ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 4, 1970 Механика

ДЖ. З. МКРТЧЯН

РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

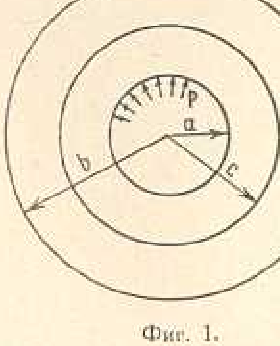
Рассматривается напряженное состояние полого цилиндра, состоящего из двух цилиндров, изготовленных из разномодульных материалов и соединенных с натягом. Внутренний цилиндр находится под действием равномерного внутреннего давления.

Рассмотренная задача решена для случаев обобщенного плоского напряженного состояния и плоской деформации.

Как и в работе [1], показано, что задача о плоской деформации в некоторых случаях может существенно отличаться от соответствующей задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии.

Получены формулы для определения нормальных напряжений и радиального перемещения. Определение радиусов окружностей, разделяющих области первого и второго родов [2, 3], приведено к решению трансцендентных уравнений.

§ 1. Рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние составного цилиндра, находящегося под действием равномерного внутреннего давления p. Размеры первого и второго цилиндров соответственно равны a, c и $c-\Delta$, b (фиг. 1). Цилиндры изготовлены из разномодульных материалов, характеризующихся упругими постоянными E_i^+, ν_i^+ (при растяжении) и E_i^-, ν_i^- — (при сжатии). Притом в дальнейшем для внутреннего цилиндра $i=1$, а для наружного $i=2$.



Фиг. 1.

Очевидно, что и рассматриваемой задаче, как и в случае обычного изотропного (одномодульного) материала, касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ отсутствует, а нормальные напряжения σ_r, σ_θ и радиальное перемещение u не зависят от полярного угла θ и являются функциями только от координаты r.

Как известно, для обычного материала (для областей первого рода) решение плоской задачи приводится к определению функции напряжений, которая для осесимметричных задач имеет следующий вид [5]:

$$\varphi = A_1 r + B_1 r^{-1} \tag{1.1}$$

Известно также [1, 4], что для областей второго рода соответствующая функция напряжений выражается формулой

$$\varphi = A_2 r^{\alpha} + B_2 r^{-\alpha}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{1.2}$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{E_i^{+}}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E_i^{-}} \quad \text{при} \quad \sigma_r < 0, \quad \sigma_\theta > 0 \tag{1.3}$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_i^{-}}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E_i^{+}} \quad \text{при} \quad \sigma_r > 0, \quad \sigma_\theta < 0 \tag{1.4}$$

Нормальные напряжения σ_r и σ_θ выражаются через функцию напряжений φ по формулам

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} \tag{1.5}$$

Радиальное перемещение определяется по формуле

$$u = \frac{r}{E_i^{\pm}} (\sigma_\theta - \nu_i^{\mp} \sigma_r) \tag{1.6}$$

где верхние индексы плюс и минус у постоянных E_i и ν_i соответствуют знаку напряжения σ_θ.

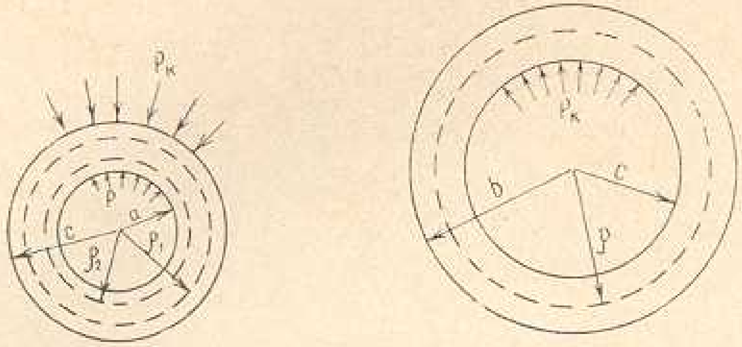
Входящие в (1.1) и (1.2) постоянные интегрирования A_i и B_i определяются из контурных условий и из условий непрерывности напряжений (перемещения) на границах раздела областей первого и второго родов.

После вставления первого цилиндра во второй, между ними возникает некоторое контактное давление p_k.

На первый цилиндр ($a \leqslant r \leqslant c$) действует внутреннее давление p и контактное давление p_k. На второй цилиндр ($c \leqslant r \leqslant b$) действует давление p_k (фиг. 2). Контактное давление определяется из следующего условия:

$$u\big|_{r=c+0} - u\big|_{r=c-0} = \Delta \tag{1.7}$$

I. Решим задачу для первого цилиндра. На внутренней ($r=a$) и внешней ($r=c$) окружностях цилиндра напряжение σ_r отрицательно, поэтому естественно, что во всей области ($a \leqslant r \leqslant c$) $\sigma_r < 0$.



Фиг. 2.

В зависимости от значений p и $\bar{p}_k(\Delta)$ для напряжения σ_θ возможны следующие варианты:

а) в рассматриваемой области σ_θ меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой пока неизвестной окружности $r=\rho$,

б) во всех точках рассматриваемой области $\sigma_\theta \geqslant 0$,

в) во всех точках $\sigma_\theta \leqslant 0$.

Эти случаи следует рассмотреть в отдельности.

В случае а) кольцо окружностью $r=\rho$ делится на две части. Первая часть ($a \leqslant r < \rho$) является областью второго рода, так как для всех точек этой части $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (1.2) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r=a \quad \sigma_r = -p, \quad \text{при } r=\rho \quad \sigma_\theta = 0 \tag{1.8}$$

Вторая часть ($\rho \leqslant r \leqslant c$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (1.1) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r=\rho \quad \sigma_\theta = 0, \quad \text{при } r=c \quad \sigma_r = -p_k \tag{1.9}$$

Удовлетворяя контурным условиям (1.8) и (1.9) с учетом (1.5), получим следующие выражения для нормальных напряжений σ_r и σ_θ:

для первой части ($a \leqslant r < \rho$)

$$\sigma_r = -\frac{pa^{\alpha_1+1}\left(r^{2\alpha_1}+\rho^{2\alpha_1}\right)}{r^{\alpha_1+1}\left(a^{2\alpha_1}+\rho^{2\alpha_1}\right)}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p\alpha_1 a^{\alpha_1+1}\left(\rho^{2\alpha_1}-r^{2\alpha_1}\right)}{r^{\alpha_1+1}\left(a^{2\alpha_1}+\rho^{2\alpha_1}\right)} \tag{1.10}$$

для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$)

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^2\left(r^2+\rho^2\right)}{r^2\left(\rho^2+c^2\right)}, \qquad \sigma_\theta = -\frac{p_k c^2\left(r^2-\rho^2\right)}{r^2\left(\rho^2+c^2\right)} \tag{1.11}$$

Радиус окружности $r = \rho$, на которой напряжение σ_θ обращается в нуль, определяется из условия

$$\sigma_r \Big|_{r=\rho-0} = \sigma_r \Big|_{r=\rho+0} \tag{1.12}$$

Из этого условия относительно величины ρ получим следующее трансцендентное уравнение:

$$x^{2\alpha_1} - k_1 (x^{\alpha_1 - 1} + x^{\alpha_1 + 1}) + m_1^{2\alpha_1} = 0 \tag{1.13}$$

