

Р. К. АЛЕКСАНЯН, А. М. МКРТЧЯН

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СОСТАВНОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

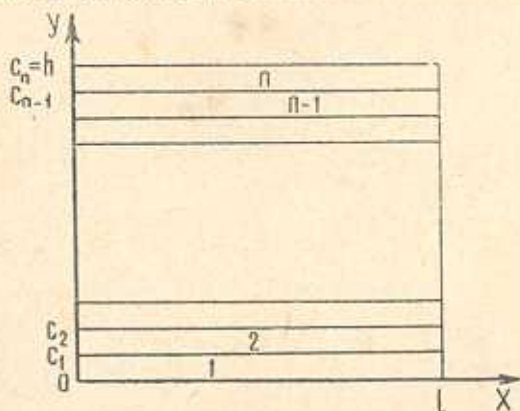
Распределение температурных напряжений в заземленном по одной стороне прямоугольнике рассматривалось в работе [1]. Для некоторых частных случаев закрепления контура температурные напряжения в прямоугольнике исследовались в работах [2].

В [3] рассматривался ряд задач для анизотропных однородных пластин с отверстиями и закрепленными краями.

В работе [4] определены напряжения, вызванные изменением температуры тела с включением, имеющим коэффициент теплового расширения, отличный от основного материала.

В настоящей статье решается термоупругая задача плоской деформации составного прямоугольника, свободного от внешних нагрузок и связей. Прямоугольник собран из n однородных прямоугольных частей, имеющих разные коэффициенты линейного теплового расширения α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и одинаковые упругие постоянные E, ν . Тело собрано при температуре T_0 . Напряжения вызываются изменением температуры $\Delta T = T - T_0$.

Решение рассматриваемой задачи будем выражать через функцию напряжений $\Phi(x, y)$. Положение прямоугольника в системе координат (x, y) показано на фиг. 1. Координатные линии $y = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) являются линиями идеального контакта между слоями.



Фиг. 1.

Функции $\Phi(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в областях соответствующих слоев удовлетворяют уравнению

$$\Delta \Delta \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(n)} \Big|_{y=c_n} &= 0 & \tau_{xy}^{(n)} \Big|_{y=c_n} &= 0 \\ \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} &= 0 & \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} &= 0 \\ \sigma_x^{(i)} \Big|_{x=0} &= 0 & \tau_{xy}^{(i)} \Big|_{x=0} &= 0 & (i=1, 2, \dots, n) \\ \sigma_x^{(i)} \Big|_{x=l} &= 0 & \tau_{xy}^{(i)} \Big|_{x=l} &= 0 & (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

Условия контакта следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(i)} \Big|_{y=c_i} &= \sigma_y^{(i+1)} \Big|_{y=c_i}, & \tau_{xy}^{(i)} \Big|_{y=c_i} &= \tau_{xy}^{(i+1)} \Big|_{y=c_i} & (i=1, 2, \dots, n-1) \\ u^{(i)} \Big|_{y=c_i} &= u^{(i+1)} \Big|_{y=c_i}, & v^{(i)} \Big|_{y=c_i} &= v^{(i+1)} \Big|_{y=c_i} & (i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2)$$

Из соотношений между температурными напряжениями и деформациями получаются следующие выражения для перемещений через функции $\Phi_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} 2Gu^{(i)} &= m \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} dx - (1-m) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - a_i y + b_i + a_i E \Delta T x \\ 2Gv^{(i)} &= m \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} dy - (1-m) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + a_i x + d_i + a_i E \Delta T y \end{aligned} \quad (3)$$

где G — модуль сдвига; $m = 1 - \nu$; a_i , b_i , d_i — постоянные интегрирования.

Рассмотрим функции

$$\Phi_i^{(0)}(y) = f_i y^2 + g_i y \quad (4)$$

где f_i и g_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — постоянные.

