ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 3, 1970 Механика

И. Т. ЕФИМОВА, Я. С. УФЛЯНД

# О КРУЧЕНИИ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

В настоящей заметке рассмотрена задача о кручении полубесконечного составного цилиндрического стержня при различных краевых условиях. Точное решение получено с помощью специального интегрального преобразования. Приведено доказательство соответствующей формулы обращения.

§ 1. Рассмотрим полубесконечный стержень, составленный из двух материалов*, заделанный на торце и скручиваемый произвольными усилиями по боковой поверхности. Как известно [1], поставленная задача сводится к уравнению

$$\Delta v - \frac{v}{r^2} = 0 \tag{1.1}$$

для единственной не равной нулю компоненты вектора упругого смещения $u_\varphi \equiv v(r, z)$. Граничные условия имеют вид

$$v\big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\bigg|_{r=R} = \frac{1}{RG_1}\tau_{r\varphi}\big|_{r=R} = f(z) \tag{1.2}$$

где $G$ — модуль сдвига. Кроме того, в разделяющем сечении $z = l$ должны быть непрерывны смещение и касательное напряжение $\tau_{\varphi z} = G\dfrac{\partial v}{\partial z}$, откуда

$$v\big|_{z=l-0} = v\big|_{z=l+0}, \qquad G_1\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=l-0} = G_2\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=l+0} \tag{1.3}$$

Разделение переменных приводит к следующему выражению:

$$v = \int_0^\infty A(\lambda)\, I_1(\lambda r)\, \varphi(z, \lambda)\, d\lambda \tag{1.4}$$

$$\varphi = \begin{cases} \sin\lambda z, & 0 < z < l \\ \sin\lambda l\cos\lambda(z-l) + \dfrac{G_1}{G_2}\cos\lambda l\sin\lambda(z-l), & l < z < \infty \end{cases} \tag{1.5}$$

удовлетворяющему однородным граничным условиям. Неоднородное условие (1.2) принимает вид разложения

* Развиваемый далее метод может быть обобщен на случай многослойной среды и полого цилиндра.

$$f(z) = \int_0^\infty A(\lambda) \frac{d}{dr}\left[\frac{I_1(\lambda r)}{r}\right]_{r=R} \varphi(z, \lambda)\, d\lambda \tag{1.6}$$

из которого требуется найти неизвестную величину $A(\lambda)$.

Таким образом, задача свелась к определению коэффициента разложения заданной функции в интеграл по функциям (1.5), являющимся, очевидно, собственными функциями следующей сингулярной краевой задачи:

$$\begin{gathered}\varphi'' + \lambda^2\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) < \infty \\ \varphi(l-0) = \varphi(l+0), \quad G_1\varphi'(l-0) = G_2\varphi'(l+0)\end{gathered} \tag{1.7}$$

Используя доказанную в § 2 теорему разложения (2.1), а также соотношение [2]

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{I_1(x)}{x}\right] = \frac{1}{x} I_2(x) \tag{1.8}$$

находим

$$A(\lambda) = \frac{2R}{\pi\lambda I_2(\lambda r)\,\omega(\lambda)} \int_0^\infty f(\xi)\,\rho(\xi)\,\varphi(\xi, \lambda)\, d\xi \tag{1.9}$$

где

$$\omega(\lambda) = \sin^2\lambda l + \frac{1}{\nu^2}\cos^2\lambda l, \quad \nu = G_2/G_1$$

$$\rho(z) = \frac{1}{\nu}, \quad 0 < z < l, \quad \rho(z) = 1, \quad l < z < \infty \tag{1.10}$$

В качестве примера рассмотрим случай линейной скручивающей нагрузки $p$, приложенной по окружности некоторого сечения $z = a < l$. Так как при этом граничное напряжение представляется через дельта-функцию: $\tau_{\varphi z}\big|_{r=R} = p\delta(a)$, то в этом случае

$$A(\lambda) = \frac{2p \sin\lambda a}{\pi\lambda G_2 I_2(\lambda R)\,\omega(\lambda)} \tag{1.11}$$