где

$$m_1 = \frac{a}{c}, \qquad k_1 = \frac{p m_1^{\alpha_1+1}}{p_k}, \qquad x = \frac{\rho}{c} \tag{1.14}$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.13) в промежутке $m_1 < x < 1$ имеет единственное решение, если выполняется следующее неравенство:

$$\frac{2m_1^{\alpha_1+1}}{1+m_1^2} < k_1 < \frac{1+m_1^{2\alpha_1}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{2}{1+m_1^2} < \frac{p}{p_k} < \frac{1+m_1^{2\alpha_1}}{2m_1^{\alpha_1+1}} \tag{1.15}$$

Решим теперь задачу, предполагая, что во всей области $\sigma_\theta \geqslant 0$. В этом случае вся область $(a \leqslant r \leqslant c)$ будет областью второго рода, а для нее имеем функцию напряжения (1.2) и контурные условия

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \quad \text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_k \tag{1.16}$$

При этом, для напряжений получаем

$$\sigma_r = -\frac{p a^{\alpha_1+1} (c^{2\alpha_1} - r^{2\alpha_1}) + p_k c^{\alpha_1+1} (r^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1+1} (c^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_1 [p a^{\alpha_1+1} (c^{2\alpha_1} + r^{2\alpha_1}) - p_k c^{\alpha_1+1} (a^{2\alpha_1} + r^{2\alpha_1})]}{r^{\alpha_1+1} (c^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{1.17}$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$k_1 \geqslant \frac{1+m_1^{2\alpha_1}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_k} \geqslant \frac{1+m_1^{2\alpha_1}}{2m_1^{\alpha_1+1}} \tag{1.18}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда во всех точках области $\sigma_\theta \leqslant 0$. Тогда имеем функцию напряжений (1.1) при контурных условиях (1.14). Удовлетворяя этим условиям, для напряжений σ_r и σ_θ получим следующие выражения:

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^2 (r^2 - a^2) + p a^2 (c^2 - r^2)}{r^2 (c^2 - a^2)}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p_k c^2 (a^2 + r^2) - p a^2 (r^2 + c^2)}{r^2 (c^2 - a^2)} \tag{1.19}$$

Этот случай будет иметь место, если p и p_k удовлетворяют следующему неравенству:

$$k_1 \leqslant \frac{2m_1^{\alpha_1+1}}{1+m_1^2} \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_k} \leqslant \frac{2}{1+m_1^2} \tag{1.20}$$

II. Решим задачу для второго цилиндра ($c \leqslant r \leqslant b$). Имеем область второго рода, так как во всех точках области $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$. Для рассматриваемой области имеем функцию напряжений (1.2) при следующих контурных условиях:

$$\text{при } r=c \quad \sigma_r = -p_k, \quad \text{при } r=b \quad \sigma_r = 0 \tag{1.21}$$

Удовлетворяя этим условиям, для напряжений σ_r и σ_θ получим следующие выражения:

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^{\alpha_2+1}(b^{2\alpha_2}-r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(b^{2\alpha_2}-c^{2\alpha_2})}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_k \alpha_2 c^{\alpha_2+1}(b^{2\alpha_2}+r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(b^{2\alpha_2}-c^{2\alpha_2})} \tag{1.22}$$

III. В формулы для напряжений входит контактное давление p_k, величина которого определяется из условия (1.7).

Для случаев а) и в) условие (1.7), с учетом (1.6), будет

$$\frac{1}{E_2^+}(\sigma_\theta - \nu_2^+\sigma_r)\Big|_{r=c+0} - \frac{1}{E_1^-}(\sigma_\theta - \nu_1^-\sigma_r)\Big|_{r=c-0} = \frac{\Delta}{c} \tag{1.23}$$

а для случая б) будет

$$\frac{1}{E_2^+}(\sigma_\theta - \nu_2^+\sigma_r)\Big|_{r=c+0} - \frac{1}{E_1^+}(\sigma_\theta - \nu_1^+\sigma_r)\Big|_{r=c-0} = \frac{\Delta}{c} \tag{1.24}$$

Решая уравнения (1.23) и (1.24), для p_k получим следующие выражения:

для случая а)

$$p_k = \frac{\alpha_2}{M_1}\delta E_1^-(1+x^2)(1-m_2^{2\alpha_2}) \tag{1.25}$$

для случая б)

$$p_k = \frac{\alpha_2(1-m_2^{2\alpha_2})}{M_2}[\alpha_1\delta E_1^-(1-m_1^{2\alpha_1})+2pm_1^{\alpha_1+1}] \tag{1.26}$$

для случая в)

$$p_k = \frac{\alpha_2(1-m_2^{2\alpha_2})}{M_3}[\delta E_1^-(1-m_1^2)+2pm_1^2] \tag{1.27}$$

где

$$
\begin{aligned}
M_1 &= H_1(1+x^2)+\alpha_2(1-x^2)(1+m_2^{2\alpha_2})\\
M_2 &= \alpha_1 H_1(1-m_1^{2\alpha_1})+\alpha_2(1+m_1^{2\alpha_1})(1-m_2^{2\alpha_2})\\
M_3 &= H_1(1-m_1^2)+\alpha_2(1+m_1^2)(1-m_2^{2\alpha_2}) \qquad (1.28)\\
H_1 &= n(1+m_2^{2\alpha_2})+\alpha_2(n\nu_2^- -\nu_1^-)(1-m_2^{2\alpha_2})
\end{aligned}
$$

$$
\delta=\frac{\Delta}{c},\quad m_2=\frac{c}{b},\quad n=\frac{E_1^-}{E_2^-}
$$

Неравенства (1.15), (1.18) и (1.20) с учетом формул (1.25)—(1.27) соответственно примут следующий вид:

$$
\frac{2\alpha_2(1-m_2^{2\alpha_2})}{H_1(1+m_1^2)+\alpha_2(1-m_1^2)(1-m_2^{2\alpha_2})}<\frac{p}{\delta E_1^-}<\frac{\alpha_2(1+m_1^{2\alpha_1})(1-m_2^{2\alpha_2})}{2H_1 m_1^{\alpha_1+1}} \tag{1.29}
$$

$$
\frac{p}{\delta E_1^-}\geqslant\frac{\alpha_2(1+m_1^{2\alpha_1})(1-m_2^{2\alpha_2})}{2H_1 m_1^{\alpha_1+1}} \tag{1.30}
$$

$$
\frac{p}{\delta E_1^-}\leqslant\frac{2\alpha_2(1-m_2^{2\alpha_2})}{H_1(1+m_1^2)+\alpha_2(1-m_1^2)(1-m_2^{2\alpha_2})} \tag{1.31}
$$

При заданных значениях p и δ может выполниться одно из неравенств (1.29)—(1.31) и соответственно с этим для первого цилиндра получим один из рассмотренных выше случаев.

§ 2. Решим рассмотренную выше задачу для случая плоской деформации.

В этом случае, кроме напряжений σ_r и σ_θ, возникает также напряжение σ_z, которое для разномодульного материала определяется по формуле [1].

$$
\begin{aligned}
\sigma_z &= \nu_i^+(\sigma_r+\sigma_\theta) \quad \text{при} \quad \sigma_z>0\\
\sigma_z &= \nu_i^-(\sigma_r+\sigma_\theta) \quad \text{при} \quad \sigma_z<0
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Известно, что для областей первого рода функция напряжений φ для случая плоской деформации не отличается от соответствующей функции обобщенного плоского напряженного состояния и имеет вид (1.1).

