ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 3, 1970 Механика

А. С. ХАЧИКЯН

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В настоящей работе рассматривается равновесие упругой плоскости с гибким прямолинейным включением конечной длины под действием сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения.

Плоская задача об усиленной ребром упругой полуплоскости изучалась в работах [1—2]. Различные задачи для упругой плоскости с тонкостенным включением исследовались в [3—6]. В [7] решена задача для неоднородной плоскости с тонким прямолинейным включением.

1. Рассмотрим равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением длиной $2a$, расположенным на действительной оси симметрично относительно начала координат, под действием сосредоточенных сил $(0, -P)$ и $(0, P)$, приложенных в точках $\bar{z}_0(0, ib)$ и $z_0(0, -ib)$ соответственно.

Напряжения и перемещения через две функции комплексного переменного выражаются формулами [8]

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{1.1}$$

где

$$\varphi(z) = c\ln\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} + \varphi_0(z)$$

$$\psi(z) = \varkappa c\ln\frac{z + ib}{z - ib} - \frac{ibc}{z - ib} - \frac{ibc}{z + ib} + \psi_0(z) \tag{1.2}$$

$$c = -\frac{iP}{2\pi(1 + \varkappa)}, \quad \varkappa = 3 - 4\nu$$

μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона материала плоскости.

Здесь $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — голоморфные вне отрезка $(-a, a)$ действительной оси и имеющие порядок $0\left(\frac{1}{z}\right)$ на бесконечности функции.

Главный вектор усилий (X, Y), действующих на дугу $(-\infty, z)$ справа, равен

$$Y - iX = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - P \tag{1.3}$$

Согласно [6] и вследствие симметрии на действительной оси имеем

$$v=0 \quad \text{при} \quad -\infty<t<\infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=kX \quad \text{при} \quad |t|<a \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}=0 \quad \text{при} \quad |t|>a$$

где $k=\dfrac{(1+\nu)(1-\nu_{\text{вк}})}{\mu_{\text{вк}}H}$, H — толщина включения.

Последнее условие с учетом требования на бесконечности можно переписать в виде

$$X=0 \quad \text{при} \quad |t|>a \tag{1.5}$$

В силу симметрии можно рассматривать только нижнюю полуплоскость (S^-).

Определим $\varphi_0(z)$ в верхней полуплоскости (S^+) следующей формулой:

$$\varphi_0(z)=-\varkappa\bar{\varphi}_0(z)-z\bar{\varphi}_0'(z)-\bar{\psi}_0(z) \quad \text{при} \quad z \text{ в } S^+$$

$$\bar{\varphi}(z)=\overline{\varphi(\bar{z})}$$

Отсюда имеем

$$\overline{\psi_0(z)}=-\varphi_0(\bar{z})-\varkappa\overline{\varphi_0(z)}-\bar{z}\,\overline{\varphi_0'(z)} \quad \text{при} \quad z \text{ в } S^- \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) и (1.2) в (1.1) и (1.3), получим

$$2\mu(u+iv)=\varkappa c\ln\frac{z+ib}{z-ib}\,\frac{\bar{z}-ib}{\bar{z}+ib}+\frac{2ibc(z+\bar{z})}{(\bar{z}+ib)(\bar{z}-ib)}+\varkappa\varphi_0(z)+$$

$$+\varkappa\overline{\varphi_0(z)}+\varphi_0(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\varphi_0'(z)}$$

$$\tag{1.7}$$

$$Y-iX=c\ln\frac{z+ib}{z-ib}-\varkappa c\ln\frac{\bar{z}-ib}{\bar{z}+ib}-\frac{2ibc(z+\bar{z})}{(\bar{z}+ib)(\bar{z}-ib)}+\varphi_0(z)-$$

$$-\varkappa\overline{\varphi_0(z)}-\varphi_0(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\varphi_0'(z)}-P$$

При условии $\lim\limits_{z\to t}(z-\bar{z})\varphi'(z)=0$ на действительной оси получим

$$2\mu(u+iv)=\frac{4ibct}{t^2+b^2}+\varkappa\varphi_0^-+\varkappa\bar{\varphi}_0^-+\varphi_0^+$$

$$\tag{1.8}$$

$$Y-iX=c(1+\varkappa)\ln\frac{t+ib}{t-ib}-\frac{4ibct}{t^2+b^2}+\varphi_0^--\varkappa\bar{\varphi}_0^--\varphi_0^+-P$$

