ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 3, 1970 Механика

О. А. ГОЛОВИН

О ВЫНУЖДЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРА

§ 1. Рассматриваются осесимметричные колебания конечного цилиндра с заданными смещениями на поверхности. Для точного решения задачи необходимо построить решение уравнений Ляме

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial r}+2\mu\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=0\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial(r\Omega)}{\partial r}-\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

которое давало бы возможность удовлетворить следующим граничным условиям:

$$
\begin{aligned}
&r=a \quad u_r=0 \quad u_z=V(z)\cos\omega t\\
&z=0 \quad u_r=0 \quad u_z=-U(r)\cos\omega t\\
&z=l \quad u_r=0 \quad u_z=U(r)\cos\omega t
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Случай ненулевых смещений u_r на границе отличается от настоящего лишь более громоздкими свободными членами в бесконечной системе, к которой сводится решение задачи. Приняты обозначения: a — радиус цилиндра, l — длина цилиндра, ρ — плотность материала, λ и μ — постоянные Ляме, ω — частота вынуждающей силы. Предполагается, что ω не совпадает с какой-либо собственной частотой цилиндра. θ и Ω — объемное расширение и вращение, связанные с радиальной u_r и осевой u_z компонентами вектора смещения соотношениями

$$
\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \Omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)
$$

Для получения решения уравнений (1.1) со степенью произвола, достаточной для удовлетворения граничным условиям (1.2), используется метод, берущий свое начало с работы Ляме о параллелепипеде [1]. В последнее время такой подход к решению пространственных задач теории упругости для ограниченных областей развивается в работах [2—5]. Перемещения u_r и u_z представляются в виде сумм решений однородных уравнений Ляме (1.1) для бесконечного упругого слоя толщиной l и цилиндра бесконечной длины радиуса a.

$$u_r = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [\sigma_1(\alpha_m^2) C_m \alpha_m I_1(\alpha_m r) + \sigma_2(\beta_m^2) A_m \lambda_m I_1(\beta_m r)] \sin \lambda_m z + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [-\sigma_2(\delta_n^2) \mu_n (a_n \operatorname{sh} \delta_n z + b_n \operatorname{sh} \delta_n (z-l)) - \sigma_2(\varepsilon_n^2) \varepsilon_n (c_n \operatorname{ch} \varepsilon_n z +$$

$$\left. + d_n \operatorname{ch} \varepsilon_n (z-l))] J_1(\mu_n r) \right\} \cos \omega t \qquad (1.3)$$

$$u_z = \left\{ a_0 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{\omega}{v_1} z + b_0 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{\omega}{v_1} (z-l) + \right.$$

$$+ A_0 \frac{\omega}{v_2} J_0\left(\frac{\omega}{v_2} r\right) + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m \lambda_m I_0(\alpha_m r) + \sigma_2(\beta_m^2) A_m \beta_m I_0(\beta_m r)] \cos \lambda_m z +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_2(\delta_n^2) \delta_n (a_n \operatorname{ch} \delta_n z + b_n \operatorname{ch} \delta_n (z-l)) +$$

$$\left. + \sigma_2(\varepsilon_n^2) \mu_n (c_n \operatorname{sh} \varepsilon_n z + d_n \operatorname{sh} \varepsilon_n (z-l))] J_0(\mu_n r) \right\} \cos \omega t \qquad (1.4)$$

где $\mu_n = \frac{\gamma_n}{a}$, γ_n — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$;

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \qquad \alpha_m^2 = \lambda_m^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2}, \qquad \beta_m^2 = \lambda_m^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2}, \qquad \delta_n^2 = \mu_n^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2},$$

$\varepsilon_n^2 = \mu_n^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2}$, $v_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ и $v_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ — скорости волн объемного расширения и искажения соответственно. $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя,

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad \sigma_2(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -i, & x < 0, \text{ где } i^2 = -1 \end{cases}$$

A_0, a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n, A_m, C_m — произвольные постоянные.