Можно показать, что для областей второго рода для рассматриваемых здесь осесимметричных задач плоской деформации функция напряжений выражается следующими формулами:

при $\sigma_r<0,\ \ \sigma_\theta>0,\ \ \sigma_z<0$

$$
\varphi=A_2 r^{\beta_i}+B_2 r^{-\beta_i},\qquad \beta_i=\sqrt{\frac{\nu_i^+(1-\nu_{i-}^2)}{\nu_i^-(1-\nu_i^-\nu_i^+)}} \tag{2.2}
$$

при $\sigma_r<0,\ \ \sigma_\theta>0,\ \ \sigma_z>0$

$$
\varphi=A_3 r^{\gamma_i}+B_3 r^{-\gamma_i},\qquad \gamma_i=\sqrt{\frac{\nu_i^+}{\nu_i^-}\,\frac{(1-\nu_i^+\nu_i^-)}{(1-\nu_i^{+2})}} \tag{2.3}
$$

В этих формулах постоянные A_i и B_i определяются из контурных условий задачи и из условий непрерывности напряжений на границах раздела областей первого и второго родов.

1. Рассмотрим первый цилиндр ($a \leqslant r \leqslant c$), находящийся под действием давлений p и p_k. Очевидно, что для всех точек этого цилиндра $\sigma_r < 0$.

В зависимости от значений p и p_k (δ) для напряжений σ_θ и σ_z возможны следующие случаи:

1. в рассматриваемой области меняют свои знаки напряжения σ_θ и σ_z,

2. во всех точках области $\sigma_\theta \geqslant 0$, а σ_z меняет свой знак,

3. в области $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z \geqslant 0$,

4. в области $\sigma_\theta \geqslant 0$, $\sigma_z \leqslant 0$,

5. во всех точках $\sigma_z \leqslant 0$, а σ_θ меняет свой знак,

6. в области $\sigma_\theta \leqslant 0$, $\sigma_z < 0$.

Эти случаи следует рассмотреть в отдельности.

I. Напряжения σ_θ и σ_z меняют свои знаки, обращаясь в нуль соответственно на некоторых, пока неизвестных окружностях $r = \rho_1$ и $r = \rho_2$. Кольцо этими окружностями разделится на три части. Из формул (2.1) нетрудно заметить, что $\rho_2 < \rho_1$. Первая часть ($a \leqslant r \leqslant \rho_2$) является областью второго рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z \geqslant 0$. Для этой части имеем функцию напряжений (2.3) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \qquad \text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_z = 0 \tag{2.4}$$

Вторая часть ($\rho_2 < r < \rho_1$) также является областью второго рода, притом для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z < 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_z = 0, \qquad \text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_\theta = 0 \tag{2.5}$$

Третья часть ($\rho_1 \leqslant r \leqslant c$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$, $\sigma_z < 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (1.1) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_\theta = 0, \qquad \text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_k \tag{2.6}$$

Имеем также условие непрерывности напряжения σ_r (или перемещения u) на границах раздела этих частей

$$\sigma_r\big|_{r=\rho_2-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho_2+0}, \qquad \sigma_r\big|_{r=\rho_1-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho_1+0} \tag{2.7}$$

Удовлетворяя условиям (2.4), (2.5) и (2.6), получим следующие формулы для нормальных напряжений:

для первой части ($a \leqslant r \leqslant \rho_2$)

$$\sigma_r = -\frac{pa^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}\left[(\gamma_1+1)\rho_2^{2\gamma_1} + (\gamma_1-1)r^{2\gamma_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\gamma_1 a^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}\left[(\gamma_1+1)\rho_2^{2\gamma_1} + (1-\gamma_1)r^{2\gamma_1}\right]$$

$$\sigma_z = \frac{p\nu_1^+ a^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}(\gamma_1^2-1)(\rho_2^{2\gamma_1} - r^{2\gamma_1})$$

для второй части ($\rho_2 < r < \rho_1$)

$$\sigma_r = -\frac{p\gamma_1(\beta_1-1)a^{\gamma_1+1}\rho_2^{\gamma_1-\beta_1}}{N_1\beta_1 r^{\beta_1+1}}(r^{2\beta_1} + \rho_1^{2\beta_1})$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\gamma_1(\beta_1-1)a^{\gamma_1+1}\rho_2^{\gamma_1-\beta_1}}{N_1 r^{\beta_1+1}}(\rho_1^{2\beta_1} - r^{2\beta_1})$$

$$\sigma_z = -\frac{p\gamma_1\nu_1^-(\beta_1^2-1)a^{\gamma_1+1}\rho_2^{\gamma_1-\beta_1}}{N_1\beta_1 r^{\beta_1+1}}(r^{2\beta_1} - \rho_2^{2\beta_1}) \tag{2.8}$$

для третьей части ($\rho_1 \leqslant r \leqslant c$)

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^2(r^2+\rho_1^2)}{r^2(c^2+\rho_1^2)}, \qquad \sigma_\theta = -\frac{p_k c^2(r^2-\rho_1^2)}{r^2(c^2+\rho_1^2)}, \qquad \sigma_z = -\frac{2p_k\nu_1^- c^2}{c^2+\rho_1^2}$$

где

$$N_1 = (\gamma_1+1)\rho_2^{2\gamma_1} + (\gamma_1-1)a^{2\gamma_1} \tag{2.9}$$

Из (2.8) следует, что, чтобы в любой точке σ_r было отрицательным, необходимо, чтобы β_1 было больше единицы ($\beta_1 > 1$) или то же самое $\nu_1^+ > \nu_1^-$.

Из условий (2.7) после некоторых преобразований получим следующие уравнения для определения величин ρ_1 и ρ_2

$$x^{2\gamma_1} - kx^{\gamma_1-1}(1+x^2) + em_1^{2\gamma_1} = 0 \tag{2.10}$$

$$\rho_2 = \rho_1\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}\right)^{1/2\beta_1} \tag{2.11}$$

где

$$x = \frac{\rho_1}{c}, \qquad m_1 = \frac{a}{c}, \qquad d = \frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}, \qquad e = \frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}d^{-\frac{\gamma_1}{\beta_1}}$$

$$k = \frac{p}{p_k}\frac{\gamma_1(\beta_1+1)}{\beta_1(\gamma_1+1)}m_1^{\gamma_1+1}d^{\frac{\beta_1-\gamma_1}{2\beta_1}} \tag{2.12}$$

Для величин ρ_1 и ρ_2 имеем следующие очевидные неравенства $m_1 < \frac{\rho_2}{c} < x < 1$.

Преобразуя эти неравенства с учетом (2.11), получим следующие необходимые условия для выполнения этого случая:

$$\frac{\rho_2}{c} < \left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + 1}\right)^{1/2\beta_1}, \qquad m_1 < x\left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + 1}\right)^{1/2\beta_1} \tag{2.13}$$

Уравнение (2.10) в рассматриваемой области имеет единственное решение, если выполняются неравенства:

$$\frac{2\beta_1 d^{\frac{1-\beta_1}{2\beta_1}}}{(\beta_1 + 1)\left(m_1^2 + d^{\frac{1}{\beta_1}}\right)} < \frac{p}{p_k} < \frac{\beta_1(\gamma_1 + 1)\, d^{\frac{\gamma_1 - \beta_1}{2\beta_1}}}{2\gamma_1(\beta_1 + 1)\, m_1^{\gamma_1+1}}\left(1 + e m_1^{2\gamma_1}\right) \tag{2.14}$$

Неравенства (2.14) являются также достаточными условиями для выполнения этого случая.