Учитывая (1.8), первое из условий (1.4) перепишем в виде

$$\varphi_0^+-\bar{\varphi}_0^+=0 \quad \text{при} \quad |t|<\infty$$

что вместе с условиями на бесконечности дает

$$\varphi_0^+ \equiv 0 \quad \text{или} \quad \varphi_0(z) \equiv 0 \quad \text{при} \quad z \text{ в } S^+ \tag{1.9}$$

Удовлетворяя второму из условий (1.4) и условию (1.5), получим соответственно

$$\varphi_0^- - \bar{\varphi}_0^- = 0 \quad \text{при} \quad |t| > a$$

$$\varphi_0^{'-} + \bar{\varphi}_0^{'-} - in(\varphi_0^- - \bar{\varphi}_0^-) = \frac{4ibc}{\varkappa} \frac{t^2 - b^2}{(t^2 + b^2)^2} \quad \text{при} \quad |t| < a$$

или

$$\begin{aligned} q &= 0 \quad \text{при} \quad |t| > a \\ p' + nq &= N \quad \text{при} \quad |t| < a \end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$N = \frac{2ibc}{\varkappa} \frac{t^2 - b^2}{(t^2 + b^2)^2}, \; n = \frac{\mu k(1 + \varkappa)}{\varkappa}, \; \varphi_0^- = p(t) + iq(t) \tag{1.11}$$

2. Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{n}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2q(t)\, g(t)}{t - z}\, dt \\ \varphi_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[p'(t) + iq'(t)]g(t)}{t - z}\, dt, \quad g(t) = \sqrt{(t - a)(t + a)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Так как $(p' + iq')\, g$ представляет собой граничное значение аналитической в нижней полуплоскости функции, то

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{(p' + iq')\, g}}{t - z}\, dt \quad \text{при} \quad z \text{ в } S^-$$

Перейдем здесь к сопряженным величинам и сложим со вторым равенством из (2.1). Получим

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p' + iq')\, g - (p' - iq')\, \bar{g}}{t - z}\, dt$$

Учитывая, что $g(t)$ принимает чисто мнимые значения при $|t| < a$ и действительные значения при $|t| > a$, будем иметь

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{2g\,(p' + nq)}{t - z}\, dt +$$

$$
+\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\infty}^{-a}+\int\limits_{a}^{\infty}\right)\frac{2g\,(nq+iq')}{t-z}\,dt
$$

что вместе с условиями (1.10) дает

$$
\varphi_1(z)+\varphi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{2gN}{t-z}\,dt \tag{2.2}
$$

Приравнивая действительные части граничных значений на действительной оси функции $\varphi_1(z)+\varphi_2(z)$, вычисленные по формулам Сохоцкого-Племеля из (2.1) и из (2.2), получим

$$
q'g+\frac{n}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{qg}{t-t_0}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{gN}{t-t_0}\,dt
$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$
q'g+\frac{n}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{g\,dt}{t-t_0}\int\limits_{-a}^{t}q'(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{gN}{t-t_0}\,dt
$$

Перемена порядка интегрирования приводит к уравнению Фредгольма второго рода

$$
q'(t_0)+\int\limits_{-a}^{a}q'(t)\,K_0(t_0,\,t)\,dt=f_0(t_0) \tag{2.3}
$$

$$
K_0(t_0,\,t)=\frac{n}{\pi g(t_0)}\int\limits_{t}^{a}\frac{q(\tau)\,d\tau}{\tau-t_0},\quad f_0(t_0)=\frac{1}{\pi g(t_0)}\int\limits_{-a}^{a}\frac{g(\tau)\,N(\tau)}{\tau-t_0}\,d\tau \tag{2.4}
$$

Выполняя интегрирование, для ядра и правой части уравнения (2.3) получим

$$
K_0(t_0,t)=\frac{n}{\pi g(t_0)}\left\{\frac{t_0}{a}\left(\arcsin\frac{t}{a}-\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}+\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{1-\left(\frac{t_0}{a}\right)^2}\,\ln\frac{a^2-t_0t+\sqrt{1-t_0^2}\sqrt{1-t^2}}{a\,|t_0-t|}\right\} \tag{2.5}
$$

$$
f_0(t_0)=\frac{2ibc}{\varkappa\sqrt{a^2-t_0^2}}\,\frac{t_0}{\sqrt{1+\beta^2}}\,\frac{(t_0^2+\beta^2)(1+2\beta-2\beta^2-2\beta^3)-4\beta t_0^2(1+\beta^2)}{\beta\,(t_0^2+\beta^2)^2}
$$

где $\beta=\dfrac{b}{a}$.

