

Б. А. КОРБУТ, Ю. И. НАГОРНЫЙ

К ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ
ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Имеется несколько подходов к решению динамических задач для оболочек, связанных с заполнителем (основанием). В наиболее простом из них жесткость заполнителя моделируется основанием Винклера, а его инерционность—некоторой приведенной массой [1]. В другом, более точном, заполнитель представляется так называемым инерционным винклеровским основанием—стержни и диски с распределенной массой [2]. Наконец, наиболее точный подход состоит в решении контактной задачи для системы оболочка—заполнитель, причем последний моделируется трехмерным упругим телом, движение которого описывается общими уравнениями теории упругости [3, 4].

Очевидно, первые два пути являются сравнительно простыми, но не учитывают распределительное свойство заполнителя, а также ряд других факторов. Третий путь позволяет решать задачу точно, однако возникающие при этом математические трудности органичивают возможность его применения.

В статье предлагается модель заполнителя более точная, чем модель Винклера, так как она „распределяет“ нагрузку и в то же время более простая, нежели модель трехмерного тела.

Идея предлагаемой модели состоит в том, что в общих уравнениях теории упругости, описывающих движение заполнителя, полагаются равными нулю перемещения, эквидистантные поверхности оболочки. Сохраняется лишь радиальное перемещение, соответствующее прогибам оболочки, а из трех уравнений теории упругости—одно уравнение.

Принятое допущение в отношении перемещений заполнителя оправдывается малой величиной касательных перемещений по сравнению с нормальными в пологих оболочках, а также для оболочек произвольной кривизны, деформации которых имеют большой показатель изменчивости. Указанные оболочки широко распространены и поэтому предлагаемая модель заполнителя для них может найти практическое применение.

Изучение совместного движения оболочки и заполнителя сводится к решению контактной задачи для двух тел, деформации каждого из которых описываются различными уравнениями. Для совместного решения этих уравнений можно использовать два пути. В первом—перемещения оболочки и заполнителя раскладываются в ряд по одинаково-

вым функциям от координат, эквидистантных поверхности оболочки. В этом случае условия сопряжения тел выполняются точно, а уравнения их движения по указанным двум координатам решаются приближенно, например, методом Галеркина. Второй путь предусматривает точное решение уравнений движения оболочки и заполнителя; условия же сопряжения выполняются приближенно в смысле метода Треффца.

На основании предложенной модели в статье приводится решение задачи о собственных колебаниях цилиндрической оболочки с полым заполнителем для одного вида граничных условий по торцам—свободное опирание. В этом частном случае и уравнения движения, и условия сопряжения оболочки с заполнителем удовлетворяются точно, а решение получается простым. Полученные результаты сравниваются с данными точного решения, при котором движение заполнителя описывается общими уравнениями теории упругости.

1. Уравнения движения оболочки записываем в виде [5]

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q_z}{h} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

где q_z — реакция заполнителя, остальные обозначения—общепринятые (фиг. 1).

Неизвестные функции, входящие в систему (1.1), представим так

$$\begin{pmatrix} w \\ \Phi \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cos \frac{n y}{R} \sin k_m x e^{i n t}, \quad k_m = \frac{m \pi}{l} \quad (1.2)$$

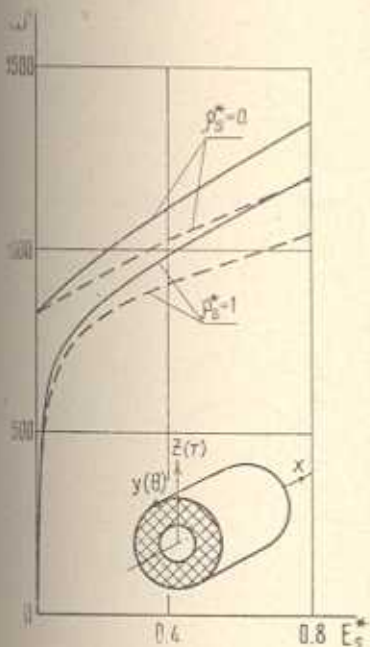
Здесь A , B и C — постоянные, m и $2n$ — числа полуволн вдоль образующей и по окружности, l — длина оболоч-

ки (заполнителя), ω — круговая частота, $i = \sqrt{-1}$.