2. В этом случае меняет знак только σ_z, обращаясь в нуль на некоторой пока неизвестной окружности $r = \rho$, а $\sigma_\theta \geqslant 0$. Кольцо окружностью $r = \rho$ разделится на две части. В любой точке кольца $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \geqslant 0$, напряжение же σ_z в одной части положительно, в другой отрицательно. В зависимости от значения β_1 (γ_1) возможны случаи:

а) в первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ $\sigma_z \geqslant 0$, во второй $(\rho \leqslant r \leqslant c)$ $\sigma_z \leqslant 0$

б) в первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ $\sigma_z \leqslant 0$, во второй $(\rho \leqslant r \leqslant c)$ $\sigma_z > 0$

В случае а) для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ имеем функцию напряжений (2.3) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \quad \text{при } r = \rho \quad \sigma_z = 0 \tag{2.15}$$

Для второй части $(\rho \leqslant r \leqslant c)$ имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho \quad \sigma_z = 0, \quad \text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_k \tag{2.16}$$

Удовлетворяя контурным условиям (2.15) и (2.16), получим следующие выражения для напряжений:

для первой части $(a \leqslant r < \rho)$

$$\sigma_r = -\frac{p a^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}\left[(1 + \gamma_1)\rho^{2\gamma_1} + (\gamma_1 - 1) r^{2\gamma_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\gamma_1 a^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}\left[(1 + \gamma_1)\rho^{2\gamma_1} - (\gamma_1 - 1) r^{2\gamma_1}\right] \tag{2.17}$$

$$\sigma_z = \frac{p\gamma_1 a^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}(\gamma_1^2 - 1)(\rho^{2\gamma_1} - r^{2\gamma_1})$$

для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$)

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^{\beta_1+1}}{N_2 r^{\beta_1+1}}\left[(\beta_1+1)\rho^{2\beta_1} + (\beta_1-1)r^{2\beta_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_k \beta_1 c^{\beta_1+1}}{N_2 r^{\beta_1+1}}\left[(\beta_1+1)\rho^{2\beta_1} - (\beta_1-1)r^{2\beta_1}\right] \tag{2.18}$$

$$\sigma_z = -\frac{p_k \nu_1^- c^{\beta_1+1}}{N_2 r^{\beta_1+1}}(\beta_1^2-1)(r^{2\beta_1} - \rho^{2\beta_1})$$

где

$$N_2 = (\beta_1+1)\rho^{2\beta_1} + (\beta_1-1)c^{2\beta_1} \tag{2.19}$$

Неизвестная величина ρ определяется из условия непрерывности напряжения σ_r на границе раздела двух частей

$$\sigma_r\Big|_{r=\rho-0} = \sigma_r\Big|_{r=\rho+0} \tag{2.20}$$

Учитывая (2.17) и (2.18), получим следующее уравнение относительно величины ρ:

$$p\gamma_1 m_1^{\gamma_1+1} x^{\gamma_1}\left[\beta_1(1+x^{2\beta_1}) - (1-x^{2\beta_1})\right] - p_k\beta_1 x^{\beta_1}\left[\gamma_1(m_1^{2\gamma_1}+x^{2\gamma_1}) + \right.$$
$$\left. + x^{2\gamma_1} - m_1^{2\gamma_1}\right] = 0 \tag{2.21}$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо, чтобы

$$\gamma_1 > \beta_1 > 1 \text{ или } \nu_1^+ > \nu_1^- \text{ и } x \geqslant \left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}\right)^{1/2\beta_1} \text{ или } x \geqslant d^{1/2\beta_1} \tag{2.22}$$

Можно показать, что уравнение (2.21) в промежутке $m_1 < x < 1$ имеет единственное решение, если выполняются неравенства

$$\frac{2\beta_1 m_1^{\beta_1-1}}{\beta_1 - 1 + m_1^{2\beta_1}(\beta_1+1)} < \frac{p}{p_k} < \frac{m_1^{2\gamma_1}(\gamma_1-1)+\gamma_1+1}{2\gamma_1 m_1^{\gamma_1+1}} \tag{2.23}$$

Рассмотрим теперь случай б).

В этом случае для первой части ($a \leqslant r \leqslant \rho$) имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия (2.15), для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$) имеем функцию напряжений (2.3) и контурные условия (2.16). При этом получим следующие выражения для напряжений:

для первой части ($a \leqslant r \leqslant \rho$)

$$\sigma_r = -\frac{p a^{\beta_1+1}}{N_3 r^{\beta_1+1}}\left[(1+\beta_1)\rho^{2\beta_1} - (1-\beta_1)r^{2\beta_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\beta_1 a^{\beta_1+1}}{N_3 r^{\beta_1+1}}\left[(1+\beta_1)\rho^{2\beta_1} + (1-\beta_1)r^{2\beta_1}\right] \tag{2.24}$$

$$\sigma_z = -\frac{p\nu_1^- a^{\beta_1+1}}{N_3 r^{\beta_1+1}}(1-\beta_1^2)(\rho^{2\beta_1} - r^{2\beta_1})$$

для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$)

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^{\gamma_1+1}}{N_4 r^{\gamma_1+1}}\left[(\gamma_1+1)\rho^{2\gamma_1} - (1-\gamma_1) r^{2\gamma_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_k \gamma_1 c^{\gamma_1+1}}{N_4 r^{\gamma_1+1}}\left[(\gamma_1+1)\rho^{2\gamma_1} + (1-\gamma_1) r^{2\gamma_1}\right] \tag{2.25}$$

$$\sigma_z = \frac{p_k \nu_1^+ c^{\gamma_1+1}}{N_4 r^{\gamma_1+1}}(1-\gamma_1^2)(r^{2\gamma_1} - \rho^{2\gamma_1})$$

где

$$N_3 = (1+\beta_1)\rho^{2\beta_1} - (1-\beta_1) a^{2\beta_1}, \quad N_4 = (1+\gamma_1)\rho^{2\gamma_1} - (1-\gamma_1) c^{2\gamma_1} \tag{2.26}$$

Удовлетворяя условию (2.20), получим следующее трансцендентное уравнение относительно величины ρ:

$$p m_1^{\beta_1+1}\beta_1 x^{\beta_1}\left[\gamma_1(1+x^{2\gamma_1}) - (1-x^{2\gamma_1})\right] - p_k\gamma_1 x^{\gamma_1}\left[\beta_1(m_1^{2\beta_1} + x^{2\beta_1}) + \right.$$
$$\left. + (x^{2\beta_1} - m_1^{2\beta_1})\right] = 0 \tag{2.27}$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо должно быть

$$\beta_1 < \gamma_1 < 1 \quad \text{или} \quad \nu_1^+ < \nu_1^- \quad \text{и} \quad m_1^{2\gamma_1} \geqslant \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \tag{2.28}$$

Уравнение (2.27) в промежутке $m_1 < x < 1$ имеет единственное решение, если отношение p/p_k удовлетворяет неравенству

$$\frac{\beta_1(1+m_1^{2\beta_1}) + (1-m_1^{2\beta_1})}{2\beta_1 m_1^{\beta_1+1}} < \frac{p}{p_k} < \frac{2\gamma_1 m_1^{\gamma_1-1}}{\gamma_1(1+m_1^{2\gamma_1}) - (1-m_1^{2\gamma_1})} \tag{2.29}$$

В случаях 3—6 напряжение σ_z сохраняет свой знак. Как показано в работе [1], если σ_z в рассматриваемой области не меняет свой знак, то решение задачи плоской деформации можно получить из соответствующего решения задачи обобщенного плоского напряженного состояния, заменяя упругие постоянные $E_i^{\pm}$, $\nu_i^{\pm}$ соответственно на $E_{i1}^{\pm}$, $\nu_{i1}^{\pm}$ по следующим формулам:

