

Р. М. КИРАКОСЯН

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КРУГЛОГО ВАЛА

Рассматривается квазистатическая задача об упруго-пластическом изгибе круглого вращающегося вала, несущего в торцевых сечениях постоянную изгибающую пару сил. Исследования проводятся в рамках теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющегося материала [1], при этом вращение вала предполагается настолько медленным, чтобы возможно было пренебрежение влиянием инерционных сил. Анализируется поведение деформаций отдельных характерных частей поперечного сечения вала, обусловленное вращением последнего, и с помощью гипотезы плоских сечений выводится разрешающая система задачи в виде двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Путем элементарных видоизменений разрешающая система сводится к виду, удобному для проведения метода упругих решений Ильюшина. Приводится пример вычисления значений искомых функций при первом приближении, когда за нулевое приближение принимается решение классической упруго-пластической задачи.

1. Рассмотрим вал круглого поперечного сечения радиуса  $R$  и длины  $l$ , находящийся в естественном состоянии. Будем считать, что вал изготовлен из такого материала, для которого справедливы соотношения теории малых упруго-пластических деформаций при линейном упрочнении [1].

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s \\ \sigma &= A + B\varepsilon \quad \varepsilon > \varepsilon_s \quad (\text{при нагружении}) \\ d\sigma &= Ed\varepsilon \quad d\varepsilon < 0 \quad (\text{при разгрузке}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma$  — напряжение,  $\varepsilon$  — деформация,  $E$  — модуль Юнга,  $\varepsilon_s$  — предел упругих деформаций,  $B < E$  и  $A = (E - B)\varepsilon_s$  — характеристики материала за пределом упругости.

Поместив начало прямоугольных декартовых координат в центре одного из торцевых сечений вала, направим ось  $oy$  вертикально вверх, а оси  $ox$  и  $oz$  так, чтобы координатная система была правой (фиг. 1а).

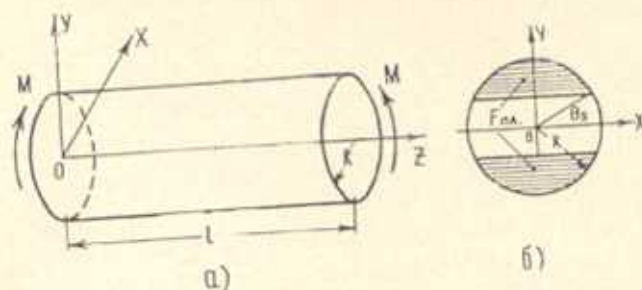
Пусть в торцевых сечениях вала  $z = 0$  и  $z = l$  в плоскости  $yoz$  приложена постоянная изгибающая пара сил  $M$ . Как нетрудно убедиться, при

$$M > M_s = \frac{E\varepsilon_s R^3}{4}$$

появляются области пластического деформирования  $F_{пл}$  (фиг. 1б), и изгиб вала в общем будет упруго-пластическим. В этом случае связь между значениями изгибающего момента  $M$  и кривизной  $\chi_0$  активно деформированного вала в предположении гипотезы плоских сечений имеет вид

$$M = \frac{AR^3}{24y_s} [32y_s \cos^3 \theta_s + 3R(4\theta_s - \sin 4\theta_s)] + \frac{B\pi\chi_0 R^4}{4} \quad (1.2)$$

где  $\theta_s = \arcsin y_s/R$ ,  $y_s = z_s/\chi_0$  — расстояние границы пластической зоны от нейтральной оси  $ox$ .



Фиг. 1.

Рассмотрим специальный случай изгиба вала. Пусть деформированный таким образом вал начинает медленно вращаться по некоторому направлению, скажем, по обратному направлению вращения часовой стрелки, продолжая при этом все время находиться под действием постоянного момента  $M$ , приложенного в неподвижной плоскости  $yoz$ . Для удобства, в дальнейшем условно будем считать, что вал неподвижен, а вращается плоскость действия изгибающего момента, но уже по направлению вращения часовой стрелки. Положение плоскости действия изгибающего момента будем определять углом  $\varphi$ , отсчитываемым от первоначальной плоскости его действия  $yoz$ . Вращение изгибающего момента будем считать однонаправленным и настолько медленным, чтобы возможно было влиянием инерционных сил пренебречь. Гипотезу плоских сечений представим в виде

$$z(x, y, \varphi) = a(\varphi)x + b(\varphi)y \quad (1.3)$$

где  $a(\varphi)$  и  $b(\varphi)$  — искомые функции только угла  $\varphi$ . При этом изогнутая ось вала будет находиться в плоскости

$$y = \frac{b(\varphi)}{a(\varphi)}x \quad (1.4)$$

(плоскость изгиба) и иметь кривизну

$$\chi(\varphi) = \sqrt{a^2(\varphi) + b^2(\varphi)} \quad (1.5)$$

Ясно, что нахождением функций  $a(\varphi)$  и  $b(\varphi)$  фактически завершается решение задачи.