2. Уравнение движения заполнителя будет [6]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1-2\nu_s}{2(1-\nu_s)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1-2\nu_s}{2(1-\nu_s)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)}{(1-\nu_s) E_s} \rho_s \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

где u_r — радиальное перемещение, r , θ и x — координаты вдоль ра-



Фиг. 1.

диуса, по дуге ($\theta = y/R$) и по оси, E_s , ν_s и ρ_s — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала заполнителя.

Принимая на торцах, как и для оболочки, радиальные перемещения равными нулю, решение уравнения (2.1) запишем в форме

$$u_r = [C_1 J_p(\gamma r) + C_2 J_{-p}(\gamma r)] \cos n\theta \operatorname{sinc} k_m x e^{i\omega t} \quad (p - \text{не целое}) \quad (2.2)$$

$$u_r = [C_1 J_p(\gamma r) + C_2 Y_p(\gamma r)] \cos n\theta \operatorname{sinc} k_m x e^{i\omega t} \quad (p - \text{целое}) \quad (2.3)$$

Здесь $J_p(\gamma r)$ и $Y_p(\gamma r)$ — функции Бесселя p -го порядка первого и второго рода, C_1 и C_2 — постоянные,

$$p^2 = 1 + n^2 \frac{1 - 2\nu_s}{2(1 - \nu_s)}, \quad \gamma^2 = \frac{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)\rho_s \omega^2}{(1 - \nu_s)E_s} - \frac{1 - 2\nu_s}{2(1 - \nu_s)} k_m^2 \quad (2.4)$$

Граничные условия на боковых поверхностях будут

$$\begin{aligned} r = R, \quad u_r = w, \quad \tau_z = -q, \\ r = a, \quad \tau_r = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где a и R — соответственно внутренний и наружный радиусы заполнителя,

$$\tau_r = \frac{E_s(1 - \nu_s)}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{u_r}{r} \right] \quad (2.6)$$

Подчинив перемещения (2.2) и (2.3) условиям (2.5) с учетом (1.2), выразим постоянную C , входящую в реакцию, через постоянную A . Подставим функции (1.2) в систему (1.1), получим частотное уравнение, где Δ_1 учитывает влияние заполнителя

$$c^2 x^2 + 12(1 - \nu^2)\delta^4 - c x^2 \omega^{*2} + \Delta_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$\Delta_1 = \frac{12(1 - \nu^2)(1 - \nu_s)}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} c E_s^* (h_1 h_2 - h_3 h_4) (h_5 - h_6)^{-1} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} h_1 = \beta J_{p-1}(\beta) + (\nu_s^* - p) J_p(\beta), \quad h_2 = \alpha J_{-(p+1)}(x) + (p + \nu_s^*) J_{-p}(x) \\ h_3 = \beta J_{-(p+1)}(\beta) + (\nu_s^* + p) J_{-p}(\beta), \quad h_4 = \alpha J_{p-1}(x) + (\nu_s^* - p) J_p(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$h_5 = h_1 J_{-p}(x), \quad h_6 = h_3 J_p(x) \quad (p - \text{не целое})$$

$$h_1 = \beta J_{p-1}(\beta) + (\nu_s^* - p) J_p(\beta), \quad h_2 = \alpha Y_{p-1}(x) + (\nu_s^* - p) Y_p(x) \quad (2.10)$$

$$h_3 = \beta Y_{p-1}(\beta) + (\nu_s^* - p) Y_p(\beta), \quad h_4 = \alpha J_{p-1}(x) + (\nu_s^* - p) J_p(x)$$

$$h_5 = h_1 Y_p(x), \quad h_6 = h_3 J_p(x) \quad (p - \text{целое})$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$c = n^4 + 2n^2\delta^2 + \delta^4, \quad \delta = \frac{m\pi R}{l}, \quad x = \frac{h}{R} \quad (2.11)$$

$$\omega^2 = \frac{12(1-\nu^2)\rho R^4 \omega^2}{E h^2}, \quad E_s^* = \frac{E_s R}{E h}, \quad \rho_s^* = \frac{\rho_s R}{\rho h} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R}, \quad \nu_s^* = \frac{\nu_s}{1-\nu_s}$$

$$\alpha = \left[\frac{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)}{12(1-\nu_s)(1-\nu^2)} \frac{\rho_s^* \alpha^2 \omega^2}{E_s^*} - \frac{1-2\nu_s}{2(1-\nu_s)} \beta^2 \right]^{1/4}, \quad \beta = \varepsilon \alpha$$

Отметим частные случаи.