при $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z < 0$

$$E_{i1}^+ = \frac{E_i^+}{1-\nu_i^+\nu_i^-}, \qquad E_{i1}^- = \frac{E_i^-}{1-(\nu_i^-)^2}$$
$$\nu_{i1}^+ = \frac{\nu_i^+(1+\nu_i^-)}{1-\nu_i^-\nu_i^+}, \qquad \nu_{i1}^- = \frac{\nu_i^-}{1-\nu_i^-} \tag{2.30}$$

при $\sigma_r < 0,\ \sigma_\theta > 0,\ \sigma_z > 0$

$$E_{i2}^{+} = \frac{E_i^{+}}{1-(\nu_i^{+})^2}, \qquad E_{i2}^{-} = \frac{E_i^{-}}{1-\nu_i^{-}\nu_i^{+}}$$
$$\nu_{i2}^{+} = \frac{\nu_i^{+}}{1-\nu_i^{+}}, \qquad \nu_{i2}^{-} = \frac{\nu_i^{-}(1-\nu_i^{+})}{1-\nu_i^{+}\nu_i^{-}} \tag{2.31}$$

Для областей же первого рода формулы перехода будут

$$E_{i3} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}, \qquad \nu_{i3} = \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \tag{2.32}$$

с соответствующими верхними индексами $+$ или $-$ при коэффициентах.

Исходя из этого, в случаях 3—6 при определении напряжений будем пользоваться соответствующими результатами для плоского напряженного состояния, приведенными в § 1. Имея выражения для σ_r и σ_θ, из (2.1) можно определить напряжение σ_z.

В случае 3 имеем область второго рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$ и $\sigma_z \geqslant 0$. Поэтому выражения для σ_r и σ_θ получатся из (1.17) с использованием замены постоянных по (2.31).

При этом для σ_z получим

$$\sigma_z = \frac{\nu_1^{+}}{r^{\gamma_1+1}(c^{2\gamma_1}-a^{2\gamma_1})}\{pa^{\gamma_1+1}[\gamma_1(c^{2\gamma_1}+r^{2\gamma_1})-c^{2\gamma_1}+r^{2\gamma_1}]-$$
$$-p_k c^{\gamma_1+1}[r^{2\gamma_1}-a^{2\gamma_1}+\gamma_1(r^{2\gamma_1}+a^{2\gamma_1})]\} \tag{2.33}$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно

а) при $\beta_1 > 1$ $(\nu_1^{+} > \nu_1^{-})$

$$\frac{p}{p_k} \geqslant \frac{\gamma_1(1+m_1^{2\gamma_1})+1-m_1^{2\gamma_1}}{2\gamma_1 m_1^{\gamma_1+1}} \tag{2.34}$$

б) при $\beta_1 < 1$ $(\nu_1^{+} < \nu_1^{-})$

$$m_1^{2\gamma_1} > \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}, \qquad \frac{p}{p_k} \geqslant \frac{2\gamma_1 m_1^{\gamma_1-1}}{\gamma_1(1+m_1^{2\gamma_1})-(1-m_1^{2\gamma_1})} \tag{2.35}$$

4. В этом случае опять имеем область второго рода, притом для любой точки рассматриваемой области $(a \leqslant r \leqslant c)$ $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \geqslant 0$, $\sigma_z \leqslant 0$.

Выражения для σ_r и σ_θ получим из соответствующих формул (1.17), используя формулы замены постоянных (2.30).

Отметим, что необходимым и достаточным условием для этого случая будет:

а) при $\beta_1 > 1$ $(\nu_1^{+} > \nu_1^{-})$

$$\frac{1+m_1^{2\beta_1}}{2m_1^{\beta_1+1}} \leqslant \frac{p}{p_k} \leqslant \frac{2\beta_1 m_1^{\beta_1-1}}{\beta_1-1+(\beta_1+1)m_1^{2\beta_1}}, \qquad m_1^{2\beta_1} > \frac{\beta_1-1}{1+\beta_1} \tag{2.36}$$

б) при $\beta_1 < 1$ $(\nu_1^+ < \nu_1^-)$

$$\frac{1+m_1^{2\beta_1}}{2m_1^{\beta_1+1}} \leqslant \frac{p}{p_k} \leqslant \frac{(1+\beta_1)-(1-\beta_1)\,m_1^{2\beta_1}}{2\beta_1 m_1^{\beta_1+1}} \tag{2.37}$$

5. Во всех точках области $\sigma_z \leqslant 0$, а σ_θ меняет свой знак, обращаясь в нуль на окружности $r=\rho$. В этом случае выражение для напряжений σ_r и σ_θ получим из соответствующих формул (1.10) и (1.11), используя замену постоянных (2.30). Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$m_1 > x\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}\right)^{\frac{1}{2\beta_1}}, \qquad \frac{2}{1+m_1^2} < \frac{p}{p_k} < \frac{1+m_1^{2\beta_1}}{2m_1^{\beta_1+1}} \tag{2.38}$$

6. В этом случае имеем область первого рода, так как $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$, $\sigma_z < 0$. Выражения для σ_r и σ_θ получим из формул (1.19). Необходимое и достаточное условие для этого случая будет

$$\frac{p}{p_k} \leqslant \frac{2}{1+m_1^2} \tag{2.39}$$

II. Рассмотрим теперь второй цилиндр ($c \leqslant r \leqslant b$). Очевидно, что для любой точки этого цилиндра $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Для напряжения σ_z возможны два случая:

1. в рассматриваемой области $\sigma_z \geqslant 0$,
2. в области σ_z меняет свой знак.

В первом случае имеем область второго рода, так как $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z \geqslant 0$. Ввиду того, что в области σ_z не меняет свой знак, выражение для σ_r и σ_θ получим из (1.22), используя формулы замены упругих постоянных по (2.31). Напряжение же σ_z, как и выше, определяется по формуле (2.1). Необходимое и достаточное условие, при котором имеет место этот случай, будет

$$m_2 \geqslant \left(\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2+1}\right)^{\frac{1}{2\gamma_2}}, \qquad m_2 = \frac{c}{b} \tag{2.40}$$

Рассмотрим теперь случай 2. В этом случае напряжение σ_z меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой пока неизвестной окружности $r=\rho$. Область этой окружностью делится на две части. Первая часть ($c \leqslant r \leqslant \rho$) является областью второго рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z \leqslant 0$. Для этой части имеем функцию напряжений (2.3) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r=c \quad \sigma_r = -p_k, \qquad \text{при } r=\rho \quad \sigma_z = 0 \tag{2.41}$$

Вторая часть ($\rho \leqslant r \leqslant b$) также является областью второго рода, притом $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z \geqslant 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия

$$\text{при } r=\rho \quad \sigma_z=0, \quad \text{при } r=b \ \sigma_r=0 \tag{2.42}$$

На границе раздела этих частей имеем условие непрерывности радиального напряжения

$$\sigma_z \Big|_{r=\rho-0} = \sigma_r \Big|_{r=\rho+0} \tag{2.43}$$

Удовлетворяя условиям (2.41)—(2.43), получим следующие выражения для напряжений:

для первой части $(c \leqslant r \leqslant \rho)$

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^{\beta_2+1}}{N_5 r^{\beta_2+1}} \left[(\beta_2-1) r^{2\beta_2} + (\beta_2+1)\rho^{2\beta_2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_k \beta_2 c^{\beta_2+1}}{N_5 r^{\beta_2+1}} \left[(\beta_2+1)\rho^{2\beta_2} - (\beta_2-1) r^{2\beta_2}\right]$$

$$\sigma_z = -\frac{p_k \nu_2^- c^{\beta_2+1}}{N_5 r^{\beta_2+1}} (1-\beta_2^2)(\rho^{2\beta_2} - r^{2\beta_2})$$