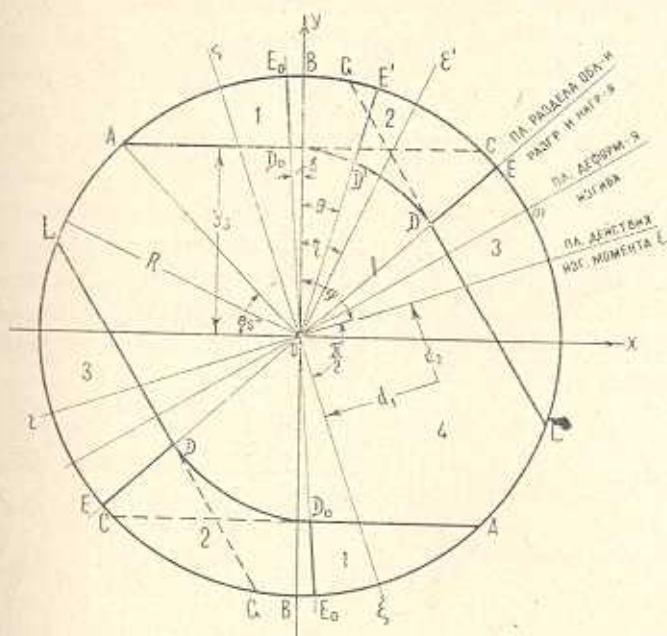
Заметим, что при обычном упруго-пластическом изгибе вала

$$a_0(\varphi) = x_0 \sin \varphi, \quad b_0(\varphi) = x_0 \cos \varphi \quad (1.6)$$

фигурирующая здесь постоянная  $x_0$  является кривизной изогнутой оси вала и удовлетворяет уравнению (1.2). Причем ось деформированного вала в этом случае находится в плоскости действия изгибающего момента

$$y = x \operatorname{ctg} \varphi \quad (1.7)$$

Пусть изгибающий момент  $M$  вращением отклонился от первоначального положения  $\varphi = 0$  на некоторый угол  $\varphi > 0$  и действует в плоскости (1.7). Если при  $\varphi = 0$  областями пластических деформаций являлись сегменты  $ABCA$  (фиг. 2), то при  $\varphi > 0$  такими областями будут части поперечного сечения вала  $ABCELD_0A$ . Для простоты в дальнейшем области  $AE_0D_0A$ ,  $D_0E_0EDD_0$ ,  $DELD$  и  $AD_0DLAD_0DLA$  будем обозначать, соответственно, номерами 1, 2, 3, и 4. Величины же, относящиеся к этим областям, в случае необходимости, будем снабжать соответствующими индексами (например,  $\tau_1$  — напряжение точек области 1, т. е. области  $AE_0D_0A$ ).



Фиг. 2.

Плоскость раздела областей разгрузки и нагружения при данном текущем положении изгибающего момента (точнее, при дальнейшем его вращении на бесконечно малый угол  $d\varphi$ ) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.8)$$

Из этого условия, с учетом (1.3), для плоскости раздела областей разгрузки и нагружения получаем

$$y = -\frac{a'(\varphi)}{b'(\varphi)}x \quad (1.9)$$

(штрихом будем обозначать дифференцирование по  $\varphi$ ).

Уравнение этой плоскости в самом начале вращения плоскости действия изгибающего момента (т. е. при  $\varphi = 0$ ) имеет вид

$$y = -\frac{a'(0)}{b'(0)}x = x \operatorname{ctg} \delta, \quad \left( \operatorname{ctg} \delta = -\frac{a'(0)}{b'(0)} \right) \quad (1.10)$$

Здесь  $\delta$ —угол, образуемый между вертикальной плоскостью  $oB$  и плоскостью раздела областей разгрузки и нагружения  $oEo$  при  $\varphi = 0^*$ .

Это означает, что в самом начале, когда изгибающий момент от вертикального положения  $\varphi = 0$  отклоняется на бесконечно малый угол  $d\varphi$ , среди пластически деформированных частей поперечного сечения вала разгрузку испытывают только области 1.