а) Заполнитель без отверстия ($\varepsilon = 0$)

$$\Delta_1 = \frac{12(1-\nu^2)(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} c E_s^* \frac{h_4}{J_p(\alpha)} \quad (2.12)$$

б) Невесомый заполнитель ($\rho_s^* = 0$)

$$\Delta_1 = \frac{12(1-\nu^2)(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} c E_s^* (f_3 f_4 - f_1 f_2) (f_5 + f_6)$$

$$f_1 = \beta I_{p-1}(\beta) - (p - \nu_s^*) I_p(\beta), \quad f_2 = \alpha K_{p-1}(\alpha) + (p - \nu_s^*) K_p(\alpha) \quad (2.13)$$

$$f_3 = \beta K_{p-1}(\beta) + (p - \nu_s^*) K_p(\beta), \quad f_4 = \alpha I_{p-1}(\alpha) - (p - \nu_s^*) I_p(\alpha)$$

$$f_5 = f_1 K_p(\alpha), \quad f_6 = f_3 I_p(\alpha)$$

где I_p и K_p — модифицированные функции Бесселя порядка p первого и второго рода.

в) Заполнитель отсутствует ($E_s^* = 0$ или $\varepsilon = 1$)

$$\Delta_1 = 0 \quad (2.14)$$

г) Осесимметричные колебания ($n = 0$)

$$c = \delta^4, \quad \Delta_1 = \frac{12(1-\nu^2)(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} E_s^* \delta^4 (h_{10} h_{20} - h_{30} h_{40}) (h_{50} - h_{60})^{-1}$$

$$h_{10} = \beta J_0(\beta) + (\nu_s^* - 1) J_1(\beta), \quad h_{20} = \alpha Y_0(\alpha) + (\nu_s^* - 1) Y_1(\alpha) \quad (2.15)$$

$$h_{30} = \beta Y_0(\beta) + (\nu_s^* - 1) Y_1(\beta), \quad h_{40} = \alpha J_0(\alpha) + (\nu_s^* - 1) J_1(\alpha)$$

$$h_{50} = h_{10} Y_1(\alpha), \quad h_{60} = h_{30} J_1(\alpha)$$

3. Приняв эквидистантные перемещения равными нулю, мы накладываем на заполнитель дополнительные связи, что должно привести к завышенным значениям частот собственных колебаний. Чтобы компенсировать влияние этих связей, уменьшим жесткость заполнителя, представив его моделью, состоящей из дисков, не связанных между

собой (вторая модель). При этом связанности материала вдоль оси не будет. Соответствующее уравнение для заполнителя будет [6]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \rho_s \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{1 - \nu_s}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1) возьмем в виде

$$u_r = [C_1 J_k(i r) + C_2 J_{-k}(i r)] \cos n \theta e^{i \omega t} \quad (k - \text{не целое}) \quad (3.2)$$

$$u_r = [C_1 J_k(i r) + C_2 Y_k(i r)] \cos n \theta e^{i \omega t} \quad (k - \text{целое}) \quad (3.3)$$

$$k^2 = 1 + \frac{1 - \nu_s}{2} n^2, \quad i^2 = \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \rho_s \omega^2 \quad (3.4)$$

Используя граничные условия (2.5) и имея в виду закон Гука

$$\sigma_r = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_s \frac{u_r}{r} \right) \quad (3.5)$$