Эти функции в соответствующих областях определяют напряженные состояния, однородные в каждом отдельном слое

$$\bar{\sigma}_y^{(i)} = 0, \quad \bar{\tau}_{xy}^{(i)} = 0, \quad \bar{\sigma}_x^{(i)} = 2f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Из требования удовлетворения условиям контакта для коэффициентов f_i , g_i получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} f_{i+1} - f_i &= \frac{a_i - a_{i+1}}{2m} E \Delta T \\ g_{i+1} - g_i &= \frac{a_i - a_{i+1}}{m(m-1)} E \Delta T c_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (5)$$

Функции напряжений Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющие условиям на границах (1) и условиям контакта (2), ищем в виде

$$\Phi_i(x, y) = \Phi_i^{(0)}(y) + \Phi(x, y) \quad (6)$$

Бигармоническая функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{y=h} &= 0 & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=h} &= 0 & (0 < x < l) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{y=0} &= 0 & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} &= 0 & (0 < x < l) \end{aligned} \quad (7)$$

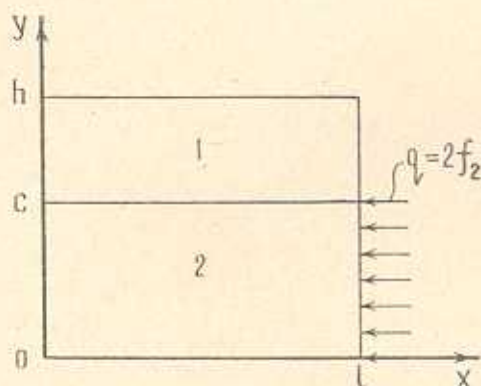
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=l} = \Psi(y) = -2f_i, \quad (c_i < y < c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=l} = 0 \quad (0 < y < h)$$

Соотношения (5) обеспечивают удовлетворение условий контакта.

Таким образом, решение рассматриваемой плоской задачи термоупругости приводится к определению функции напряжений $\Phi(x, y)$ для соответствующей плоской задачи теории упругости с граничными условиями (7), решение которой дано в работе [5].

В конкретном случае, когда $n=3$ и $\alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2$, получим симметричную относительно x, y задачу. Помещая координатные оси, как показано на фиг. 2, можно рассматривать только четвертую часть прямоугольника.



Фиг. 2.

Для определения постоянных f_i и g_i ($i=1, 2, 3$) имеем следующие соотношения:

$$f_2 - f_3 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2m} E \Delta T$$

$$f_1 - f_2 = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2m} E \Delta T \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 g_1 - g_2 &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{m(m-1)} cE\Delta T \\
 g_2 - g_3 &= -\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{m(m-1)} cE\Delta T
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Из (8), так как $\alpha_1 = \alpha_3$, получаем

$$f_1 = f_3$$

f_1, f_2, f_3 связаны двумя условиями (8). Принимая $f_1 = 0$, получим $f_3 = 0$, так как $f_1 = f_3$.

На основании (7) имеем граничные условия

$$\sigma_y|_{x=h} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=h} = 0 \tag{9}$$

$$\sigma_x|_{x=l} = \psi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \beta_k y, \quad \tau_{xy}|_{x=l} = 0$$

В данном случае

$$\psi(y) = -2f_2 = -q, \quad a_k = -\frac{2q}{\beta_k h} \sin \beta_k c \tag{10}$$

Имея в виду условия симметрии

$$\tau_{xy}|_{x=0} = u|_{x=0} = \tau_{xy}|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$$

функцию $\Phi(x, y)$ ищем в виде

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x [A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos \beta_k y [E_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x]
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{2k-1}{2l} \pi, \quad \beta_k = \frac{2k-1}{2h} \pi$$

Удовлетворяя граничным условиям (9), получим значения

$$A_k = -D_k \alpha_k h \operatorname{th} \alpha_k h \tag{12}$$

$$E_k = -H_k \beta_k l \operatorname{th} \beta_k l - \frac{a_k}{\beta_k^2 \operatorname{ch} \beta_k l}$$

и бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} A_{pk} Y_p + P_k \\
 Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} B_{pk} X_p + Q_k
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

где

$$Y_k = (-1)^k \frac{h}{l} \beta_k^2 H_k \operatorname{ch} \beta_k l \quad (14)$$

$$X_k = (-1)^{k+1} \alpha_k^2 D_k \operatorname{ch} \alpha_k h$$

$$A_{pk} = \frac{8\epsilon_k^2(2p-1)}{\varphi_k \pi [(2p-1)^2 + \epsilon_k^2]^2}, \quad B_{pk} = \frac{8\gamma_k^2(2p-1)}{\psi_k \pi [(2p-1)^2 + \gamma_k^2]^2} \quad (15)$$