Граничные условия для u_r накладывают следующую связь на произвольные постоянные:

$$C_m \sigma_1(\alpha_m^2) \alpha_m I_1(\alpha_m a) = -A_m \sigma_2(\beta_m^2) \lambda_m I_1(\beta_m a)$$

$$(c_n + d_n \operatorname{ch} \varepsilon_n l) \sigma_2(\varepsilon_n^2) \varepsilon_n = b_n \mu_n \sigma_2(\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l \qquad (1.5)$$

$$(c_n \operatorname{ch} \varepsilon_n l + d_n) \sigma_2(\varepsilon_n^2) \varepsilon_n = -a_n \sigma_2(\delta_n^2) \mu_n \operatorname{sh} \delta_n l$$

Подставляя (1.4) в граничные условия для осевого смещения и используя соотношения (1.5) и разложения

$$I_0(\lambda r) = \frac{2I_1(\lambda a)}{\lambda a} + \frac{2\lambda I_1(\lambda a)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{(\lambda^2+\mu_n^2)\,J_0(\gamma_n)} \qquad 0 < r \leqslant a$$

$$\operatorname{ch}\delta z = \frac{\operatorname{sh}\delta l}{\delta l} + \frac{2\delta \operatorname{sh}\delta l}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m \cos\lambda_m z}{\lambda_m^2+\delta^2} \qquad 0 \leqslant z \leqslant l$$

$$\operatorname{sh}\delta z = \frac{\operatorname{ch}\delta l - 1}{\delta l} + \frac{2\delta \operatorname{ch}\delta l}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m \cos\lambda_m z}{\lambda_m^2+\delta^2} -$$

$$-\frac{2\delta}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_m z}{\lambda_m^2+\delta^2} \qquad 0 \leqslant z \leqslant l$$

получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно A_0, a_0, b_0, A_m, a_n, b_n

$$A_0 l \frac{\omega}{v_2} J_0\left(\frac{\omega}{v_2} a\right) + (a_0 + b_0)\sin\frac{\omega}{v_1} l +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)\,\sigma_2(\delta_n^2)\operatorname{sh}\delta_n l\,J_0(\gamma_n)\left(1 - \sigma_1(\varepsilon_n^2)\frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n^2}\right) = V_0$$

$$a_0\frac{\omega}{v_1} + b_0\frac{\omega}{v_1}\cos\frac{\omega}{v_1} l + A_0 B_0 +$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sigma_2(\beta_m^2)\,I_1(\beta_m a)\left(1 - \sigma_1(\alpha_m^2)\frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2}\right) = -U_0$$

$$a_0\frac{\omega}{v_1}\cos\frac{\omega}{v_1} l + b_0\frac{\omega}{v_1} + A_0 B_0 +$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m A_m\sigma_2(\beta_m^2)\,I_1(\beta_m a)\left(1 - \sigma_1(\alpha_m^2)\frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2}\right) = U_0$$

$$A_m\sigma_2(\beta_m^2)\,I_1(\beta_m a)\,\psi_m + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(-1)^m + b_n]\,\sigma_2(\delta_n^2)\operatorname{sh}\delta_n l \times$$

$$\times J_0(\gamma_n)\left(\frac{\delta_n^2}{\delta_n^2+\lambda_m^2} - \sigma_1(\varepsilon_n^2)\frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n^2+\lambda_m^2}\right) +$$

$$+[a_0(-1)^m + b_0]\,\frac{2}{l}\,\frac{\frac{\omega^2}{v_1^2}\sin\frac{\omega}{v_1} l}{\frac{\omega^2}{v_1^2} - \lambda_m^2} = V_m \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(a_n p_n + b_n q_n)\,\sigma_2(\delta_n^2)\,\mathrm{sh}\,\delta_n l\, J_0(\gamma_n) + \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sigma_2(\beta_m^2)\, I_1(\beta_m a)\left(\frac{\beta_m^2}{\beta_m^2+\mu_n^2} - \right.$$

$$\left. - \sigma_1(\alpha_m^2)\frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2+\mu_n^2}\right) + A_0 B_n J_0(\gamma_n) = - U_n J_0(\gamma_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(a_n q_n + b_n p_n)\,\sigma_2(\delta_n^2)\,\mathrm{sh}\,\delta_n l\, J_0(\gamma_n) + \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m \sigma_2(\beta_m^2)\, I_1(\beta_m a)\left(\frac{\beta_m^2}{\beta_m^2+\mu_n^2} - \right.$$

$$\left. - \sigma_1(\alpha_m^2)\frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2+\mu_n^2}\right) + A_0 B_n J_0(\gamma_n) = U_n J_0(\gamma_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

где B_0, B_n, U_0, U_n — коэффициенты разложения в ряд Дини по $J_0(\gamma_n r)$ функции $J_0\left(\frac{\omega}{v_2} r\right)$ и амплитуды вынуждающей силы $U(r)$,

$$V(z) = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} V_m \cos\lambda_m z, \qquad \psi_m = \beta_m \frac{I_0(\beta_m a)}{I_1(\beta_m a)} - \sigma_1(\alpha_m^2)\frac{\lambda_m^2}{\alpha_m}\frac{I_0(\alpha_m a)}{I_1(\alpha_m a)}$$

$$p_n = \frac{\delta_n}{\mathrm{sh}\,\delta_n l} - \sigma_1(\varepsilon_n^2)\frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n}\frac{1}{\mathrm{sh}\,\varepsilon_n l}, \qquad q_n = \delta_n\,\mathrm{cth}\,\delta_n l - \sigma_1(\varepsilon^n)\frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n}\mathrm{cth}\,\varepsilon_n l$$