для второй части $(\rho < r \leqslant b)$

$$\sigma_r = -\frac{p_k \beta_2 c^{\beta_2+1} \rho^{\beta_2-\gamma_2}}{N_5 \gamma_2 r^{\gamma_2+1}} \left[(1+\gamma_2)\rho^{2\gamma_2} - (1-\gamma_2) r^{2\gamma_2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_k \beta_2 c^{\beta_2+1} \rho^{\beta_2-\gamma_2}}{N_5 r^{\gamma_2+1}} \left[(1+\gamma_2)\rho^{2\gamma_2} + (1-\gamma_2) r^{2\gamma_2}\right]$$

$$\sigma_z = \frac{p_k \nu_2^+ \beta_2 (1-\gamma_2^2) c^{\beta_2+1} \rho^{\beta_2-\gamma_2}}{N_5 \gamma_2 r^{\gamma_2+1}} (r^{2\gamma_2} - \rho^{2\gamma_2}) \tag{2.44}$$

где

$$N_5 = \rho^{2\beta_2} - c^{2\beta_2} + \beta_2(\rho^{2\beta_2} + c^{2\beta_2}) \tag{2.45}$$

При этом получим также следующее выражение для ρ:

$$\rho = b\left(\frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2\gamma_2}} \tag{2.46}$$

Из (2.46) следует: чтобы имел место рассмотренный случай, необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$m_2 < \left(\frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2\gamma_2}} \tag{2.47}$$

Сравнивая неравенства (2.40) и (2.47), замечаем, что при заданных значениях m_2 и γ_2 может выполниться одно из этих неравенств и соответственно с этим может иметь место или случай 1 или случай 2.

III. Контактное давление p_k определяется из уравнения (1.7). Входящее в (1.7) радиальное перемещение u определяется по формуле

$$u = \frac{r}{E_i^\pm}\left[\sigma_\theta - \nu_i^\pm(\sigma_r + \sigma_z)\right] \tag{2.48}$$

где верхние индексы у постоянных соответствуют знаку напряжения σ_θ.

Поскольку в рассмотренных выше случаях выражения для одних и тех же напряжений разные, поэтому для определения величины p_k необходимо рассмотреть сочетания каждого из случаев для второго цилиндра со всеми случаями для первого цилиндра.

Рассмотрим I случай для второго цилиндра в сочетании со всеми приведенными выше случаями для первого цилиндра. Решая уравнение (1.7), с учетом (2.48), для каждого случая первого цилиндра соответственно получим следующие выражения для p_k:

$$
\begin{aligned}
&1. && p_k = \frac{\delta E_1^-}{M_2}(1+x^2) \\
&2а. && p_k = \frac{\delta E_1^+ N_2}{M_3 c^{2\beta_1}} \\
&2б. && p_k = \frac{\delta E_1^+ N_4}{M_4 c^{2\gamma_1}} \\
&3. && p_k = \frac{\delta E_1^+ (1-m_1^{2\gamma_1})}{M_5} + \frac{2\gamma_1}{M_5} p m_1^{\gamma_1+1}[1-(\nu_1^+)^2] \\
&4. && p_k = \frac{\delta E_1^+}{M_6}(1-m_1^{2\beta_1}) + \frac{2\beta_1 p m_1^{\beta_1+1}}{M_6}(1-\nu_1^+\nu_1^-) \\
&5. && p_k = \frac{\delta E_1^-}{M_7}(1+x^2) \\
&6. && p_k = \frac{\delta E_1^-}{M_8}(1-m_1^2) + \frac{2pm_1^2}{M_8}[1-(\nu_1^-)^2]
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

где

$$
\begin{aligned}
M_2 &= (1+x^2)H_2 + (1+\nu_1^-)(1-2\nu_1^- - x^2) \\
M_3 &= \frac{H_2 N_2 \alpha_1^2}{c^{2\beta_1}} - (\beta_1+1)x^{2\beta_1}[\beta_1(1-\nu_1^-\nu_1^+) + \nu_1^+(1+\nu_1^-)] + \\
&\quad + (\beta_1-1)[\beta_1(1-\nu_1^-\nu_1^+) - \nu_1^+(1+\nu_1^-)] \\
M_4 &= \frac{H_2 N_4 \alpha_1^2}{c^{2\gamma_1}} - (1+\nu_1^+)\{(\gamma_1+1)x^{2\gamma_1}[\gamma_1(1-\nu_1^+) + \nu_1^+] + \\
&\quad + (1-\gamma_1)[\gamma_1(1-\nu_1^+) - \nu_1^+]\} \\
M_5 &= H_2\alpha_1^2(1-m_1^{2\gamma_1}) + (1+\nu_1^+)\{\gamma_1(1-\nu_1^+) - \nu_1^+ + m_1^{2\gamma_1}[\gamma_1(1-\nu_1^+) + \nu_1^+]\} \\
M_6 &= H_2\alpha_1^2(1-m_1^{2\beta_1}) + \beta_1(1-\nu_1^+\nu_1^-) - \nu_1^+(1+\nu_1^-) + \\
&\quad + m_1^{2\beta_1}[\beta_1(1-\nu_1^+\nu_1^-) + \nu_1^+(1+\nu_1^-)] \\
M_7 &= H_2(1+x^2) + (1+\nu_1^-)(1-2\nu_1^- - x^2) \\
M_8 &= H_2(1-m_1^2) + (1+\nu_1^-)(1-2\nu_1^- + m_1^2)
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

$$H_2 = \frac{E_1^-\,(1+\nu_2^+)}{E_2^+\,(1-m_2^{2\gamma_2})}\,\{m_2^{2\gamma_2}[\gamma_2(1-\nu_2^+)-\nu_2^+] + \gamma_2(1-\nu_2^+)+\nu_2^+\}$$

Необходимые и достаточные условия, при которых может иметь место один из рассмотренных случаев 1—6, с учетом формул (2.49), соответственно примут следующий вид:

1. $\beta_1 > 1 \quad (\nu_1^+ > \nu_1^-), \quad m_1 < x d^{1/2\beta_1}, \quad t_1 < \dfrac{p}{\delta E_1^-} < t_2$

2а. $\beta_1 > 1, \quad x > d^{1/2\beta_1}, \quad t_3 < \dfrac{p}{\delta E_1^-} < t_4$

2б. $\beta_1 < 1 \; (\nu_1^+ < \nu_1^-), \quad x^{2\gamma_1} > \dfrac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}, \quad t_5 < \dfrac{p}{\delta E_1^-} < t_6$

3а. $\beta_1 > 1, \quad \dfrac{p}{\delta E_1^-} \geqslant t_4$

3б. $\beta_1 < 1, \quad \dfrac{p}{\delta E_1^-} \geqslant t_6$

4а. $\beta_1 > 1, \quad m_1 > d^{1/2\beta_1}, \quad t_7 \leqslant \dfrac{p}{\delta E_1^-} \leqslant t_3$

4б. $\beta_1 < 1, \quad t_7 \leqslant p/\delta E_1^- \leqslant t_5$ (2.51)