Здесь

$$\epsilon_k = (2k-1) \frac{h}{l}, \quad \gamma_k = (2k-1) \frac{l}{h} \quad (16)$$

$$\varphi_k = \operatorname{th} \alpha_k h + \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}, \quad \psi_k = \operatorname{th} \beta_k l + \frac{\beta_k l}{\operatorname{ch} \beta_k l} \quad (17)$$

$$P_k = \frac{4q \operatorname{sh} \alpha_k c}{\pi \varphi_k \operatorname{ch} \alpha_k h (2k-1)} \quad (18)$$

$$Q_k = -\frac{(-1)^k 4q \operatorname{th} \alpha_k c}{\pi \psi_k (2k-1)} \frac{h}{l} \quad (19)$$

Система (13) вполне регулярна

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{pk}| < 0.77, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |B_{pk}| < 0.77$$

при этом свободные члены имеют порядок $\frac{1}{k}$ [5].

Рассмотрим частный пример, когда

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{3}, \quad \frac{c}{l} = \frac{1}{4}$$

Для выражений напряжений на линии контакта $y = c$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{f_2} \Big|_{y=c=0} &= 2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{3}{2} \gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{l}}{\gamma_k \operatorname{ch} 3\gamma_k} + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos \gamma_k \frac{x}{l} \left[\frac{2 \operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} + \frac{\gamma_k \operatorname{sh} \frac{\gamma_k}{4}}{4 \operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} - \frac{\gamma_k \operatorname{th} \frac{\gamma_k}{3}}{3} \frac{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} \right] X'_k - \\ &- 6 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos \frac{3\gamma_k}{4} \left[\gamma_k \frac{x}{h} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} - 3\gamma_k \operatorname{th} 3\gamma_k \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} \right] Y'_k \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y}{f_2} &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{3}{2} \gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{h}}{\gamma_k \operatorname{ch} 3\gamma_k} - \\
&- 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos \gamma_k \frac{x}{l} \left[\frac{\gamma_k}{4} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} - \frac{\gamma_k}{3} \operatorname{th} \frac{\gamma_k}{3} \frac{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} \right] X_k' - \\
&- 6 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos \frac{3\gamma_k}{4} \left[\frac{2 \operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} + \gamma_k \frac{x}{h} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} - \right. \\
&\quad \left. - 3\gamma_k \operatorname{th} 3\gamma_k \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} \right] Y_k' \\
\frac{\tau_{xy}}{f_2} &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{3\gamma_k}{4} \operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{h}}{\gamma_k \operatorname{ch} 3\gamma_k} + \\
&+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \gamma_k \frac{x}{l} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} + \frac{\gamma_k}{4} \frac{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} - \frac{\gamma_k}{3} \operatorname{th} \frac{\gamma_k}{3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} \right] X_k' - \\
&- 6 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{3\gamma_k}{4} \left[\frac{\operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} + \gamma_k \frac{x}{h} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} - \right. \\
&\quad \left. - 3\gamma_k \operatorname{th} 3\gamma_k \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} \right] Y_k'
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_k = \frac{2k-1}{2} \pi, \quad X_k' = \frac{X_k}{2f_2}, \quad Y_k' = \frac{Y_k}{2f_2}$$

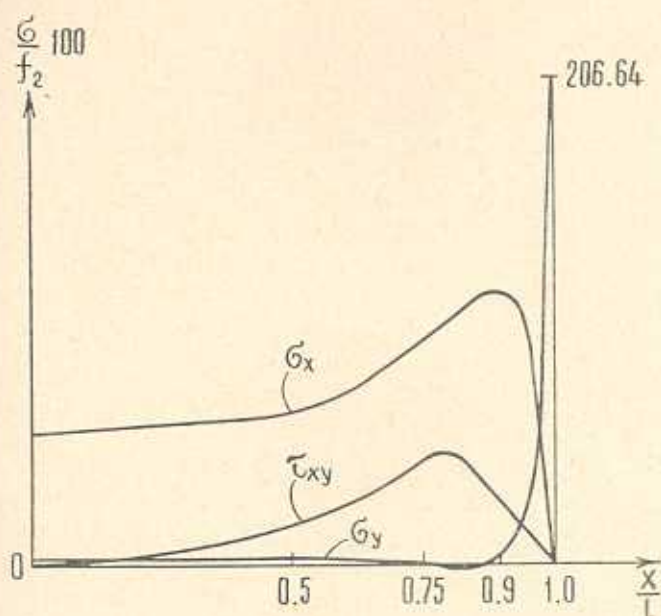
При $y = c + 0$ в выражении σ_x/f_2 исчезает первое слагаемое: напряжение σ_x на линии контакта имеет разрыв.