При дальнейшем вращении изгибающего момента плоскость раздела областей разгрузки и нагружения (1.9) непрерывно вращается в ту же сторону. В силу этого область разгрузки, распространяясь, включает в себя все новые и новые пластически деформированные части поперечного сечения вала 2. Следовательно, при произвольном угле  $\varphi > 0$  разгрузкой охватываются пластически деформированные области 1 + 2.

Заметим, что границами областей 2, нарастающих с вращением изгибающего момента, являются отрезки в первоначальной плоскости раздела областей разгрузки и нагружения  $D_0E_0$ , отрезки в текущей плоскости раздела областей разгрузки и нагружения  $DE$ , дуги  $E_0E$  и линии  $D_0D$ . Причем линии  $D_0D$  являются геометрическими местами точек пересечения текущей плоскости раздела областей разгрузки и нагружения (1.9) с границами соответствующих областей пластического деформирования  $LG$ , на которых

$$a(\varphi)x + b(\varphi)y = \varepsilon_s \quad (1.11)$$

Пользуясь уравнениями (1.9) и (1.11), для линии  $D_0D$  получим следующие параметрические уравнения:

$$x = \frac{b'(\varphi)\varepsilon_s}{a(\varphi)b'(\varphi) - a'(\varphi)b(\varphi)}, \quad y = -\frac{a'(\varphi)\varepsilon_s}{a(\varphi)b'(\varphi) - a'(\varphi)b(\varphi)} \quad (1.12)$$

Естественно ожидать, что плоскость раздела областей разгрузки и нагружения (1.9) отстает от плоскости изгиба (1.4). В этом нетрудно убедиться, если иметь в виду, что значение наибольшей деформации, которое получается в точках пересечения плоскости изгиба (1.4) с боковой поверхностью вала (в точках  $m$ ), из-за усиления влияния остаточных деформаций с течением времени должно возрастать.

Что касается областей пластического деформирования 3, то они, находясь в области нагружения, при данном  $\varphi > 0$  испытывают только нагрузку.

\* В дальнейшем доказывается, что  $\delta = 0$ .



Остальная же часть поперечного сечения вала 4 деформируется только упруго, в силу чего смысла нет ее разбивать на разгружаемые и нагружаемые части.

При обычном упруго-пластическом изгибе плоскость действия изгибающего момента является плоскостью симметрии деформирования, т. е. плоскостью изгиба.

Покажем, что плоскость изгиба (1.4) в случае вращающегося момента не совпадает с плоскостью действия изгибающего момента (1.7), а именно: отстает от нее. С этой целью заметим, что напряжения точек разгружаемых пластических областей 1+2 меньше, чем напряжения точек, соответственно симметричных им относительно плоскости изгиба (1.4). Напряжения же остальных точек, взаимносимметричных относительно плоскости (1.4), одинаковы.

Условие равновесия, записанное относительно плоскости действия изгибающего момента (1.7), имеет вид

$$\sum M_{\parallel} = 0 \quad (1.13)$$

( $M_{\parallel}$  — момент напряжений относительно плоскости действия изгибающего момента  $\xi\xi$ ).

Имея в виду вышесказанное замечание относительно напряжений, легко убедиться, что для соблюдения условия (1.13) необходимо, чтобы плоскость деформирования (1.4) не совпадала с плоскостью действия изгибающего момента (1.7), а именно: отставала от нее.

Рассмотрим напряженные состояния вышеотмеченных характерных частей поперечного сечения вала при произвольном положении изгибающего момента в отдельности. Для удобства будем пользоваться системой полярных координат

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (1.14)$$

Области 1. Эти области разгружаются, начиная с самого начала вращения изгибающего момента. Причем они разгружаются от значений первоначальных напряжений  $\tau^0$  и деформаций  $\varepsilon^0$ , имеющих место при  $\varphi = 0$ , до тех значений  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_s$ , которые соответствуют данному положению изгибающего момента. Имея в виду, что разгрузка является упругим процессом, для напряжений точек областей 1 с учетом (1.1) и (1.14) получим [1]

$$\sigma_1(r, \theta, \varphi) = A \left( 1 - \frac{r}{r_s} \right) + E\varepsilon \quad (1.15)$$

где

$$r_s = y_s / \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} + \theta_s \leq \theta \leq \theta, \quad r_s \leq r \leq R \quad (1.16)$$

