ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 3, 1970 Механика

Л. А. АГАЛОВЯН, Р. С. ГЕВОРКЯН

О НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

При построении уточненных теорий для оболочек и пластинок, помимо уточнения уравнений для внутренней задачи, необходимо учитывать и различного рода краевые эффекты типа пограничного слоя. Известно [1, 2], что погранслой распадается на два типа погранслоя— антиплоский (краевое кручение) и плоский (краевая плоская деформация). Если уравнения антиплоского погранслоя как в изотропном, так и в анизотропном случаях решаются достаточно легко [3, 4], то при решении уравнений плоского погранслоя встречаются некоторые трудности, которые, как нам кажется, не преодолены до сих пор.

Чтобы учитывать плоский погранслой, необходимо решать плоскую задачу для полуполосы со смешанными граничными условиями [1, 2], а именно, если на короткой кромке полуполосы даются: а) перемещения или б) перемещение и напряжение, а на продольных гранях полуполосы даются значения напряжений (в этих задачах они равны нулю).

Плоская задача о полуполосе привлекала к себе внимание многих исследователей. Не претендуя на полноту списка, отметим лишь некоторые из них, характеризующие различные подходы при решении этой проблемы.

Ворович И. И. и Копасенко В. В. [5] рассмотрели задачу о симметрично нагруженной полуполосе, заделанной по короткому краю. Решение этой задачи они свели к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно нормального напряжения в заделке.

При помощи функции напряжения Хорви [6, 7] рассмотрел задачу о полуполосе со свободными продольными границами, на торце которой действуют самоуравновешенные нагрузки.

Применив синус-преобразование к уравнению для функций напряжений, Койтер и Алблаcа [8] задачу о растяжении полуполосы со свободными продольными гранями и защемленной короткой стороной свели к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Бентем [9] рассмотрел задачу о полуполосе, когда ее продольные кромки свободны, а на торце заданы напряжения, и когда торец защемлен, а на бесконечности заданы напряжения. Применив преобразование Лапласа к уравнению для функции напряжения, он сводит потом задачу к решению бесконечной алгебраической системы, не доказывая ее регулярности.

Зорский [10] свел проблему к сингулярному интегральному уравнению.

Теодореску [11] рассмотрел задачу о полуполосе, когда на границе заданы напряжения. Функция напряжений в этих задачах представляется в виде комбинации рядов и интегралов Фурье. Аналогичный подход был применен Лингом [12], Пикеттом и Айенгарой [13, 14], Ямасидой [15] для решения некоторых задач о полуполосе. Однако ни в одной из указанных работ не исследуется регулярность полученных бесконечных линейных систем алгебраических уравнений.

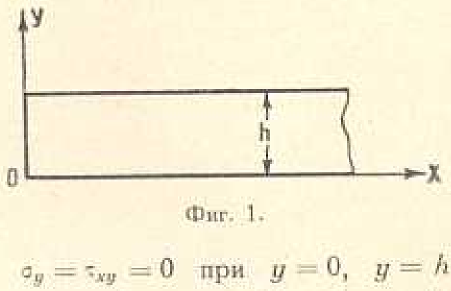
Абрамян Б. Л. (16) решил первую краевую плоскую задачу теории упругости для прямоугольной области, при произвольном загружении кромок прямоугольника нормальными и тангенциальными напряжениями. Задача решена при помощи функции напряжений, которая представлена в виде тригонометрических рядов. Решение сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Методом Папковича-Лурье В. К. Прокопов [17] решил плоскую задачу для прямоугольника, на поперечных кромках которого отсутствуют нормальные перемещения.

Галфаян П. О. [18] рассмотрел смешанную задачу для прямоугольника. Задача решена при помощи функции напряжений, которая представляется в виде рядов.

В предлагаемой работе делается попытка решить, из отмеченных выше групп задач, задачу о полуполосе, когда ее продольные грани свободны, а на торце заданы перемещения. Рассматривается симметричная задача. Задача решается в перемещениях, решение сводится к одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученная система вполне регулярна. Другие задачи этой группы могут быть решены аналогичным образом. Для этого нужно вводить некоторые изменения в представлениях (1.3).

§ 1. Рассмотрим плоскую смешанную задачу теории упругости для изотропной полуполосы шириной h при следующих граничных условиях (фиг. 1):



Фиг. 1.

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = h$$

$$u = f(y), \quad v = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{1.1}$$

Так как рассматривается симметричная задача, то в системе координат, выбранной в центре кромки полуполосы, функции $f(y)$ и $\varphi(y)$ предполагаются соответственно четными и нечетными.

Требуется, чтобы напряженное состояние было затухающим при удалении от кромки полуполосы.

Задачу будем решать, исходя из уравнений плоской задачи теории упругости в перемещениях

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0 \quad (x,\ y) \tag{1.2}$$

где $\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$, ∇^2 — оператор Лапласа, λ, μ — коэффициенты Ламе.