получим частотное уравнение вида (2.7), где Δ_2 -член, учитывающий влияние заполнителя, будет

$$\Delta_2 = \frac{12c(1 - \nu^2)}{1 - \nu_s^2} E_s^* (g_1 g_2 - g_3 g_4) (g_5 - g_0)^{-1} \quad (3.6)$$

$$g_1 = \eta J_{k-1}(\eta) + (\nu_s - k) J_k(\eta), \quad g_2 = \xi J_{-(k+1)}(\xi) + (k + \nu_s) J_k(\xi)$$

$$g_3 = \eta J_{-(k+1)}(\eta) + (\nu_s + k) J_{-k}(\eta), \quad g_4 = \xi J_{k-1}(\xi) + (\nu_s - k) J_k(\xi)$$

$$g_5 = g_1 J_{-k}(\xi), \quad g_0 = g_3 J_k(\xi) \quad (k - \text{не целое}) \quad (3.7)$$

$$g_1 = \eta J_{k-1}(\eta) + (\nu_s - k) J_k(\eta), \quad g_2 = \xi Y_{k-1}(\xi) + (\nu_s - k) Y_k(\xi)$$

$$g_3 = \eta Y_{k-1}(\eta) + (\nu_s - k) Y_k(\eta), \quad g_4 = \xi J_{k-1}(\xi) + (\nu_s - k) J_k(\xi)$$

$$g_5 = g_1 Y_k(\xi), \quad g_0 = g_3 J_k(\xi), \quad (k - \text{целое}),$$

$$\xi = \omega^* z \left[\frac{\rho_s^*}{E_s^*} \frac{1 - \nu_s^2}{12(1 - \nu^2)} \right]^{1/2}, \quad \eta = \varepsilon \xi$$

Частные случаи.

а) Заполнитель без отверстия ($\varepsilon = 0$)

$$\Delta_2 = \frac{12(1 - \nu^2) E_s^* c}{1 - \nu_s^2} \frac{g_4}{J_k(\xi)} \quad (3.8)$$

б) Невесомый заполнитель ($\rho_s^* = 0$)

$$\Delta_2 = \frac{12(1 - \nu^2) E_s^* c}{1 - \nu_s^2} \frac{(k + \nu_s)(1 - \nu_s^{2k})}{(k - \nu_s) + (k + \nu_s) \nu_s^{2k}} \quad (3.9)$$

в) Заполнитель отсутствует ($E_s^* = 0$ или $\varepsilon = 1$)

$$\Delta_2 = 0 \quad (3.10)$$

г) Осесимметричные колебания ($n = 0$)

$$c = \delta^4, \quad \Delta_2 = \frac{12(1-\nu_s^2)}{1-\nu_s^2} E_s^* \delta^4 (g_{10}g_{20} - g_{30}g_{40}) (g_{50} - g_{60})^{-1}$$

$$g_{10} = \eta J_0(\eta) + (\nu_s - 1) J_1(\eta), \quad g_{20} = \xi Y_0(\xi) + (\nu_s - 1) Y_1(\xi) \quad (3.11)$$

$$g_{30} = \eta Y_0(\eta) + (\nu_s - 1) Y_1(\eta), \quad g_{40} = \xi J_0(\xi) + (\nu_s - 1) J_1(\xi)$$

$$g_{50} = g_{10} Y_1(\xi), \quad g_{60} = g_{30} J_1(\xi)$$

4. Решая задачу точно, воспользуемся для заполнителя общими уравнениями теории упругости. При осесимметричных колебаниях в отсутствие канала перемещения представим в виде [4]

$$u_x = [C_1 k_m J_0(\varphi r) - C_2 \psi^2 J_0(\psi r)] \cos k_m x e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

$$u_r = -[C_1 \varphi J_1(\varphi r) + C_2 k \psi J_1(\psi r)] \sin k_m x e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

$$\varphi^2 = \frac{\rho_s \omega^2}{\lambda_s + 2\mu_s} - k_m^2, \quad \psi^2 = \frac{\rho_s \omega^2}{\mu_s} - k_m^2 \quad (4.3)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, λ_s и μ_s — константы Ламе.