Области 2. В одной из областей 2 рассмотрим произвольный радиальный отрезок  $D'E'$ , составляющий с вертикалью угол  $\theta > \theta_s$ . Так как в начале вращения изгибающего момента ( $\varphi = 0$ ) плоскость раздела областей разгрузки и нагружения составляет с вертикальной плос-

костью угол  $\delta$ , то радиальный отрезок  $D'E'$  вначале будет нагружаться, причем нагружаться до тех пор, пока плоскость раздела областей разгрузки и нагружения не дойдет до него, после чего, охватываясь областью разгрузки, он будет разгружаться. Пусть плоскость раздела областей разгрузки и нагружения доходит до рассмотренного отрезка тогда, когда изгибающий момент отклоняется от вертикальной плоскости на угол  $\eta$  ( $\varphi = \eta$ ). С учетом (1.9) между углами  $\theta$  и  $\eta$  находим зависимость

$$\theta = -\operatorname{arctg} \frac{b'(\eta)}{a'(\eta)} \quad (1.17)$$

Таким образом, данный радиальный отрезок, определяемый углом  $\theta > \delta$ , перестанет нагружаться и приступит к разгрузке тогда, когда изгибающий момент отклонится на угол  $\eta$ , удовлетворяющий условию (1.17). Причем разгрузка радиального отрезка  $D'E'$  будет происходить от уровня деформирования

$$\varepsilon^0 = r [a(\eta) \sin \theta + b(\eta) \cos \theta] \quad (1.18)$$

достигаемого в момент удовлетворения условия (1.17), до того уровня  $\varepsilon$ , который отвечает окончательному положению изгибающего момента  $\varphi$ . Имея в виду упругий характер процесса разгрузки, для напряжений точек отрезка  $D'E'$  получим

$$\sigma_2(r, \theta, \varphi) = A \left( 1 - \frac{r}{r_{s_2}} \right) + E\varepsilon$$

$$\delta \leq \theta \leq \theta_1, \quad r_{s_2} \leq r \leq R \quad (1.19)$$

где  $r_{s_2}(\eta)$  — расстояние точки  $D'$  от центра поперечного сечения вала  $o$ ,  $\theta_1$  — полярный угол плоскости раздела областей разгрузки и нагружения при окончательном положении изгибающего момента  $\varphi$ . С учетом (1.12), (1.14) и (1.17) для  $r_{s_2}$  и  $\theta_1$  находим

$$r_{s_2} = \frac{\sqrt{a'^2(\eta) + b'^2(\eta)}}{|a(\eta)b'(\eta) - a'(\eta)b(\eta)|} \varepsilon_s, \quad (0 \leq \eta \leq \varphi) \quad (1.20)$$

$$\theta_1 = -\operatorname{arctg} \frac{b'(\varphi)}{a'(\varphi)} \quad (\text{линия } DE) \quad (1.21)$$

Еще раз отметим, что углы  $\theta$  и  $\eta$  связаны между собой уравнением (1.17).

Области 3. Эти области испытывают только нагружение, в силу чего напряжения точек этих областей выражаются формулой активного пластического деформирования (1.1)

$$\sigma_3(r, \theta, \varphi) = A + B\varepsilon$$

$$r_{s_3} \leq r \leq R, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (1.22)$$

где

$$r_{s_3} = \frac{\varepsilon_s}{a(\varphi) \sin \theta + b(\varphi) \cos \theta} \quad (\text{линия } DL)$$



$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{a(\varphi)}{b(\varphi)} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon_s} \sqrt{R^2 [a^2(\varphi) + b^2(\varphi)] - \varepsilon_s^2}$$

(полярный угол точки  $L$ ). (1.23)

Для простоты (избегая учета эффекта Баушингера) будем ограничиваться случаем

$$\frac{\pi}{2} - \theta_s \leq \theta_2(\varphi) \leq \frac{\pi}{2} + \theta_s \quad (1.24)$$

т. е. случаем, когда изгибающий момент вращается настолько, что путем обратного нагружения предел упругости нигде не превосходитс.

Область 4. Это есть область упругого деформирования. Поэтому

$$\sigma_4 = E\varepsilon \quad (1.25)$$

Границы области 4 не подчеркиваем, так как ее будем рассматривать как остальную часть поперечного сечения вала.

