցքասիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդիրը, երբ նրա հարթ մակերևույթի վրա տեղափոխումները բացակայում են, իսկ գնդային մակերևույթի վրա կիրառված է կամայական նորմալ բեռ։

Տեղափոխումները ներկայացված են Լեժանդրի բազմանդամներ պարունակող շարքի և ընդհանրացված եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող անիսկական ինտեգրալի գումարի տեսքով։ Օգտագործելով համապատասխան շրջման բանաձևերը, խնդիրը բերվում է գծային հավասարումների երկու անվերջ սիստեմների լուծման։

Ցույց է տրված, որ ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմը կվազի-լիովին ռեգուլյար է, ընդ որում ազատ անդամները սահմանափակ են և ձգտում են զրոյի, երբ $n \to \infty$։

ON AN AXISYMMETRICAL DEFORMATION PROBLEM FOR AN ELASTIC HEMISPHERE

Y. C. NSHANIAN

S u m m a r y

In the present paper an axisymmetrical problem for a hemisphere is considered, when on the plane surface of the hemisphere the displacements are absent, and on the sphere surface the arbitrary normal stresses are acting.

The displacements are expressed by the sum of the series involving Legender Polynomials and the improper integral involving the generalized trigonometric functions. Using the respective transformation formulas, the problem is reduced to the solution of two infinite systems of linear equations.

The solution of the systems is shown to be quasi quite regular, and the free terms are limited from above and at $n \to \infty$ tend to zero.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lame G.* Lecons sur les coordonnees curvilingnes et leur diverses applications. Paris, 1859.
2. *Thomson W.* Note on the integration of the equation of equilibrium of an elastic solid. Cambr. and Dublin Math. Journal, vol. 3, 1848, 87—89.
3. *Thomson W.* Mathematical and phys. papers, vol. I, 1882, 97—99; vol. III, 1890, p. 351.

4. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. Transactions Cambridge Philos. Soc., vol. 14, 1889, 250—369.
5. *Weber C.* Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. ZAMM, Bd. 32, No. 6, 1952, 186—195.
6. *Штернберг Е., Розенталь Ф.* Упругая сфера, нагруженная сосредоточенными силами. Сб. сокращ. перев. иностр. лит., Механика, 1954, №1 (23).
7. *Leutert W.* The heavy sphere supported by a concentrated force. Pacific journal of Mathematics, vol. 1, No. 1, 1961, 97.
8. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
9. *Снеддон И.* и *Берри Д. С.* Классическая теория упругости. Физматгиз, М., 1961.
10. *Галеркин Б. Г.* Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ, т. 6, вып. 6, 1942.
11. *Лурье А. И.* Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ, т. 7, вып. 6, 1943.
12. *Лурье А. И.* Равновесие упругой полой сферы. ПММ, т. 17, вып. 3, 1953.
13. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
14. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, №3, 1964.
15. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
16. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
17. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух динамических задачах для упругой сферы. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965.
18. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого шара. ПММ, т. XXVI, вып. 3, 1962.
19. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости.' ПММ, т. 3, в. 4, 1967.
20. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
21. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядочных пространствах. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
22. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., ГИТТА, 1951.