Подчинив функции (4.1) и (4.2) условиям (4.4) с учетом закона Гука (4.4а)

$$r = R, \quad u_r = w, \quad \tau_{rx} = 0 \quad (4.4)$$

$$\sigma_r = \lambda_s \Delta + \mu_s \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \tau_{rx} = \mu_s \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (4.4a)$$

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

получим частотные уравнения вида (2.7), в котором слагаемое, учитывающее влияние заполнителя, будет

$$\Delta_3 = E_s^* \frac{12(1-\nu_s^2)}{1+\nu_s} \left[\frac{s_1 J_0(\zeta) + s_2 J_0(\gamma)}{\zeta J_1(\zeta) + s_2 J_1(\gamma)} - 1 \right]$$

$$\zeta = \left[\frac{(1-2\nu_s)(1+\nu_s)}{12(1-\nu_s^2)(1-\nu_s)} \frac{\rho_s^* \omega^2 x^2}{E_s^*} - \delta^2 \right]^{1/4} \quad (4.5)$$

$$\gamma = \left[\frac{1+\nu_s}{6(1-\nu_s^2)} \frac{\rho_s^* \omega^2 x^2}{E_s^*} - \delta^2 \right]^{1/4}, \quad s_1 = \delta^2 \frac{\nu_s}{1-\nu_s} + \zeta^2 \frac{1-\nu_s}{1-2\nu_s}$$

$$s_2 = \frac{2\delta^2 \zeta \gamma J_1(\zeta)}{\zeta^2 - \delta^2 J_1(\gamma)}, \quad s_3 = \frac{s_2}{\gamma}$$

Случай невесомого заполнителя получить из (4.5) предельным переходом $\rho_s^* \rightarrow 0$ нельзя, так как при этом в решениях (4.1) и (4.2) теряется одна произвольная постоянная, что не позволяет удовлетворить

двум условиям на поверхности контакта. Поэтому примем $\rho_s = 0$ в исходных уравнениях теории упругости и решение их представим так

$$u_r = [C_1 k r I_1(k_m r) + C_2 J_0(k_m r)] \cos k_m x e^{i \omega t} \quad (4.6)$$

$$u_z = \{ C_1 [k_m r I_0(k_m r) - 4(1 - \nu_s) I(k_m r)] + C_2 I_1(k_m r) \} \sin k_m x e^{i \omega t} \quad (4.7)$$

где $I_0(k_m r)$ и $I_1(k_m r)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Частотное уравнение сохраняет вид (2.7), а член, учитывающий действие заполнителя, будет

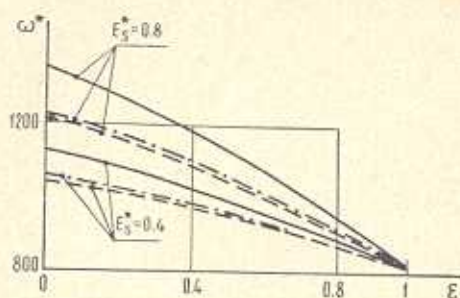
$$\Delta_4 = E_s^* \frac{12(1 - \nu_s^2)}{1 + \nu_s} \left| \frac{\delta^2}{2(1 - \nu_s)} \left(\frac{J_0^2(\delta)}{J_1^2(\delta)} - 1 \right) - 1 \right| \quad (4.8)$$

5. Были вычислены частоты собственных колебаний для оболочки со следующими параметрами:

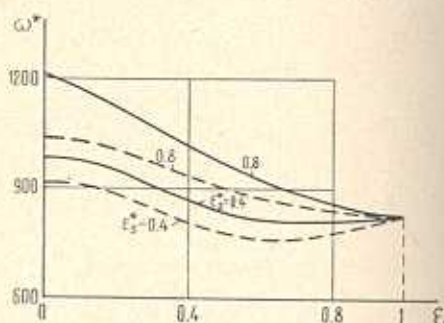
$$\alpha = 1/250; \quad \nu = \nu_s = 0.3; \quad E_s^* = 0; 0.4; 0.8;$$

$$\rho_s^* = 0; 1.0; \quad \varepsilon = 0; 0.3; 0.6; 1.0$$

Результаты представлены на фиг. 1—4. Первые три из них относятся к осесимметричным колебаниям, четвертый — к неосесимметричным.



Фиг. 2.