Введем обозначения

$$t_0 = a\tau, \quad t = ax, \quad \frac{q^*(a\tau)\,\pi\varkappa a^2}{2ibc}\sqrt{1-\tau^2} = h(\tau) \tag{2.6}$$

$$-\frac{an}{\pi}\int_{-1}^{1} h(x)\,\frac{\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = c_1 \tag{2.7}$$

$$K(\tau,\ x) = 1 - \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1-\tau x+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-x^2}}{|x-\tau|}$$

$$f(\tau) = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}\,\frac{(1+2\beta+2\beta^2-2\beta^3)(\tau^2+\beta^2)-4\beta\tau^2(1+\beta^2)}{\beta(\tau^2+\beta^2)^2} \tag{2.8}$$

Уравнение (2.3) примет вид

$$h(\tau) - \frac{an}{\pi}\int_{-1}^{1} h(x)\,K(\tau,\ x)\,dx = f(\tau) + c_1\tau \tag{2.9}$$

Если

$$h_1(\tau) - \frac{an}{\pi}\int_{-1}^{1} h_1(x)\,K(\tau,\ x)\,dx = f(\tau)$$

$$h_2(\tau) - \frac{an}{\pi}\int_{-1}^{1} h_2(x)\,K(\tau,\ x)\,dx = \tau \tag{2.10}$$

то

$$h(\tau) = h_1(\tau) + c_1 h_2(\tau) \tag{2.11}$$

Решив уравнения (2.10), из (2.11) и (2.7) для определения постоянной c_1 получим формулу

$$c_1 = \frac{-\dfrac{an}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} h_1(x)\,\frac{\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}{1 + \dfrac{an}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} h_2(x)\,\frac{\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}$$

Используя известные соотношения

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}[\varphi'(z)], \quad p'(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q'(t)\,dt}{t-t_0}$$

и формулы (2.11), (2.7), (1.10—1.11), (1.1), (1.2), (1.6), (1.9), для значений неизвестных напряжений на действительной оси получим

$$\sigma_x = (3+\varkappa)\,p'(t) + \frac{2ibc\,(3+\varkappa)}{t^2+b^2} + \frac{8ib^3c}{(t^2+b^2)^2}$$

$$\sigma_y = (1-\varkappa)\,p'(t) + \frac{2ibc\,(1-\varkappa)}{t^2+b^2} - \frac{8ib^3c}{(t^2+b^2)^2}$$

$$\tau_{xy} = (1+\varkappa)\,q'(t)$$

Исследование ядра уравнения (2.9) показывает, что метод последовательных приближений для этого уравнения сходится при $an \leqslant 1.25$.

3. Численное решение уравнений (2.10) получим представлением интеграла в виде конечной суммы и решением полученной системы алгебраических уравнений.

Преобразуем первое из уравнений (2.10) к виду

$$A_0 h_1(\tau) - \frac{an}{\pi}\int_{-1}^{1}[h(x)-h(\tau)]\,K(\tau,x)\,dx = f(\tau)$$

где

$$A_0 = 1 - \frac{an}{\pi}\int_{-1}^{1}K(\tau,x)\,dx$$

Заменяя интеграл конечной суммой по формуле трапеций, получим систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{m} h_{1i}\,A_{ik} = f_k \quad (k=0,1,\cdots,m) \tag{3.1}$$

$$A_{0k} = -\frac{an}{\pi m}K_{0k}\quad(k\neq 0),\qquad A_{mk} = -\frac{an}{\pi m}K_{mk}\quad(k\neq m)$$

$$A_{ik} = -\frac{2an}{\pi m}K_{ik}\quad(i\neq k;\ i\neq 0,\ m)$$

$$(3.2)$$

$$A_{00} = B_0 + \frac{an}{\pi m}(2m-1),\qquad A_{mm} = B_m + \frac{an}{\pi m}(2m-1)$$

$$A_{kk} = B_k + \frac{an}{\pi m}K_{0k} + \frac{2an}{\pi m}\sum_{i=1}^{m-1}K_{ik} + \frac{an}{\pi m}K_{mk}\quad(i\neq k;\ k\neq 0,m)$$

$$K_{ik} = 1 - \frac{\sqrt{1-\tau_k^2}}{\sqrt{1-x_i^2}}\ln\frac{1-\tau_k x_i + \sqrt{1-\tau_k^2}\sqrt{1-x_i^2}}{|x_i-\tau_k|} \tag{3.3}$$