§ 2. Переходим к доказательству следующей теоремы: *если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, абсолютно интегрируемая в промежутке $(0, \infty)$ и имеющая там ограниченную вариацию, то*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}\, d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,\rho(\xi)\,\varphi(\xi, \lambda)\, d\xi = \begin{cases} \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \neq l \\ \dfrac{f(l-0) + \nu f(l+0)}{1+\nu}, & x = l \end{cases} \tag{2.1}$$

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$J(x, T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,\rho(\xi)\,\frac{\varphi(\xi, \lambda)\,\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}\,d\xi \tag{2.2}$$

и заметим, что

$$\left| f(\xi)\,\rho(\xi)\frac{\varphi(\xi, \lambda)\,\varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)}\right| \leqslant C\,|f(\xi)|$$

при любых положительных $x$ и $\xi$. В силу этой оценки и абсолютной интегрируемости $f(x)$ внутренний интеграл сходится равномерно по $\lambda$ для $\lambda \in (0, \infty)$. Следовательно, в (2.2) можно изменить порядок интегрирования и, учитывая вид $\varphi(\xi, \lambda)$ в зависимости от $\xi$, записать $J(x, T)$ для $0 < x < l$ в следующей форме:

$$J(x, T) = \frac{2}{\pi\nu}\int_0^l f(\xi)\,\psi_1(x, \xi, T)\,d\xi + \frac{2}{\pi}\int_l^\infty f(\xi)\,\psi_2(x, \xi, T)\,d\xi =$$

$$= \underline{J}(x, T) + \overline{J}(x, T) \tag{2.3}$$

Здесь через $\psi_1(x, \xi, T)$ и $\psi_2(x, \xi, T)$ обозначены интегралы

$$\psi_1 = \int_0^T \frac{\sin\lambda x \sin\lambda\xi}{\sin^2\lambda l + \dfrac{1}{\nu^2}\cos^2\lambda l}\,d\lambda \tag{2.4}$$

$$\psi_2 = \int_0^T \sin\lambda x\,\frac{\sin\lambda l\cos\lambda(\xi - l) + \dfrac{1}{\nu}\cos\lambda l\sin\lambda(\xi - l)}{\sin^2\lambda l + \dfrac{1}{\nu^2}\cos^2\lambda l}\,d\lambda \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала случай $0 < \xi < l$. Нетрудно показать, что

$$\psi_1 = \frac{\nu}{2i}\int_{-T}^T \frac{\nu\sin\lambda(l - x) + i\cos\lambda(l - x)}{\nu\sin\lambda l + i\cos\lambda l}\sin\lambda\xi\,d\lambda, \quad 0 < \xi < x < l \tag{2.6а}$$

$$\psi_1 = \frac{\nu}{2i}\int_{-T}^T \frac{\nu\sin\lambda(l - \xi) + i\cos\lambda(l - \xi)}{\nu\sin\lambda l + i\cos\lambda l}\sin\lambda x\,d\lambda, \quad 0 < x < \xi < l \tag{2.6б}$$

Поэтому интеграл $\underline{J}(x, T)$ представим в виде

$$\underline{J} = \frac{2}{\pi\nu}\int_0^x f(\xi)\,\psi_1(x, \xi, T)\,d\xi + \frac{2}{\pi\nu}\int_x^l f(\xi)\,\psi_1(x, \xi, T)\,d\xi =$$

$$= J_1(x, T) + J_2(x, T) \tag{2.7}$$

Изучим, например, $J_2(x, T)$ при $T \to +\infty$. Делая в (2.6б) замену переменных $\lambda = i\tau$, получаем, что

$$\psi_1 = \frac{\nu}{2i} \int_{-iT}^{iT} \frac{\nu \operatorname{sh} \tau (l-\xi) + \operatorname{ch} \tau (l-\xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x \, d\tau \tag{2.8}$$