Уравнения равновесия вала представим в виде

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \sigma_i d_1 d\Omega_i = M, \quad (d_1 = r \cos(\theta - \varphi))$$

(1.26)

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \sigma_i d_2 d\Omega_i = 0, \quad (d_2 = r \sin(\varphi - \theta))$$

Первое из этих уравнений выражает условие уравновешенности приложенного изгибающего момента  $M$  с суммой моментов напряжений поперечного сечения вала относительно плоскости  $rr$ , перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента  $\xi\xi$ . Второе же уравнение выражает тот факт, что при равновесии сумма моментов напряжений относительно плоскости действия изгибающего момента  $\xi\xi$  равняется нулю.

Произведя необходимое интегрирование в соответствующих пределах, при этом имея в виду (1.15) — (1.25), для разрешающей системы задачи из (1.26) получим

$$\begin{aligned} a(\varphi) \sin \varphi + b(\varphi) \cos \varphi &= L_1(\varphi) \\ a(\varphi) \cos \varphi - b(\varphi) \sin \varphi &= L_2(\varphi) \end{aligned} \quad (1.27)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} L_1(\varphi) &= \frac{A}{3\varepsilon ER^4 y_s} \left\{ \left[ 3R^4 \left( \delta + \frac{\sin 2\delta}{2} + \operatorname{arc} \cos \frac{y_s}{R} \right) + 2y_s^4 \operatorname{tg} \delta - \right. \right. \\ &\left. \left. - y_s (5R^2 - 2y_s^2) \sqrt{R^2 - y_s^2} \right] \cos \varphi - \left( 6R^2 y_s^2 + 3R^4 \cos^2 \delta - \frac{y_s^4}{\cos^2 \delta} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin \varphi \left\{ + \frac{2A}{3\pi ER^4 \varepsilon_s} \int_0^{\varphi} [a'(\eta) \cos \varphi - b'(\eta) \sin \varphi] \Phi(\eta) d\eta + \frac{A \varepsilon_s^3}{3\pi ER^4 b^2} \times \right. \\
& \times \left\{ \frac{X}{\varepsilon_s^2 c^2} [X(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + 2bY \cos \varphi] + \frac{b'}{e^2} [(2a'b - ab') \cos \varphi - \right. \\
& \left. \left. - bb' \sin \varphi] \right\} - \frac{8A}{3\pi ER^2 c} \left( X \cos \varphi - Y \sin \varphi \right) + \frac{A}{\pi E \varepsilon_s} \left\{ (b \cos \varphi + a \sin \varphi) d + \right. \\
& \left. + (a \cos \varphi + b \sin \varphi) \left( \frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) + (b \cos \varphi - a \sin \varphi) \left( \frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a' b'}{f} \right) \right\} + \\
& \left. + \frac{4M}{\pi ER^4} \right\} + \tag{1.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(\varphi) = & - \frac{A}{3\pi ER^4 y_s} \left\{ \left[ 3R^4 \left( \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \arccos \frac{y_s}{R} \right) + 2y_s^4 \operatorname{tg} \varphi - \right. \right. \\
& \left. \left. - y_s (5R^2 - 2y_s^2) \sqrt{R^2 - y_s^2} \right] \sin \varphi + \left( 6R^2 y_s^2 + 3R^4 \cos^2 \varphi - \frac{y_s^4}{\cos^2 \varphi} \right) \times \right. \\
& \left. \times \cos \varphi \right\} - \frac{2A}{3\pi ER^4 \varepsilon_s} \int_0^{\varphi} [a'(\eta) \sin \varphi + b'(\eta) \cos \varphi] \Phi(\eta) d\eta - \\
& - \frac{A \varepsilon_s^3}{3\pi ER^4 b^2} \left\{ \frac{X}{\varepsilon_s^2 c^2} [X(a \sin \varphi - b \cos \varphi) + 2bY \sin \varphi] + \frac{b'}{e^2} [(2a'b - ab') \times \right. \\
& \times \sin \varphi + bb' \cos \varphi] \left\} + \frac{8A}{3\pi ER^2 c} (X \sin \varphi + Y \cos \varphi) - \frac{A}{\pi E \varepsilon_s} \times \\
& \times \left[ (b \sin \varphi - a \cos \varphi) d + (a \sin \varphi - b \cos \varphi) \left( \frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) + \right. \\
& \left. + (b \sin \varphi + a \cos \varphi) \left( \frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a' b'}{f} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$c = a^2 + b^2, \quad e = ab' - a'b, \quad f = a'^2 + b'^2, \quad g = a'' b' - a' b''$$

$$X = a \varepsilon_s + b \sqrt{R^2 c - \varepsilon_s^2}, \quad Y = b \varepsilon_s - a \sqrt{R^2 c - \varepsilon_s^2} \tag{1.29}$$

$$d = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b'}{a'} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{R^2 c - \varepsilon_s^2}}{\varepsilon_s}$$

$$\Phi(\eta) = \frac{g(f \varepsilon_s^4 + 3R^4 e^4)}{f^2 |e|^3}$$



Имея в виду, что решения обычной упруго-пластической задачи и задачи с вращающим изгибающим моментом при  $\varphi = 0$  должны совпадать, из (1.6) получим

$$a(0) = 0, \quad b(0) = r_0 \quad (1.30)$$

Таким образом, решение задачи упруго-пластического чистого изгиба вращающегося круглого вала сводится к решению системы двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.27) с начальными условиями (1.30).