Перемещения u и v будем искать в виде

$$u=\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha}\,[A(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+B(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+C(\alpha)\,\alpha y\operatorname{ch}\alpha y+$$

$$+D(\alpha)\,\alpha y\operatorname{sh}\alpha y]\,d\alpha+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\beta_k}\left[\left(N_k+\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}M_k\right)e^{-\beta_k x}+\right.$$

$$\left.+M_k\beta_k x e^{-\beta_k x}\right]\cos\beta_k y+u_0$$

$$\tag{1.3}$$

$$v=\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\left[\left(B(\alpha)-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}C(\alpha)\right)\operatorname{ch}\alpha y+\right.$$

$$\left.+\left(A(\alpha)-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}D(\alpha)\right)\operatorname{sh}\alpha y+D(\alpha)\,\alpha y\operatorname{ch}\alpha y+C(\alpha)\,\alpha y\operatorname{sh}\alpha y\right]d\alpha+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\beta_k}\left(N_k e^{-\beta_k x}+M_k\beta_k x e^{-\beta_k x}\right)\sin\beta_k y$$

где $\beta_k=\frac{2\pi k}{h}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для таких перемещений уравнения (1.2) удовлетворяются тождественно.

Из соотношений между напряжениями и перемещениями

$$\sigma_x=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad (x,\ y)$$

$$\tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

используя (1.3), для напряжений получим

$$\sigma_x=-2\mu\int_0^\infty\sin\alpha x\left[\left(A(\alpha)+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}D(\alpha)\right)\operatorname{ch}\alpha y+\right.$$

$$+\left(B(\alpha)+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}C(\alpha)\right)\operatorname{sh}\alpha y+C(\alpha)\,\alpha y\operatorname{ch}\alpha y+D(\alpha)\,\alpha y\operatorname{sh}\alpha y\Bigg]d\alpha-$$

$$-2\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(N_k+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}M_k\right)e^{-\beta_k x}+M_k\beta_k x e^{-\beta_k x}\right]\cos\beta_k y$$

$$\sigma_y=2\mu\int_0^{\infty}\sin\alpha x\left[\left(A(\alpha)-\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}D(\alpha)\right)\operatorname{ch}\alpha y+\right.$$

$$\left.+\left(B(\alpha)-\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}C(\alpha)\right)\operatorname{sh}\alpha y+C(\alpha)\,\alpha y\operatorname{ch}\alpha y+D(\alpha)\,\alpha y\operatorname{sh}\alpha y\right]d\alpha+$$

$$+2\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(N_k-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}M_k\right)e^{-\beta_k x}+M_k\beta_k x e^{-\beta_k x}\right]\cos\beta_k y \tag{1.5}$$

$$\tau_{xy}=2\mu\int_0^{\infty}\cos\alpha x\left[\left(B(\alpha)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}C(\alpha)\right)\operatorname{ch}\alpha y+\right.$$

$$\left.+\left(A(\alpha)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}D(\alpha)\right)\operatorname{sh}\alpha y+D(\alpha)\,\alpha y\operatorname{ch}\alpha y+C(\alpha)\,\alpha y\operatorname{sh}\alpha y\right]d\alpha-$$

$$-2\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(N_k+\frac{\mu}{\lambda+\mu}M_k\right)e^{-\beta_k x}+M_k\beta_k x e^{-\beta_k x}\right]\sin\beta_k y$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$, M_k, N_k, u_0 постараемся удовлетворить граничным условиям (1.1). Представив в выражениях (1.3) и (1.5) $e^{-\beta_k x}$ и $xe^{-\beta_k x}$ в виде интегралов Фурье и удовлетворив граничным условиям, накладываемым на линиях $y=0$, $y=h$, получим следующую систему:

$$A(\alpha)-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}D(\alpha)=-\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(\alpha)$$

$$B(\alpha)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}C(\alpha)=0$$

$$\left[A(\alpha)-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}D(\alpha)\right]\operatorname{ch}\alpha h+\left[B(\alpha)-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}C(\alpha)\right]\operatorname{sh}\alpha h+$$

$$+C(\alpha)\,\alpha h\operatorname{ch}\alpha h+D(\alpha)\,\alpha h\operatorname{sh}\alpha h=-\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(\alpha) \tag{1.6}$$

$$\left[B(\alpha)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}C(\alpha)\right]\operatorname{ch}\alpha h+\left[A(\alpha)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}D(\alpha)\right]\operatorname{sh}\alpha h+$$

$$+D(\alpha)\,\alpha h\operatorname{ch}\alpha h+C(\alpha)\,\alpha h\operatorname{sh}\alpha h=0$$