Так как уравнение $\operatorname{sh} \tau l + \frac{1}{\nu} \operatorname{ch} \tau l = 0$ не имеет корней, у которых $\operatorname{Re} \tau > 0$, то по теореме Коши будет*

$$\psi_1 = \frac{\nu}{2i} \int_{(\Gamma_T)} \frac{\nu \operatorname{sh} \tau (l-\xi) + \operatorname{ch} \tau (l-\xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x d\tau \tag{2.9}$$

На контуре $(\Gamma_T)$ имеют место соотношения

$$\tau = Te^{i\varphi}, \quad -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

и для $0 < x < \xi < l$

$$\frac{\nu \operatorname{sh} \tau (l-\xi) + \operatorname{ch} \tau (l-\xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-Te^{i\varphi}(\xi - x)} + e^{-Te^{i\varphi}(\xi - x)} O(T^{-1}) - \frac{1}{2} e^{-Te^{i\varphi}(\xi + x)} +$$

$$+ \frac{\nu - 1}{2(\nu + 1)} e^{Te^{i\varphi}(\xi - 2l - x)} - \frac{\nu - 1}{2(\nu + 1)} e^{Te^{i\varphi}(\xi - 2l + x)} +$$

$$+ \left[ e^{-Te^{i\varphi}(\xi + x)} + e^{Te^{i\varphi}(\xi - 2l - x)} + e^{Te^{i\varphi}(\xi - 2l + x)} \right] O(T^{-1}) \tag{2.10}$$

Вычисляя интеграл (2.9) по контуру $(\Gamma_T)$, приходим к соотношению

$$\psi_1 = \frac{\nu}{2} \frac{\sin(\xi - x)T}{\xi - x} + \frac{\sin(\xi - x)T}{\xi - x} O(T^{-1}) - \frac{\nu}{2} \frac{\sin(\xi + x)T}{\xi + x} +$$

$$+ \frac{(\nu - 1)\nu}{2(\nu + 1)} \left[ \frac{\sin(\xi - 2l - x)T}{\xi - 2l - x} - \frac{\sin(\xi - 2l + x)T}{\xi - 2l + x} \right] +$$

$$+ \left[ \frac{\sin(\xi + x)T}{\xi + x} + \frac{\sin(\xi - 2l - x)T}{\xi - 2l - x} + \frac{\sin(\xi - 2l + x)T}{\xi - 2l + x} \right] O(T^{-1}) \tag{2.11}$$

Подставляя теперь (2.11) в $J_2(x, T)$ и устремляя $T \to +\infty$, на основании известных лемм Римана и Дирихле получаем

* Сходный метод применялся в работе [4].

$$\lim_{T \to +\infty} J_2(x,\ T) = \frac{1}{2} f(x+0)$$

Исследование интеграла $J_1(x,\ T)$ проводится аналогичным путем, в результате имеем

$$\lim_{T \to +\infty} J_1(x,\ T) = \frac{1}{2} f(x-0)$$

Таким образом,

$$\lim_{T \to +\infty} \underline{J}(x,\ T) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{2.12}$$

Если теперь рассмотреть $O<x<l<\xi<\infty$, то интеграл $\psi_2(x,\ \xi,\ T)$ можно представить в виде

$$\psi_2 = \frac{i}{2}\int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin\lambda(\xi-l) - i\cos\lambda(\xi-l)}{\sin\lambda l + \frac{i}{\nu}\cos\lambda l}\sin\lambda x d\lambda =$$

$$= \frac{i}{2}\int\limits_{-iT}^{iT} \frac{\operatorname{sh}\tau(\xi-l) - \operatorname{ch}\tau(\xi-l)}{\operatorname{sh}\tau l + \frac{1}{\nu}\operatorname{ch}\tau l}\operatorname{sh}\tau x d\tau =$$

