ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 4, 1970 Механика

В. А. БАРАНЕНКО, Ю. М. ПОЧТМАН

# АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН И МЕМБРАН, СТЕСНЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Исследуются деформации упругих пластин и мембран при наличии ограничений на прогибы (контакт с абсолютно жесткой поверхностью). Указанные краевые задачи в вариационной постановке сводятся к нахождению функции, минимизирующей при заданных граничных условиях некоторый функционал и одновременно удовлетворяющей ограничениям типа неравенств. Для численной реализации задач на ЭЦВМ применяется один из современных методов исследования операций—динамическое программирование [1], в основе которого лежит „принцип оптимальности" Р. Беллмана применительно к многошаговому процессу принятия оптимальных решений. Данная работа является дальнейшим развитием работы авторов [2] на случай двумерных задач теории упругости.

1. При расчете изгибаемых поперечной нагрузкой пластин или мембран, взаимодействующих с абсолютно жесткой поверхностью произвольного очертания $z=f(x, y)$, ограничивающей их прогибы $w(x, y)$ (фиг. 1), возникает необходимость в интегрировании соответствующего бигармонического (или гармонического) уравнения вне областей контакта при наличии дополнительного условия

$$w(x, y)=f(x, y) \tag{1}$$

в областях контакта.

Наличие ограничения (1) значительно усложняет решение рассматриваемых краевых задач и, что особенно важно подчеркнуть, не позволяет привлечь к исследованию классические методы прикладной теории упругости. Ниже будет показано, что весьма эффективным для анализа и численного решения на современных ЭЦВМ с большим объемом памяти такого типа двумерных задач механики деформируемых тел оказывается один из методов теории оптимального управления—метод динамического программирования [1, 3].

Для того, чтобы интерпретировать указанные задачи как многошаговый процесс принятия оптимальных решений в динамическом программировании, необходимо сначала заменить исходную краевую задачу вариационной задачей [4] об отыскании функции, минимизирующей при заданных краевых условиях функционал потенциальной энергии пластины или мембраны и одновременно удовлетворяющей неравенству (1). Покажем применение динамического программирования к анализу деформированного состояния мембраны, стесненной ограничениями (развитие предлагаемой здесь методики на область расчета пластин, деформации которых стеснены подобными ограничениями, не связано с какими-либо принципиальными затруднениями).

2. Рассмотрим прямоугольную упругую мембрану, имеющую постоянное натяжение $F^*$ и загруженную произвольной поперечной нагрузкой $q(x, y)$. Мембрана закреплена по контуру $\Gamma$, который будет границей некоторой области $D$ (фиг. 1), расположенной в плоскости $Oxy$. Деформации мембраны ограничены снизу абсолютно жесткой поверхностью $f(x, y)$. Задача об отыскании прогибов мембраны $w(x, y)$ сводится к интегрированию (вне области контакта $D_0$ мембраны с $f(x, y)$ ) гармонического уравнения

$$\nabla^2 w = -\frac{q(x, y)}{F^*} \quad \text{в} \quad D - D_0 \tag{2}$$

где $\nabla^2$ — оператор Лапласа.

Кроме того, в области контакта $D_0$, естественно, должно выполняться условие $w(x, y) = f(x, y)$.


Фиг. 1.

Используя теорему о минимальном функционале [2] и вводя безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad f' = \frac{f}{F}, \quad w' = \frac{wF}{ql^2}$$

заменим решение этой краевой задачи решением вариационной задачи об определении функции $w(x, y)$, минимизирующей функционал потенциальной энергии мембраны (в дальнейшем штрихи условно опущены):

$$J = \iint\limits_D \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + q(x, y)\, w \right\} dxdy \tag{3}$$

и удовлетворяющей краевому условию $w|_{\Gamma}=0$ и неравенству

$$w(x, y) \leqslant f(x, y) \tag{4}$$

Для решения поставленной задачи методом динамического программирования в дискретной форме разобьем прямоугольную область $D$ сеткой с узлами в вершинах $(x_i, y_j)$ $i=0, 1, 2, \cdots, m$; $i=0, 1, 2, \cdots, n$. Значения функции $w(x, y)$ и ее производных будем вычислять только *в полученных узлах, т. е.*

$$w(x_i, y_j) = w_{ij}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{i,\, j+1} - w_{ij}}{\Delta y}$$

В этом случае задача о минимизации интеграла (3) заменится следующей: минимизировать функцию цели

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{ij}}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{w_{i,\, j+1} - w_{ij}}{\Delta y} \right)^2 \right] - \right.$$
$$\left. - q_{ij}\, w_{ij} \right\} \Delta x \Delta y, \tag{5}$$

при условии, что

$$w_{ij}\big|_{\Gamma} = 0 \tag{6}$$

и

$$w(x_i, y_j) \leqslant f(x_i, y_j) \quad \text{в } D. \tag{7}$$

Пусть $F_k(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1})$ — минимум $J$ по всем $w_{ij} \neq w_{ik}$ при условии, что процесс начинается в момент $k$ из состояния $|c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}|$ и продолжается до $k=(n-1)$ стадии при оптимальной стратегии, т. е.

$$F_k(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}) = \min_{\substack{\text{по всем} \\ w_{ij} \neq w_{ik}}} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left( \frac{w_{in} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right] - q_{ik}\, c_i \right\} \Delta x \Delta y \tag{8}$$

где $w_{ik} = c_i$ и удовлетворяют краевым условиям (6).