Подставляя в систему уравнений (1.27)  $\varphi = 0$  и имея в виду (1.28) — (1.30), находим

$$3R^4 \left( 2\delta + \frac{\sin 2\delta}{2} - \frac{a'(0) b'(0)}{a'^2(0) + b'^2(0)} \right) + 2y_s^4 \left( \operatorname{tg} \delta + \frac{b'(0)}{a'(0)} \right) = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{y_s^4}{3} \left( \frac{b'^2(0)}{a'^2(0)} - \operatorname{tg}^2 \delta \right) + \frac{R^4}{y_s} \left( \frac{b'^2(0)}{a'^2(0) + b'^2(0)} - \sin^2 \delta \right) = 0$$

С помощью (1.10) легко заметить, что второе из уравнений (1.31) удовлетворяется тождественно, а первое сводится к виду

$$2\delta + \sin 2\delta = 0 \quad (1.32)$$

откуда следует

$$\delta = 0 \quad (1.33)$$

Это означает, что в самом начале вращения плоскости действия изгибающего момента от вертикального положения  $\varphi = 0$  на бесконечно малый угол  $d\varphi$  плоскость раздела областей разгрузки и нагружения  $oE_0$  совпадает с вертикальной плоскостью  $oB$ .

Систему (1.27) удобно решать методом последовательных приближений (метод упругих решений Ильюшина). Рассматривая (1.27) как систему двух линейных алгебраических уравнений с известными правыми частями и имея в виду (1.33), для решений  $n$ -ого приближения, выраженных через  $n - 1$ -ое приближение, находим

$$\begin{aligned} a^{(n)}(\varphi) = & -\frac{A}{3\pi ER^4 y_s} (3R^4 + 6R^2 y_s^2 - y_s^4) - \frac{2A}{3\pi ER^4 \varepsilon_s} \int_0^\varphi b'(\eta) \Phi(\eta) d\eta + \\ & + \frac{8A}{3\pi ER^2 c} Y + \frac{A \varepsilon_s}{3\pi ER^4 bc^2} X^2 - \frac{A \varepsilon_s^3}{3\pi ER^4 b} \frac{b'^2}{e^2} + \frac{A}{\pi E \varepsilon_s} \left[ ad + \right. \\ & \left. + b \left( \frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) - a \left( \frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a' b'}{f} \right) \right] + \frac{4M}{\pi ER^4} \sin \varphi \\ b^{(n)}(\varphi) = & \frac{A}{3\pi ER^4 y_s} \left[ 3R^4 \arccos \frac{y_s}{R} - y_s (5R^2 - 2y_s^2) \sqrt{R^2 - y_s^2} \right] + \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2A}{3\pi ER^4 \varepsilon_s} \int_0^{\xi} a'(\eta) \Phi(\eta) d\eta - \frac{8A}{3\pi ER^2 c} X + \frac{A\varepsilon_s X(aX + 2bY)}{3\pi ER^4 b^2 c^2} + \\
& + \frac{A\varepsilon_s^2 b'(2a'b - ab')}{3\pi ER^4 b^2 e^2} + \frac{A}{\varepsilon_s} \left[ bd + a \left( \frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) + \right. \\
& \left. + b \left( \frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a'b'}{f} \right) \right] + \frac{4M}{\pi ER^4} \cos \varphi
\end{aligned}$$

(Для простоты верхний индекс  $(n-1)$  над функциями, стоящими в правых частях итерационных формул, будем опускать).

В качестве нулевого приближения удобно принимать известные решения обычной упруго-пластической задачи (1.6). Вычисления следует продолжать до тех пор, пока два последующих приближения не сойдутся в требуемой степени.

Естественно ожидать, что сходимость процесса будет настолько сильной, насколько мало будет влияние разгрузки пластически деформируемых областей 1+2, т. е. насколько малы будут угол вращения  $\varphi$  и разница модулей  $E-B$ .