$$= \frac{i}{2}\int\limits_{(\Gamma_T)} \frac{\operatorname{sh}\tau(\xi-l) - \operatorname{ch}\tau(\xi-l)}{\operatorname{sh}\tau l + \frac{1}{\nu}\operatorname{ch}\tau l}\operatorname{sh}\tau x\, d\tau = \frac{\sin(\xi-x)T}{\xi-x} -$$

$$- \frac{\sin(\xi+x)T}{\xi+x} + \left[\frac{\sin(\xi-x)T}{\xi-x} + \frac{\sin(\xi+x)T}{\xi+x}\right] O(T^{-1}) \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в $\overline{J}(x,\ T)$ и переходя там к пределу при $T \to +\infty$, получим

$$\lim_{T \to +\infty} \overline{J}(x,\ T) = 0 \tag{2.14}$$

Из (2.12) и (2.14) вытекает, что для $O<x<l$

$$\lim_{T \to +\infty} J(x,\ T) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{2.15}$$

Аналогично доказывается справедливость формулы (2.15) и в случае $l<x<\infty$. Исследование точки $x=l$ дает

$$\lim_{T \to +\infty} J(l,\ T) = \frac{f(l-0)+\nu f(l+0)}{1+\nu} \tag{2.16}$$

что и доказывает теорему.

§ 3. Предложенная методика применима также и к таким задачам, когда сечение $z=0$ свободно от усилий. Вводя в качестве неизвестной функцию $w=\frac{\Phi}{r^2}$, где $\Phi$ — функция напряжений, получаем уравнение

$$\Delta w-\frac{4w}{r^2}=0 \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$w\Big|_{z=0}=0, \quad w\Big|_{r=R}=-\int\limits_0^z \tau_{r\varphi}\Big|_{r=R}dz=f(z) \tag{3.2}$$

В сечении $z=l$ имеем

$$w\Big|_{z=l-0}=w\Big|_{z=l+0}, \qquad G_2\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=l-0}=G_1\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=l+0} \tag{3.3}$$

При этом обеспечивается непрерывность напряжений $\tau_{\varphi z}$ и величины $\frac{\partial\psi}{\partial r}$, где $\Psi=\frac{v}{r}$ — функция перемещений. После решения задачи по известным значениям $\Phi$ находим функцию $\Psi$ с точностью до аддитивной постоянной, значение которой выбираем так, чтобы выполнялось требование $v(r, l-0)=v(r, l+0)$.

Решение задачи, полученное с помощью формулы (2.1), имеет вид

$$w=\int\limits_0^\infty A(\lambda)\frac{I_2(\lambda r)}{I_2(\lambda R)}\varphi(z,\lambda)\,d\lambda \tag{3.4}$$

где

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi\omega(\lambda)}\int\limits_0^\infty f(\xi)\rho(\xi)\varphi(\xi,\lambda)\,d\xi, \qquad \nu=\frac{G_1}{G_2}$$

Заметим в заключение, что в случае полностью неоднородных граничных условий решение может быть получено по методу интегральных преобразований (см. [3]).

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе

Поступила 9 VII 1969

Ի. Տ. ԵՖԻՄՈՎԱ, Յա. Ս. ՈՒՖԼՅԱՆԴ

## ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Հատուկ ինտեգրալային ձևափոխության միջոցով տրվում է կիսաանվերջ բաղադրյալ գլանային ձողի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Բերված է համապատասխան շրջման բանաձևի ապացույցը։*

## ON TORSION OF COMPOUND CYLINDRICAL BARS

I. T. EFIMOVA, Ya. S. UFLYAND

### Summary

There is given an exact solution to the problem of torsion of a semi-infinite compound cylindrical bar of two different materials. Special integral transform is applied and the inverse formula is proved.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
2. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
3. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
4. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 30, 2, 1966, 252.