5. $m_1 > x d^{1/2\beta_1}, \quad t_8 < \dfrac{p}{\delta E_1^-} < t_7$

6. $0 \leqslant p/\delta E_1^- \leqslant t_8$

где

$$t_1 = \frac{d^{\frac{1-\beta_1}{2\beta_1}}\,(d+1)}{H_2\,(m_1^2 + d^{1/\beta_1}) + (1+\nu_1^-)[(1-2\nu_1^-)\,d^{1/\beta_1} - m_1^2]}$$

$$t_2 = \frac{\beta_1\,(1+\gamma_1)\,(1+e m_1^{2\gamma_1})\,d^{\frac{\gamma_1-\beta_1}{2\beta_1}}}{2\gamma_1\,(1+\beta_1)\,[H_2 - \nu_1^-\,(1+\nu_1^-)]\,m_1^{1+\gamma_1}}$$

$$t_3 = \frac{\alpha_1^2 m_1^{\beta_1-1}\,(d+1)}{H_2\alpha_1^2\,(d+m_1^{2\beta_1}) + l_1} \qquad (2.52)$$

$$t_4 = \frac{\alpha_1^2[\gamma_1+1+(\gamma_1-1)\,m_1^{2\gamma_1}]}{2\gamma_1[\alpha_1^2 H_2 - (1+\nu_1^+)]\,m_1^{\gamma_1+1}}$$

$$t_5 = \frac{\alpha_1^2\,(1+\beta_1)\,(1+d m_1^{2\beta_1})}{2\beta_1\,[H_2\alpha_1^2 - (1+\nu_1^+)]\,m_1^{\beta_1+1}}$$

$$t_6 = \frac{2\gamma_1 \alpha_1^2 m_1^{\gamma_1 - 1}}{H_2 \alpha_1^2 [\gamma_1 - 1 + (\gamma_1 + 1) m_1^{2\gamma_1}] - l_2}$$

$$t_7 = \frac{1 + m_1^{2\beta_1}}{2 m_1^{\gamma_1 + 1} [H_2 - \nu_1^- (1 + \nu_1^-)]}$$

$$t_8 = \frac{2}{H_2 (1 + m_1^2) + (1 + \nu_1^-)(1 - m_1^2 - 2\nu_1^-)}$$

$$l_1 = d[\beta_1 (1 - \nu_1^- \nu_1^+) - \nu_1^+ (1 + \nu_1^-)] - m_1^{2\beta_1} [\beta_1 (1 - \nu_1^- \nu_1^+) + \nu_1^+ (1 + \nu_1^-)]$$

$$l_2 = (1 + \nu_1^+) \{ m_1^{2\gamma_1} (1 + \gamma_1) [\gamma_1 (1 - \nu_1^+) + \nu_1^+] + (1 - \gamma_1) [\gamma_1 (1 - \nu_1^+) - \nu_1^+] \}$$

Нетрудно показать, что при любых значениях m_1, $\nu_1^{\pm}$ и H_2 и при выполнении для каждого случая необходимых условий для t_i имеют место следующие неравенства:

при $\beta_1 > 1$ $\qquad 0 < t_8 < t_1 < t_7 < t_3 < t_2 < t_4$

при $\beta_1 < 1$ $\qquad 0 < t_8 < t_7 < t_5 < t_6$

Из неравенств (2.51) заключаем, что при заданных величинах p, δ, заданных размерах и материалах цилиндров выполняется одно из этих неравенств и соответственно с этим имеем один из рассмотренных выше случаев 1—6.

Аналогичным образом можно рассмотреть также случай 2 для второго цилиндра со всеми случаями первого цилиндра.

Приведем результаты числовых вычислений, иллюстрирующие распределение напряжений для некоторых вариантов, рассмотренных выше.

Поскольку при решении поставленной задачи для внутреннего цилиндра по сравнению с внешним получается гораздо больше различных вариантов, при выполнении числовых вычислений принято, что внешний цилиндр изготовлен из обычного (одномодульного) материала и напряжения вычислены только для точек внутреннего цилиндра.

Для внешнего цилиндра принято $m_2 = 0.8$ и $\nu_2^+ = \nu_2^- = 0.3$. Достаточные условия для случаев а), б) и в) обобщенного плоского напряженного состояния соответственно напишем в виде

$$a_1 < \frac{p}{\delta E_1^-} < a_2, \qquad \frac{p}{\delta E_1^-} \geqslant a_2, \qquad \frac{p}{\delta E_1^-} \leqslant a_1$$

где a_1 и a_2 определяются по формулам (1.29) - (1.31). При вычислении напряжений для отношения $\frac{p}{\delta E_1^-}$ приняты следующие значения: для случая а) $\frac{p}{\delta E_1^-} = \frac{a_1 + a_2}{2}$, для случая б) $\frac{p}{\delta E_1^-} = 2a_2$, для случая в) $\frac{p}{\delta E_1^-} = 0.5\,\alpha_1$, которые удовлетворяют указанным выше достаточным условиям.

Напряжения σ_r, σ_θ и σ_z представим в виде

$$\sigma_r = -K_1 p, \quad \sigma_\theta = K_2 p, \quad \sigma_z = K_3 p$$

где значения K_1, K_2 и K_3, как видно из приведенных выше формул, зависят от материала внутреннего цилиндра (ν_1^-), от его размеров (m_1) и от безразмерной координаты $z = \frac{r}{c}$.

В табл. 1 приведены значения функций K_1 и K_2 для обобщенного плоского напряженного состояния при некоторых значениях α_1 и при $m_1 = 0.5$, $\frac{E_1^-}{E_2^-} = 2$.

Таблица 1

$m_1 = 0.5$

	$\alpha_1=0.5$ $\nu_1^-=0.4$ $a_1=0.1614$ $a_2=0.2278$			$\alpha_1=1.0$ $\nu_1^-=0.25$ $a_1=0.1590$ $a_2=0.2642$			$\alpha_1=2.0$ $\nu_1^-=0.1$ $a_1=0.1567$ $a_2=0.2994$		
	z	K_1	K_2	z	K_1	K_2	z	K_1	K_2
Случай а)	0.500	1.000	0.116	0.500	1.000	0.453	0.500	1.000	1.550
	0.600	0.819	0.059	0.605	0.770	0.223	0.613	0.620	0.689
	0.700	0.696	0.023	0.710	0.634	0.087	0.725	0.454	0.255
	0.801	0.608	0.000	0.815	0.547	0.000	0.838	0.377	0.000
	0.867	0.567	−0.045	0.877	0.510	−0.0372	0.892	0.355	−0.022
	0.934	0.523	−0.080	0.938	0.480	−0.0673	0.946	0.336	−0.041
	1.000	0.499	−0.109	1.000	0.455	−0.0919	1.000	0.321	−0.056
Случай б)	0.500	1.000	0.572	0.500	1.000	1.053	0.500	1.000	2.002
	0.625	0.703	0.415	0.625	0.630	0.684	0.625	0.512	1.026
	0.750	0.525	0.321	0.750	0.430	0.483	0.750	0.296	0.594
	0.875	0.409	0.259	0.875	0.309	0.362	0.875	0.186	0.375
	1.000	0.328	0.215	1.000	0.230	0.283	1.000	0.124	0.252
Случай в)	0.500	1.000	−1.505	0.500	1.000	−1.507	0.500	1.000	−1.509
	0.625	1.091	−1.414	0.625	1.091	−1.416	0.625	1.092	−1.417
	0.750	1.140	−1.365	0.750	1.141	−1.366	0.750	1.141	−1.368
	0.875	1.170	−1.335	0.875	1.171	−1.336	0.875	1.171	−1.338
	1.000	1.189	−1.315	1.000	1.190	−1.317	1.000	1.191	−1.318

В табл. 2 и 3 приведены значения функций K_1, K_2 и K_3 для случаев 1, 2а и 2б плоской деформации при некоторых значениях координаты z и параметров ν_1^+ и m_1.