Перейдя к новым переменным $Z_0 = \frac{1}{a} A_0$, $X_0 = \frac{1}{l}(b_0 + a_0)$, $Y_0 = \frac{1}{l}(b_0 - a_0)$, $Z_m = \frac{A_m}{a}\sigma_2(\beta_m^2)\, I_1(\beta_m a)$, $X_n = \frac{b_n + a_n}{l}\sigma_2(\delta_n^2)\,\mathrm{sh}\,\delta_n l\, J_0(\gamma_n)$, $Y_n = \frac{b_n - a_n}{l}\sigma_2(\delta_n^2)\,\mathrm{sh}\,\delta_n l\, J_0(\gamma_n)$ легко заметить, что общая задача о колебаниях распадается на две независимые задачи: задачу определения колебаний, симметричных относительно плоскости $Z = \frac{l}{2}$

$$X_0\frac{\omega}{v_1}\left(1 + \cos\frac{\omega}{v_1} l\right) = -2\frac{a}{l} B_0 Z_0 - \frac{4}{l}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} Z_m\left(1 - \sigma_1(\alpha_m^2)\frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2}\right)$$

$$Z_0\frac{\omega}{v_2} J_0\left(\frac{\omega}{v_2} a\right) = -X_0 \sin\frac{\omega}{v_1} l - \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} X_n\left(1 - \sigma_1(\varepsilon_n^2)\frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n^2}\right) + V_0 \qquad (1.6)$$

$$X_n = -Z_0\frac{a}{l}\frac{B_n J_0(\gamma_n)}{q_n + p_n} - \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} a_{nm} Z_m, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$Z_m = -X_0\frac{2}{a}\frac{\omega^2}{v_1^2}\frac{\sin\frac{\omega}{v_1} l}{\frac{\omega^2}{v_1^2} - \lambda_m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} X_n + \varkappa_m, \quad m = 2, 4, 6, \ldots$$

и задачу о кососимметричных колебаниях

$$Y_0\frac{\omega}{v_1}\left(-1+\cos\frac{\omega}{v_1}l\right)=-\frac{4}{l}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}Z_m\left(1-\sigma_1(\alpha_m^2)\frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2}\right)-2U_0$$

$$Y_n=-\frac{4}{l}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}c_{nm}Z_m+\vartheta_n \quad n=1,\,2,\,3,\ldots \tag{1.7}$$

$$Z_m=-Y_0\frac{2}{a}\frac{\omega^2}{v_1^2}\frac{\sin\frac{\omega}{v_1}l}{\frac{\omega^2}{v_1^2}-\lambda_m^2}-\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}Y_n+\varkappa_m, \quad m=1,\,3,\,5,\ldots$$

В (1.6) и (1.7) введены обозначения

$$a_{nm}=\frac{4\omega^2}{lv_1^2}\frac{1}{(q_n+p_n)}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}$$

$$c_{nm}=\frac{4\omega^2}{lv_1^2}\frac{1}{(q_n-p_n)}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}$$

$$b_{mn}=\frac{2\omega^2}{av_1^2}\frac{1}{\psi_m}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)} \tag{1.8}$$

$$\vartheta_n=-\frac{2U_nJ_0(\gamma_n)}{q_n-p_n}, \qquad \varkappa_m=\frac{V_m}{\psi_m}, \qquad s^2=\frac{v_1^2}{v_2^2}$$

§ 2. При исследовании бесконечных систем (1.6) и (1.7) ограничимся случаем симметричных относительно плоскости $z=\frac{l}{2}$ колебаний, так как существование решения второй задачи доказывается аналогично. При этом удобно с помощью известных тождеств [3]

$$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+\mu_n^2}=\frac{I_0(ka)}{I_1(ka)}-\frac{2}{ka}, \qquad \frac{4}{\pi}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{k}{k^2+m^2}=\operatorname{th}\frac{\pi k}{2}$$

преобразовать выражения ψ_m и q_n+p_n к следующему виду:

$$\psi_m=-\frac{2}{a}\frac{\omega^2}{v_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}-\frac{2}{a}\frac{\lambda_m^2-|\alpha_m^2|}{|\alpha_m^2|}$$

$$q_n+p_n=-\frac{4}{l}\frac{\omega^2}{v_1^2}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}-\frac{2}{l}\frac{\mu_n^2-|\varepsilon_n^2|}{|\varepsilon_n^2|} \tag{2.1}$$

Рассмотрим сумму коэффициентов в каждой строке уравнений (1.6).