Оценки неизвестных X_k и Y_k определяются из системы (13)

$$\begin{aligned}
-0.43886 < X_1' < -0.41972 & \quad 0.312 < Y_1' < 0.32271 \\
-0.05508 < X_2' < -0.04351 & \quad -0.1654 < Y_2' < -0.15463
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0.00154 < X_3' < 0.0119 & \quad 0.0761 < Y_3' < 0.08856 \\
 0.000649 < X_4' < 0.01171 & \quad -0.06583 < Y_4' < -0.05281 \\
 -0.00528 < X_5' < 0.006697 & \quad 0.04294 < Y_5' < 0.05632 \quad (21) \\
 -0.008097 < X_6' < 0.004498 & \quad -0.412 < Y_6' < -0.02854 \\
 -0.03263 < X_k' < 0.01752 & \quad -0.04925 < Y_k' < 0.03961 \\
 & \quad (k > 6)
 \end{aligned}$$

Значения напряжений с избытком и недостатком в некоторых точках линии контакта, полученные при помощи (20) и (21), приведены в таблице. Погрешность для наибольшего вычисленного напряжения не превосходит 3,7%.



Фиг. 3.

Таблица

x/l	σ_x^-/f_2	σ_x^+/f_2	σ_y^-/f_2	σ_y^+/f_2	τ_{xy}^-/f_2	τ_{xy}^+/f_2
0.0	0.4332	0.5601	-0.0217	0.0247	0	0
0.5	0.5327	0.6279	0.0052	0.034	0.0509	0.0902
0.75	0.8113	0.8995	-0.0075	0.0322	0.1814	0.2201
0.8	0.7999	0.9885	-0.028	0.0107	0.183	0.225
0.9	1.0728	1.1735	-0.0059	0.0808	0.1087	0.2184
1	0	0	1.9868	2.14	0	0

Графики контактных напряжений, построенные по средним значениям их оценок и приведенные на фиг. 3, показывают, что на краях поверхности соединения в рассматриваемом прямоугольнике возникают

большие нормальные термонапряжения σ_y , которые при значительных амплитудах колебаний температуры и больших разностях $\alpha_2 - \alpha_1$ могут привести к образованию трещины.

Авторы считают своим долгом выразить признательность К. С. Чобаняну за обсуждение настоящей работы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 III 1970

Բ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԲԱՂԱԿՐՅԱԼ ՌԵՂԱՆԿՅԱՆ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկված է արտաքին ուժային ազդեցություններից և կապերից ազատ բաղադրվալ ուղղանկյան շերտառածղականությունից հարթ խնդիրը:

Ուղղանկյունը հավաքված է n համաստ, նույն առաձգական և տարրեր շերտային ընդարձակման գործակիցներ ունեցող ուղղանկյուն մասերից: Լարումները առաջանում են շերտաստիճանի հավասարաչափ փոփոխման հետևանքով: Խնդրի լուծումը բերվում է դժային հավասարումների լիովին սեղուկար անկերջ սխեմաների: Բերված է թվային օրինակ:

THERMAL STRESSES IN A COMPOSITE RECTANGLE

R. K. ALEXANIAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The thermo-elastic problem of plane deformation of a composite rectangle free from any external force influence is considered. The rectangle consists of n homogeneous rectangular parts with different coefficients of thermal linear expansion and similar elastic constants. The stresses develop due to uniform change in temperature.

The solution of the problem is reduced to quite regular infinite systems of linear equations. A numerical example is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Aleck B. J. Thermal stresses in rectangular plate clamped along on edge. J. Appl. Mech., 16, 1949, 118.
2. Yukitino Jjone and Jonosuke Kobatake. Mechanics of Adhesive joints, Part I, III. Stress distribution in adhesive layer under tensile loading. ASRS A vol. 7, 1957, vol. 7, 1958.
3. Удалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изв. Саратовского университета, 1967.

4. Вейцман Р. И. Концентрация термоупругих напряжений вблизи поверхности пересечения грани включения со свободной поверхностью тела. IX научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций (тезисы докладов), Киев, 1968.
5. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.