2. Рассмотрим следующий числовой пример:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, B = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \varepsilon_s = 125 \cdot 10^{-5}, \quad (2.1)$$

$$(A = 2475 \text{ кг/см}^2), \sigma_s = 2500 \text{ кг/см}^2, R = 4 \text{ см}$$

Задачу обычного упруго-пластического изгиба вала при  $\varphi = 0$  удобно решать обратным путем, т. е. задаваясь деформированным состоянием (например, расстоянием границы пластической зоны от нейтральной оси  $y_s$ ), по формуле (1.3) вычислить значение соответствующего изгибающего момента  $M$ . Этим путем находим, что при

$$y_s = 3 \text{ см} \quad (\theta_s = 0.8481, \quad \alpha_s = 41.67 \cdot 10^{-5} \text{ 1/см}) \quad (2.2)$$

изгибающий момент имеет значение

$$M = 159\,000 \text{ кг см} \quad (2.3)$$

Для решений при произвольном угле  $\varphi > 0$  с учетом (1.6) и (2.2) находим

$$a_0(\varphi) = 41.67 \cdot 10^{-5} \sin \varphi \text{ 1/см} \quad (2.4)$$

$$b_0(\varphi) = 41.67 \cdot 10^{-5} \cos \varphi \text{ 1/см}$$

Займемся теперь решением задачи вращающегося вала. С учетом данных (2.1)–(2.3) из (1.34) для значений искомым функций при  $n$ -ом приближении, выраженных через  $n-1$ -ое приближение, находим

$$a_1^{(n)}(\varphi) = -26.52 - 0.0008206 \int_0^{\xi} b_1^{(n-1)}(\eta) \Phi(\eta) d\eta + 6.565 \frac{Y}{c} +$$



$$+ 6.411 \frac{X^2}{b_1 c^2} - 100200 \frac{b_1'^2}{b_1 e^2} + 0.3151 \left[ a_1 d + b_1 \left( \frac{X^2}{16c^2} - \frac{b_1'^2}{f} \right) - a_1 \left( \frac{XY}{16c^2} + \frac{a_1' b_1'}{f} \right) \right] + 39.53 \sin \varphi \quad (2.5)$$

$$b_1^{(4)}(\varphi) = 1.076 + 0.0008206 \int_0^{\varphi} a_1'(\eta) \Phi(\eta) d\eta - 6.565 \frac{X}{c} + 6.411 \frac{X(a_1 X + 2b_1 Y)}{b_1^2 c^2} + 100200 \frac{b_1'(2a_1' b_1 - a_1 b_1')}{b_1^2 e^2} + 0.3151 \left[ b_1 d + a_1 \left( \frac{X^2}{16c^2} - \frac{b_1'^2}{f} \right) + b_1 \left( \frac{XY}{16c^2} + \frac{a_1' b_1'}{f} \right) \right] + 39.53 \cos \varphi$$

Обозначения (1.29) остаются в силе, только вместо  $a$ ,  $b$  и  $\varepsilon_s$  надо понимать, соответственно

$$a_1 = 10^5 a, \quad b_1 = 10^5 b, \quad \varepsilon_{s_1} = 10^5 \varepsilon_s \quad (2.6)$$

Внося решения классической задачи упруго-пластического изгиба (2.4) в правые части (2.5), как нулевое приближение, и имея в виду (1.29), (2.6), для первого приближения искомых функций получим формулы, не содержащие интегральных членов

$$a_1^{(1)}(\varphi) = -26.52 + 29.03(1 - \cos \varphi) + 0.1576 Y + 6.411 \frac{X^2}{x_1^3 \cos \varphi} - 1.385 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + 13.13(0.7227 \sin \varphi + t_1 \cos \varphi - t_2 \sin \varphi) + 39.53 \sin \varphi$$

$$b_1^{(1)}(\varphi) = 1.076 + 29.03 \sin \varphi - 0.1576 X + 6.411 \frac{X(X \sin \varphi + 2Y \cos \varphi)}{x_1^3 \cos^2 \varphi} - 1.385(2 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin \varphi + 13.13(0.7227 \cos \varphi + t_1 \sin \varphi + t_2 \cos \varphi) + 39.53 \cos \varphi$$

где

$$X = 125 \sin \varphi + 110.2 \cos \varphi, \quad Y = 125 \cos \varphi - 110.2 \sin \varphi$$

$$t_1 = \frac{X^2}{27780} - \sin^2 \varphi, \quad t_2 = \frac{XY}{27780} - \frac{\sin 2\varphi}{2}, \quad x_1 = 41.67$$

В нижеприведенной таблице представлены значения некоторых величин, подсчитанные по этим формулам.