Принимая во внимание (1.8), (2.1) и что $B_n = -\frac{2}{a}\frac{J_1\left(\frac{\omega}{v_2}a\right)}{J_0(\gamma_n)}\frac{1}{\varepsilon_n}$, легко получить

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_{mn}| = \frac{\frac{2}{a}\frac{\omega^2}{v_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}+\frac{2}{a}\frac{\omega^2}{v_1^2}\frac{\sin\frac{\omega}{v_1}l}{\alpha_m^2}}{\frac{2}{a}\frac{\omega^2}{v_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}+\frac{2}{a}\frac{\lambda_m^2-|\alpha_m^2|}{|\alpha_m^2|}}$$

$$\sum_{m=0,\,2,\dots}^{\infty}|a_{nm}| = \frac{\frac{4}{l}\frac{\omega^2}{v_1^2}\sum_{m=2,\,4,\dots}^{\infty}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}+\frac{2}{l}\frac{\omega^2}{v_1^2}\frac{J_1\left(\frac{\omega}{v_2}a\right)}{\varepsilon_n^2}}{\frac{4}{l}\frac{\omega^2}{v_1^2}\sum_{m=2,\,4,\dots}^{\infty}\frac{\lambda_m^2+s^2\delta_n^2}{(\alpha_m^2+\mu_n^2)(\beta_m^2+\mu_n^2)}+\frac{2}{l}\frac{\mu_n^2-|\varepsilon_n^2|}{|\varepsilon_n^2|}}$$

так как $\left|\sin\frac{\omega}{v_1}l\right|\leqslant 1$ и $\left|J_1\left(\frac{\omega}{v_2}a\right)\right|<1$, то как только $m>M$ и $n>N$, где M и N такие, что $\alpha_M^2>0$ и $\varepsilon_N^2>0$, то сейчас же будут выполняться неравенства $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_{mn}|<1$ и $\sum\limits_{m=0,\,2,\dots}^{\infty}|a_{nm}|<1$, т. е. система (1.6) квазирегулярная.

Докажем теперь, что совокупность свободных членов систем (1.6) и (1.7) ограничена. Из теории бесселевых функций [6] известно, что если $t^{\frac{1}{2}}f(t)$ имеет ограниченное изменение на $(c,\,d)$, где $(c,\,d)$ является какой-нибудь частью интервала $(0,\,a)$, то при $\mu\to\infty$

$$\int_c^d tf(t)\,J_n(\mu_n t)\,dt = O(\mu^{-\frac{3}{2}})$$

Согласно приведенной оценке $\vartheta_n = O(\mu^{-\frac{1}{2}})$, $\varkappa_m = O(\lambda_m^{-\frac{1}{2}})$. Таким образом, если конечная система уравнений относительно $X_0, X_1,\dots, X_N$ и $Z_0, Z_2,\dots, Z_M$, через которые можно выразить все остальные неизвестные, имеет единственное решение, то единственно и решение системы (1.6) [7].

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 2 VI 1969

Օ. Ա. ԳՈԼՈՎԻՆ

ԳԼԱՆԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում են վերջավոր գլանի առանցքասիմետրիկ տատանումները՝ մակերևույթի վրա տեղափոխությունների տրման դեպքում: Ստիպողական տատանումների ամպլիտուդայի նկատմամբ ստացված է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմ: Ապացուցված է սիստեմի քվազիռեգուլյարությունը այն ենթադրությամբ, որ հարկադրող ուժի հաճախականությունը չի համընկնում գլանի որևէ սեփական տատանումների հաճախականության հետ:

ON FORCED LONGITUDINAL VIBRATION OF A CYLINDER

O. A. GOLOVIN

S u m m a r y

The problem of longitudinal axisymmetric vibration of a finite cylinder is reduced to an infinite system of algebraic equations. The quasiregularity of this system is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamé. Lecons sur la theorie mathematique de l'élasticite des corps solides. Paris, 1852.
2. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. 19, № 1, 1954.
3. *Валов Г. М.* Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины. ПММ, т. 26, № 4, 1962.
4. *Гринченко В. Г.* Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины. Прикл. механика, т. 3, № 8, 1967.
5. *Гринченко В. Г.* Напряженное состояние упругого толстого диска в поле центробежных сил. Тр. IV Всесоюзной конференции. по теории оболочек и пластин, Ереван, 1962.
6. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962.