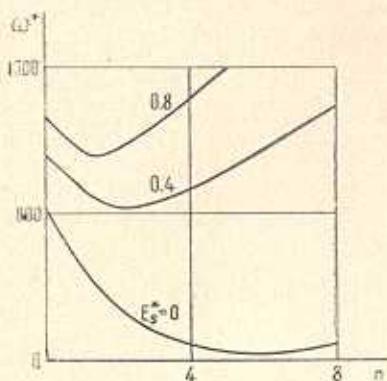
Фиг. 3.

Фиг. 1 показывает, что с увеличением жесткости и уменьшением плотности заполнителя частоты растут. Как и следовало ожидать, вторая модель заполнителя (пунктирные линии) по сравнению с первой (сплошные линии) дает заниженные результаты. Характерно, что при $E_s^* = 0$ и $\rho_s^* \neq 0$ имеет место скачок в значении частоты. Низшая из них равна нулю и соответствует движениям отдельных элементарных масс, на которые распадается заполнитель, лишенный упругости. Вторая частота относится к оболочке без заполнителя, т. к. при $E_s^* = 0$ он перестает существовать как связанное тело, в результате чего с оболочкой колеблется лишь бесконечно тонкий слой заполнителя.

Фиг. 2 и 3 иллюстрируют зависимость частот от величины диаметра канала заполнителя при различной его жесткости. Если запол-

нитель невесомый (фиг. 2) с увеличением диаметра канала частоты падают, причем интенсивность падения растет с увеличением жесткости заполнителя. В случае весомого заполнителя (фиг. 3) частоты могут как падать, так и расти.

На фиг. 2 штрихпунктирными линиями нанесены точные значения частот. Отмечается удовлетворительное совпадение результатов, даваемых моделями и точным решением (разница 2—9%).



Фиг. 4.

Графики на фиг. 4 показывают, что с увеличением жесткости заполнителя число волн, соответствующее минимальной частоте, уменьшается. Заметим, что в задаче устойчивости для критического радиального давления картина обратная—количество волн увеличивается.

Запорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 2 VI 1969

Р. Ա. ԿՐՐՈՒՄՏ, Յու. Բ. ՆԱԳՈՐՆԻ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԼՅՈՆՈՎ ԳՎԱՆԱՅԻՆ ԹԱԳԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Փակ զլանալին թաղանթի համար առաջարկված է լցոնի մոդել հիմնված միայն շառավղային տեղափոխության նկատմամբ առաձգականության տեսության մեկ հավասարմամբ թաղանթի շարժման նկարագրության վրա: Մյուս տեղափոխությունները ընդունվում են հավասար զրոյի:

Թաղանթի և լցոնի ճախատներին նկրային պայմանների մասնավոր դեպքի համար ուսումնասիրված են սեփական տատանումները լցոնի տարրեր կրկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի դեպքում:

ձեզգրիտ լուծման հետ համեմատությունը ցույց է տվել, որ առաջարկված մոդելը բավարար է նկարագրում լցոնի զեֆորմացիան:

ON THE PROBLEM OF PROPER VIBRATIONS OF A
CYLINDRICAL SHELL WITH AN ELASTIC FILLER

B. A. KORBUT, Y. J. NAGORNY

S u m m a r y

A model of an elastic solid filler in closed cylindrical shells is considered. The motion of the filler is described by an equation of the theory of elasticity with respect to a radial displacement. The other two displacements are taken equal to zero. A study is made of free vibrations of the shell and filler having different geometrical and physical parameters for special boundary conditions on the butt-ends.

Comparison with an accurate solution shows that the model suggested describes the filler strain fairly well.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Корбут Б. А., Акульшина Т. С. Динамическая устойчивость оболочек с упругим наполнителем. Сб. „Сопротивление материалов и теория сооружений“, в. 6, изд-во Будівельник, Киев, 1968.
2. Корбут Б. А., Ильина А. М. Собственные колебания цилиндрической панели, связанной с упругим основанием. Прикл. механика, т. IV, в. 5, 1968.
3. Корбут Б. А. Устойчивость в потоке газа круговой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости в строительной механике. Каунас, 1967.
4. Ильина А. М., Корбут Б. А. Собственные колебания цилиндрической оболочки содержащей упругий наполнитель. Инж. журнал, МТТ, № 4, 1968.
5. Власов В. З. Избр. тр., т. I. Изд-во АН СССР, М., 1962.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.