Из таблицы видно, что с вращением плоскости действия изгибающего момента (с возрастанием угла  $\varphi$ ) кривизна изогнутой оси вала

Таблица 1

$\varphi$	$a \cdot 10^3$ 1/см	$b \cdot 10^3$ 1/см	$x \cdot 10^3$ 1/см	$\text{arctg } a/b$
0	0	41.667	41.667	0
0.1	4.066	41.660	41.926	0.097
0.2	8.117	41.371	42.159	0.194
0.3	12.112	40.610	42.378	0.290
0.4	16.011	39.454	42.579	0.385
0.5	19.775	37.915	42.762	0.481
0.6	23.366	36.008	42.925	0.576
0.7	26.749	33.751	43.066	0.670
0.8	29.891	31.168	43.185	0.764
0.9	32.758	28.285	43.280	0.859
1.0	35.323	25.129	43.350	0.952
1.1	37.561	21.734	43.396	1.046
1.2	39.448	18.132	43.416	1.140

$x$ , как и следовало ожидать, возрастает. Это означает, что плоскость изгиба находится в области нагружения, т. е. плоскость раздела областей разгрузки и нагружения отстает от плоскости изгиба вала. Из таблицы видно также, что

$$\text{arctg } \frac{a}{b} < \varphi$$

т. е., как и было доказано в пункте 1, плоскость изгиба вала в свою очередь отстает от плоскости действия изгибающего момента.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 30 IV 1969

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՅԱՆ

ՊՏՏՎՈՂ ԿՂՈՐ ԼԻՍԵՌԻ ԱՌԱԶԳԱ-ՊՂԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՄԱՔՈՒՐ ՄՌՈՒՄԸ

Ա մ ֆ ո թ ո ս լ

Դիտարկվում է կտր կտրվածքով պտտվող լիսեռի առաձգա-պլաստիկական մաքուր ծռման բվազիստատիկ խնդիրը լիսեռի երկու ճակատներում հաստատուն ծոող մոմենտների ազդման դեպքում: Պարզութիւն համար ուսումնասիրութիւնները տարվում են գծաչափերին ամբողջով նյութի առաձգա-պլաստիկական փոքր դեֆորմացիաների տեսութիւն [1] շրջանակներում: Լիսեռի պտույտը ենթադրվում է ալնքան դանդաղ, որպեսզի ինտեգրիտն ուժերի ազդեցութիւնը հնարավոր լինի արհամարհել:

Վերլուծելով լայնական կտրվածքի բնորոշ տիրույթներում լիսեռի դեֆորմացիաների վարքը, որը պայմանավորված է նրա պտույտով, հարթ կտրվածքների հիպոթեզի հիման վրա արտածվում է խնդրի լուծող հավա-



տարածների սխեման՝ ոչ-զծալին ինտեգրո-դիֆերենցիալ երկու հավասարումների տեսքով: Պարզ ձևափոխումների միջոցով ստացված սխեմանը բերվում է առաձգական լուծումների եզանակի կիրառման համար ճարմար տեսքի: Բերված է անհայտ ֆունկցիաների՝ առաջին մոտավորաթյան հաշվարկման թվային օրինակ, որտեղ որպես գրոյական մոտավորաթյան ընդունվում է առաձգա-պլաստիկական կլասիկ խնդրի հայտնի լուծումը:

## ON ELASTIC-PLASTIC CLEAN BEND OF A ROTATING ROUND SHAFT

R. M. KIRAKOSIAN

### S u m m a r y

The quasi-static problem of elastic-plastic bend of a rotating round shaft with butt-end constantly bending moments is considered.

For simplicity, the investigation is conducted on the basis of the theory of few elastic-plastic deformations [1] for a linearly consolidating material with rotation of the shaft supposed to be so slow that the influence of inertia forces may be neglected.

The behaviour of deformations of individual typical parts of the cross section of the shaft due to rotation of the latter is analyzed and on the basis of the hypothesis of plane sections the solving system of the problem in the form of two nonlinear integro-differential equations is derived. By elementary modifications the solving system is reduced to the form suitable for the method of elastic solutions.

A numerical example for determination of unknown functions in first approximation is given, when the solution of the classical elastic-plastic problem is taken as zero approximation.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. М. — Л., 1948.