Таблица 2

Случай 1

$\nu_1^- = 0.05 \quad \nu_1^+ = 0.44 \quad m_1 = 0.5$
$t_1 = 0.1898 \quad t_2 = 1.0294$

z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	3.058	0.908
0.587	0.535	1.440	0.399
0.674	0.335	0.671	0.148
0.761	0.246	0.246	0.000
0.792	0.229	0.153	−0.004
0.823	0.216	0.0717	−0.007
0.854	0.207	0.000	−0.010
0.903	0.196	−0.011	−0.010
0.951	0.187	−0.020	−0.010
1.000	0.179	−0.028	−0.010

$\nu_1^- = 0.1 \quad \nu_1^+ = 0.4 \quad m_1 = 0.5$
$t_1 = 0.2246 \quad t_2 = 0.4969$

z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	1.695	0.278
0.551	0.776	1.165	0.155
0.602	0.628	0.796	0.067
0.653	0.528	0.528	0.000
0.719	0.442	0.296	−0.015
0.786	0.387	0.128	−0.026
0.852	0.352	0.000	−0.035
0.901	0.334	−0.019	−0.035
0.951	0.318	−0.035	−0.035
1.000	0.304	−0.048	−0.035

$\nu_1^- = 0.2 \quad \nu_1^+ = 0.45 \quad m_1 = 0.5$
$t_1 = 0.2865 \quad t_2 = 0.3695$

z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	1.145	0.065
0.518	0.928	1.019	0.041
0.536	0.864	0.907	0.019
0.554	0.808	0.808	0.000
0.675	0.562	0.380	−0.036
0.795	0.439	0.145	−0.059
0.915	0.372	0.000	−0.074
0.944	0.361	−0.011	−0.074
0.972	0.351	−0.021	−0.074
1.000	0.342	−0.030	−0.074

$\nu_1^- = 0.05 \quad \nu_1^+ = 0.44 \quad m_1 = 0.8$
$t_1 = 0.1423 \quad t_2 = 0.1697$

z	K_1	K_2	K_3
0.800	1.000	1.565	0.249
0.817	0.949	1.312	0.160
0.834	0.904	1.080	0.077
0.852	0.867	0.867	0.000
0.886	0.805	0.538	−0.013
0.921	0.760	0.252	−0.025
0.956	0.728	0.000	−0.036
0.971	0.717	−0.011	−0.036
0.985	0.706	−0.021	−0.036
1.000	0.696	−0.031	−0.036

Для случаев 1 и 2б соответственно принято $\frac{p}{\delta E_1^-} = \frac{t_1 + t_2}{2}$, $\frac{p}{\delta E_1^-} = \frac{t_5 + t_6}{2}$.

Приведенные в табл. 2 и 3 результаты вычислений выполнены при $\frac{E_1^-}{E_2^-} = 2$.

Из табл. 2 замечаем, что во всех точках областей первого рода напряжение σ_z постоянно. В областях же второго рода σ_z не постоянно, зависит от координаты $r(z)$, что является особенностью разномодульного материала.

Таблица 3

Случай 2а

$\nu_1^- = 0.05 \quad \nu_1^+ = 0.44 \quad m_1 = 0.5$
$t_3 = 0.0779 \quad t_4 = 1.4250 \quad p/\beta E_1^- = 1.3$

z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	3.226	0.982
0.655	0.327	0.984	0.290
0.809	0.148	0.345	0.087
0.964	0.092	0.092	0.000
0.976	0.090	0.081	−0.001
0.988	0.088	0.070	−0.001
1.000	0.086	0.060	−0.001

$\nu_1^- = 0.1 \quad \nu_1^+ = 0.4 \quad m_1 = 0.5$
$t_3 = 0.1762 \quad t_4 = 0.7547 \quad p/\beta E_1^- = 0.5$

z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	1.906	0.362
0.590	0.629	1.064	0.174
0.679	0.438	0.607	0.068
0.769	0.333	0.333	0.000
0.846	0.280	0.189	−0.009
0.923	0.245	0.083	−0.016
1.000	0.223	0.003	−0.022

$\nu_1^- = 0.2 \quad \nu_1^+ = 0.45 \quad m_1 = 0.5$
$t_3 = 0.2796 \quad t_4 = 0.5999 \quad p/\beta E_1^- = 0.44$

0.500	1.000	1.364	0.164
0.565	0.753	0.950	0.089
0.630	0.592	0.675	0.037
0.695	0.483	0.483	0.000
0.797	0.373	0.293	−0.016
0.898	0.305	0.170	−0.027
1.000	0.261	0.085	−0.035

$\nu_1^- = 0.1 \quad \nu_1^+ = 0.4 \quad m_1 = 0.8$
$t_3 = 0.1604 \quad t_4 = 0.1932 \quad p/\beta E_1^- = 0.1768$

0.800	1.000	1.344	0.138
0.831	0.918	1.134	0.086
0.861	0.848	0.950	0.041
0.892	0.789	0.789	0.000
0.928	0.731	0.637	−0.009
0.964	0.682	0.504	−0.018
1.000	0.642	0.387	−0.025

Случай 2б

$\nu_1^- = 0.45 \quad \nu_1^+ = 0.2 \quad m_1 = 0.5$
$t_5 = 0.5682 \quad t_6 = 1.2785$

0.500	1.000	0.925	−0.034
0.525	0.910	0.864	−0.021
0.550	0.831	0.809	−0.010
0.575	0.760	0.760	0.000
0.717	0.481	0.560	0.016
0.858	0.320	0.440	0.024
1.000	0.218	0.362	0.029

$\nu_1^- = 0.45 \quad \nu_1^+ = 0.2 \quad m_1 = 0.8$
$t_5 = 0.2420 \quad t_6 = 0.2642$

0.800	1.000	0.947	−0.024
0.827	0.938	0.904	−0.015
0.854	0.881	0.865	−0.007
0.880	0.828	0.828	0.000
0.920	0.757	0.778	0.004
0.960	0.695	0.733	0.008
1.000	0.638	0.692	0.011

Отметим, что случаи 1 и 2а, 2б возможны только для разномодульного материала и значения основных напряжений σ_r и σ_θ в этих случаях нельзя получить из соответственных значений плоского напряженного состояния заменой упругих постоянных $E_i^\pm$ и $\nu_i^\pm$.

Ереванский политехнический институт
имени К. Маркса

Поступила 24 XI 1969

Ջ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՍՆԱՄԵՋ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԳԼԱՆԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկված է երկու տարամոդուլ նյութերից պատրաստված և նախնական լարումով միացված երկու սնամեջ գլանների լարվածային վիճակը։

Խնդիրը լուծված է հարթ լարվածային վիճակի և հարթ դեֆորմացիայի դեպքերի համար։

Ստացված են բանաձևեր նորմալ լարումների համար։

CALCULATION OF A COMPOUND HOLLOW CYLINDER MADE OF HETEROMODULUS MATERIALS

J. Z. MKRTCHIAN

Summary

A stressed state of a hollow cylinder consisting of two cylinders made of heteromodulus materials and inserted one into the other with tension is considered. The inner cylinder is under a uniformly distributed internal pressure. The problem is solved for cases of generalized plane stressed state and plane strain. Formulas to determine normal stresses are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мкртчян Дж. З.* Расчет полого цилиндра, изготовленного из разномодульного материала. Изв. АН АрмССР, Механика, № 1, т. 22, 1969.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, № 2, 1966.
3. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, № 2, т. 19, 1966.
4. *Мкртчян Дж. З.* Расчет вращающегося диска, изготовленного из разномодульного материала. Изв. вузов СССР, Машиностроение, № 9, 1969.
5. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, Л.-М., 1937.