Решив эту систему относительно $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ и $D(\alpha)$, получим

$$A(\alpha)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha h}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}Q_k(\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha h}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}Q_k(\alpha)$$

$$B(\alpha)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\operatorname{ch}\alpha h}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}Q_k(\alpha)$$

$$C(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\operatorname{ch}\alpha h}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}Q_k(\alpha) \tag{1.7}$$

$$D(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha h}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}Q_k(\alpha)$$

где $Q_k(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta_k^2}\left[\left(\dfrac{2\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)M_k+N_k\right]$

Удовлетворив граничному условию $v=\varphi(y)$ при $x=0$, получим

$$N_k=\varphi_k\beta_k,\quad \text{где}\quad \varphi_k=\frac{2}{h}\int_0^h\varphi(y)\sin\beta_k y\,dy \tag{1.8}$$

После удовлетворения условию (1.1) для u, получаются уравнения

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha}\left[A(\alpha)a_n+B(\alpha)b_n+C(\alpha)c_n+D(\alpha)d_n\right]d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\beta_n}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}M_n=f_n-\varphi_n \tag{1.9}$$

$$u_0=f_0-\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha}\left[A(\alpha)a_0+B(\alpha)b_0+C(\alpha)c_0+D(\alpha)d_0\right]d\alpha$$

где a_n, b_n, c_n, d_n — коэффициенты Фурье членов, стоящих на четных местах разложений по косинусам функций $\operatorname{ch}\alpha y$, $\operatorname{sh}\alpha y$, $\alpha y\operatorname{ch}\alpha y$, $\alpha y\operatorname{sh}\alpha y$ в области $[0, h]$.

Подставив значения $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$, N_k из (1.7), (1.8) в (1.9), для определения коэффициентов M_n получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$M_n=\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}M_k+e_n\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{1.10}$$

где

$$A_{nk}=-\frac{8}{\pi h}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\int_0^{\infty}\frac{\alpha\beta_n}{(\alpha^2+\beta_n^2)(\alpha^2+\beta_k^2)}\times$$

$$\times\left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha^2+\beta_n^2}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{2\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\frac{\operatorname{ch}\alpha h-1}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}\,d\alpha \tag{1.11}$$

$$e_n=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\beta_n(f_n-\varphi_n)-$$

$$-\frac{8(\lambda+\mu)}{\pi h(\lambda+3\mu)}\int_0^\infty\left[\frac{\alpha\beta_n}{\alpha^2+\beta_n^2}\left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha^2+\beta_n^2}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\frac{\operatorname{ch}\alpha h-1}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}\sum_{k=1}^\infty\frac{\beta_k\varphi_k}{\alpha^2+\beta_k^2}\right]d\alpha$$

Ниже будет доказано, что бесконечная система алгебраических уравнений (1.10) есть вполне регулярная система.

Определив неизвестные M_n из системы (1.10), по формулам (1.7) найдем $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$. Подставив значения этих функций в формулы (1.3) и (1.4), получим следующие окончательные формулы для определения напряжений и перемещений в полуполосе:

$$\sigma_x=-\frac{4E}{\pi(1+\nu)}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}[\operatorname{sh}\alpha(h-y)+\operatorname{sh}\alpha y-\alpha(h-y)\operatorname{ch}\alpha y-$$

$$-\alpha y\operatorname{ch}\alpha(h-y)]\left\{\sum_{k=1}^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta_k^2}\left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\nu\right)M_k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\varphi_k\beta_k\right]\right\}d\alpha-\frac{E}{1+\nu}\sum_{k=1}^\infty\{[\beta_k\varphi_k+2(1-\nu)M_k]e^{-\beta_k x}+$$

$$+M_k\beta_k xe^{-\beta_k x}\}\cos\beta_k y$$

$$\sigma_y=-\frac{4E}{\pi(1+\nu)}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}[\operatorname{sh}\alpha(h-y)+\alpha(h-y)\operatorname{ch}\alpha y+\operatorname{sh}\alpha y+$$

$$+\alpha y\operatorname{ch}\alpha(h-y)]\left\{\sum_{k=1}^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta_k^2}\left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\nu\right)M_k+\frac{1}{2}\varphi_k\beta_k\right]\right\}d\alpha+$$

$$+\frac{E}{1+\nu}\sum_{k=1}^\infty[\varphi_k\beta_k+M_k(\beta_k x-2\nu)]e^{-\beta_k x}\cos\beta_k y$$

$$\tau_{xy}=\frac{4E}{\pi(1+\nu)}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}[\alpha y\operatorname{sh}\alpha(h-y)-\alpha(h-y)\operatorname{sh}\alpha y]\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta_k^2}\left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\nu\right)M_k+\frac{1}{2}\varphi_k\beta_k\right]\right\}d\alpha-$$