$$(i\neq k;\ i,\ k\neq 0,\ m)$$

Таблица 1

Значения величины $\frac{a}{P}\tau_{xy}$

β	an \ ξ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.25	0.1	0.410	0.467	0.384	0.314	0.246	0.211	0.193	0.194	0.232	$+\infty$
	0.2	0.457	0.507	0.401	0.315	0.238	0.197	0.175	0.171	0.203	$+\infty$
	0.4	0.601	0.614	0.443	0.318	0.221	0.170	0.143	0.135	0.157	$+\infty$
0.50	0.1	0.156	0.246	0.262	0.243	0.193	0.153	0.122	0.101	0.095	$+\infty$
	0.2	0.172	0.265	0.274	0.247	0.188	0.144	0.111	0.088	0.080	$+\infty$
	0.4	0.222	0.320	0.306	0.254	0.179	0.128	0.091	0.067	0.056	$+\infty$
1.0	0.1	0.043	0.077	0.095	0.103	0.087	0.064	0.031	−0.013	−0.085	$-\infty$
	0.2	0.047	0.083	0.101	0.105	0.087	0.062	0.029	−0.014	−0.082	$-\infty$
	0.4	0.061	0.100	0.114	0.111	0.087	0.058	0.025	−0.014	−0.076	$-\infty$
2.0	0.1	−0.006	−0.013	−0.023	−0.038	−0.056	−0.084	−0.124	−0.188	−0.323	$-\infty$
	0.2	−0.005	−0.012	−0.021	−0.036	−0.052	−0.077	−0.114	−0.172	−0.297	$-\infty$
	0.4	−0.005	−0.010	−0.019	−0.031	−0.045	−0.066	−0.096	−0.146	−0.255	$-\infty$

Таблица 2

an \ β	0.25	0.5	1.0	2.0
0.1	0.067	0.021	−0.048	−0.128
0.2	0.062	0.017	−0.048	−0.125
0.4	0.052	0.012	−0.048	−0.119

$$K_{i0}=1, \quad K_{im}=1$$

$$K_{0k}=\tau_k \quad (k\neq m), \quad K_{mk}=-\tau_k \quad (k\neq 0)$$

$$B_k=1-\frac{2an}{\pi}+\frac{4an\sqrt{1-\tau_k^2}}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j-1)^2}\cos\gamma_k(2j-1) \tag{3.3}$$

$$\gamma_k=\arcsin\tau_k, \quad \tau_k=-1+0.1k, \quad x_i=-1+0.1i, \quad f_k=f(\tau_k)$$

Из второго уравнения (2.10) получим систему

$$\sum_{i=1}^{m} h_{2i}\, A_{ik}=\tau_k \quad (k=0, 1, \cdots, m) \tag{3.4}$$

где A_{ik} и τ_k определены в (3.2)—(3.3).

Системы (3.1) и (3.4) были решены на ЭВМ „Наири“ при $m=20$, $\varkappa=\frac{5}{3}$ для некоторых значений параметров an и β.

Вычисленные значения касательных напряжений вдоль включения и коэффициента особенности напряжений на концах включения приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Результаты вычислений показывают, что при некоторых значениях параметров an и β коэффициент при особенности напряжений обращается в нуль.

Автор выражает признательность К. С. Чобаняну за ценные советы в ходе решения задачи.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 XII 1969

Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐՎԱԾՔՈՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է վերջավոր երկարությամբ բարակապատ առաձգական ներդրվածքով հարթության հավասարակշռությունը՝ ներդրվածքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված կենտրոնացված ուժերի ազդեցության տակ:

Խնդիրը բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման։

Հաշված են շոշափող լարման արժեքները ներդրվածքի և հարթության կցման գծի վրա։

ON EQUILIBRIUM OF A PLANE WITH AN ELASTIC THIN-WALLED INCLUSION OF FINITE LENGTH

A. S. KHACHIKIAN

Summary

A problem on equilibrium of a plane with an elastic thin-walled inclusion of finite length under the action of concentrated forces applied symmetrically to the inclusion is considered.

The problem is reduced to the solution of Fredholm's integral equation of the second kind.

The values of the tangent stresses along the contact line are calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ingenieur-Archiv 3, H2, 1932.
2. *Алликас Л.* О расчете полуплоскости, усиленной ребром. Изв. АН Эстонской ССР, серия физ.-мат. и техн. н., т. XIV, № 3, 1965.
3. *Szelagowski F.* Action of the concentrated force on an infinite disc through a rigid slit. „Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sec. techn." 13, № 6, 1965.
4. *Грейф, Сэндерс мл.* Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. механика, тр. ASME, № 1, 1965.
5. *Блум, Сэндерс мл.* Влияние приклепанного стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. механика, тр. ASME, № 3, 1966.
6. *Чобанян К. С., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
7. *Хачикян А. С.* Равновесие неоднородной плоскости с тонкостенным упругим включением. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 4, 1968.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.