Тогда для поставленной задачи, согласно „принципу оптимальности" динамического программирования [3], функциональные уравнения запишутся в виде

$$F_k(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}) = \min_{\substack{\text{по всем} \\ w_{i,\, k+1}}} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \left( \frac{w_{i,\, k+1} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right] - q_{ik}\, c_i \right) \Delta x \Delta y + F_{k+1}(w_{1,\, k+1}, w_{2,\, k+1}, \cdots, w_{m-1,\, k+1}) \right\} \tag{9}$$

$k=0, 1, 2, \cdots, n-2$, где величины $w_{0,k}$, $w_{m,k}$, $w_{0,k+1}$, $w_{m,k+1}$ известны согласно (6).

Для $F_{n-1}$ имеем

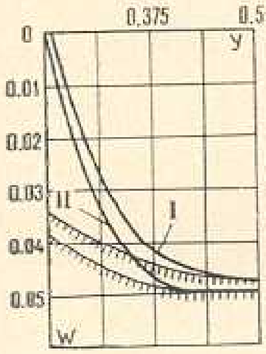
$$F_{n-1}(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_{i+1}-c_i}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{w_{in}-c_i}{\Delta y}\right)^2\right] - q_{ik}c_i\right)\Delta x\Delta y \tag{10}$$

при известных $w_{in}$, $w_{0,n-1}$, $w_{m,n-1}$.

Реализуя на ЭЦВМ алгоритм (9)—(10), находим с учетом (7) значения функции цели (5), а также искомые значения $w(x, y)$ в дискретных точках сеточной области $(x_i, y_j)$.

3. В качестве численного примера производился по приведенному выше алгоритму расчет на ЭЦВМ квадратной мембраны со стороной $l=1$, загруженной равномерно-распределенной нагрузкой интенсивностью $q=1$ для ограничения поверхностью параболоида

$$f(x, y) = 0.05\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 - 1\right]$$




Фиг. 2.

Так как известно [3], что при размерности вектора состояний больше трех реализация метода динамического программирования затруднительна, то исследуемая область аппроксимировалась прямоугольной сеткой с $m=4$ и $n=8$. В этом случае (9)—(10) запишутся в виде

$$F_k(c_1, c_2, c_3) = \min_{w_{i,k+1}}\left\{\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_{i+1}-c_i}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{w_{i,k+1}-c_i}{\Delta y}\right)^2\right] - c_i\right)\Delta x\Delta y + F_{k+1}(w_{1,k+1}, w_{2,k+1}, w_{3,k+1})\right\}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 6,$$

$$F_7(c_1, c_2, c_3) = \sum_{i=0}^{3} \left( \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{w_{i,3} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right] - c_i \right) \Delta x \Delta y$$

Результаты вычислений (форма упругой поверхности мембраны после деформации вне области контакта и в зоне контакта, а также собственно область контакта) представлены на фиг. 2. Кривыми I и II показаны прогибы мембраны соответственно в сечениях $X = 0.25$ и $X = 0.5$.

В заключение отметим, что предлагаемый алгоритм расчета может быть применен (на основе результатов, полученных в [5]) также для решения задачи о вдавливании абсолютно жесткого тела в упругую пластину или мембрану. Эта задача сводится к минимизации функционала (3) с $q = 0$ при соответствующих ограничениях на величины прогибов.

Днепропетровский
инженерно-строительный институт

Поступила 2 VII 1969

Վ. Ա. ԲԱՐԱՆԵՆԿՈ, Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ

## ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐՈՎ ԿԱՇԿԱՆԴՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ՄԵՄԲՐԱՆՆԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ ԱՆԱԼԻԶԸ՝ ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Հետազոտվում են առաձգական սալերի և մեմբրանների դեֆորմացիաները՝ նրանց ճկվածքների վրա սահմանափակումների առկայության դեպքում վարիացիոն դրվածքով եզրային խնդիրները բերվում են մի ֆունկցիայի գտնելուն, որը տրված եզրային պայմանների դեպքում մինիմալեցնում է ինչ-որ ֆունկցիոնալ և միաժամանակ բավարարում է անհավասարություններով արտահայտված սահմանափակումներին։ ЭЦВМ օգնությամբ խնդիրը լուծելու համար կիրառվում է դինամիկ ծրագրավորման մեթոդը։ Բերված է քառակուսի մեմբրանի հաշվարկի թվային օրինակ, երբ նրա դեֆորմացիաները սահմանափակված են բացարձակ կոշտ պարաբոլոիդի մակերևույթով։*

## ANALYSIS OF DEFORMATION STATE OF ELASTIC PLATES AND MEMBRANES, LIMITED BY RESTRICTIONS, BY DYNAMIC PROGRAMMING

V. A. BARANENKO, Yu. M. POCHTMAN

S u m m a r y

The contact problems for deflection forms of elastic plates and membranes, which are limited by restrictions, are considered. The said problems in variational aspect are reduced to the finding of func-

tions, minimizing at the established boundary conditions some functional and at the same time satisfying the limitations such as unequalities.

One of the modern methods of operations research-dynamic programming—is utilised for numerical realization of these problems by means of digital computers. For example, the deformation state of a square membrane, the deflections of which are limited by absolutely rigid paraboloidal surface, is investigated.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. Изд. Наука, 1965.
2. *Бараненко В. А., Почтман Ю. М.* Динамическое программирование и нелинейные задачи статики тонких стержней. Докл. АН СССР, т. 182, №5, 1968.
3. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. Изд. Мир, 1967.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Гостехтеориздат, 1957.
5. *Баничук Н. В.* Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями. Инж. ж., Механика твердого тела, №4, 1967.