$$-\frac{E}{1+\nu}\sum_{k=1}^\infty\left\{[\varphi_k\beta_k+(1-2\nu)M_k]e^{-\beta_k x}+M_k\beta_k xe^{-\beta_k x}\right\}\sin\beta_k y \tag{1.12}$$

$$u=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}\{(1-2\nu)[\operatorname{sh}\alpha(h-y)+\operatorname{sh}\alpha y]-\alpha(h-y)\operatorname{ch}\alpha y-$$

$$-\alpha y\operatorname{ch}\alpha(h-y)\}\left\{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2+\beta_k^2}\left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\nu\right)M_k+\frac{1}{2}\varphi_k\beta_k\right]\right\}d\alpha+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\beta_k}\{[(3-4\nu)M_k+\beta_k\varphi_k]e^{-\beta_k x}+M_k\beta_k xe^{-\beta_k x}\}\cos\beta_k y+$$

$$+\frac{16\nu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\alpha h-1}{\alpha h(\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h)}\left\{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2+\beta_k^2}\left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\nu\right)M_k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\varphi_k\beta_k\right]\right\}d\alpha+\frac{1}{h}\int_0^h f(y)\,dy$$

$$v=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}\{2(1-\nu)[\operatorname{ch}\alpha(h-y)-\operatorname{ch}\alpha y]+\alpha y\operatorname{sh}\alpha(h-y)-$$

$$-\alpha(h-y)\operatorname{sh}\alpha y\}\left\{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2+\beta_k^2}\left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2+\beta_k^2}-\nu\right)M_k+\frac{1}{2}\varphi_k\beta_k\right]\right\}d\alpha+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty (M_k xe^{-\beta_k x}+\varphi_k e^{-\beta_k x})\sin\beta_k y$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

§ 2. *Доказательство регулярности бесконечной алгебраической системы (1.10).*

Согласно (1.11)

$$\sum_{k=1}^\infty |A_{nk}|\leqslant\frac{8\beta_n}{\pi h}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta_n^2}\left|\frac{2\beta_n^2}{\alpha^2+\beta_n^2}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right|\times$$

$$\times\frac{\operatorname{ch}\alpha h-1}{\operatorname{sh}\alpha h+\alpha h}\left[\sum_{k=1}^\infty\left|\frac{2\beta_k^2}{(\alpha^2+\beta_k^2)^2}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\alpha^2+\beta_k^2}\right|\right]d\alpha \tag{2.1}$$

Но

$$\sum_{k=1}^\infty\left|\frac{2\beta_k^2}{(\alpha^2+\beta_k^2)^2}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\alpha^2+\beta_k^2}\right|=2\sum_{k=1}^\infty\left|\frac{(1-\nu)\beta_k^2-\nu\alpha^2}{(\alpha^2+\beta_k^2)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^\infty\frac{(1-\nu)\beta_k^2+\nu\alpha^2}{(\alpha^2+\beta_k^2)^2}=\frac{1-\nu}{2}\frac{\alpha h\operatorname{sh}\alpha h-2\operatorname{ch}\alpha h+2}{\alpha^2(\operatorname{ch}\alpha h-1)}-$$

$$-\frac{1-2\nu}{4}\frac{\alpha^2h^2+\alpha h\operatorname{sh}\alpha h-4\operatorname{ch}\alpha h+4}{\alpha^2(\operatorname{ch}\alpha h-1)}=$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{ch}\alpha h - 1)} [(1-2\nu)(\alpha h \operatorname{sh}\alpha h - \alpha^2 h^2) +$$

$$+ 2\nu (\alpha h \operatorname{sh}\alpha h + 2 - 2\operatorname{ch}\alpha h)] \tag{2.2}$$

Используя следующие неравенства:

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha h - \alpha h}{\operatorname{sh}\alpha h + \alpha h} \leqslant 1; \quad \frac{\alpha h \operatorname{sh}\alpha h + 2 - 2\operatorname{ch}\alpha h}{\alpha h (\operatorname{sh}\alpha h + \alpha h)} \leqslant 1 \tag{2.3}$$

получим

$$\frac{\alpha (\operatorname{ch}\alpha h - 1)}{\operatorname{sh}\alpha h + \alpha h} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2\beta_k^2}{(\alpha^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\alpha^2 + \beta_k^2} \right| \leqslant \frac{h}{4} \tag{2.4}$$

В силу (2.4) неравенство (2.1) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| \leqslant \frac{4\beta_n}{(3-4\nu)\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta_n^2} \left| \frac{\beta_n^2}{\alpha^2 + \beta_n^2} - \nu \right| d\alpha =$$

$$= \frac{1}{3-4\nu} \left| (1-2\nu) \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}} - 1 \right) + \frac{4}{\pi} \sqrt{\nu - \nu^2} \right| \leqslant \frac{2}{\pi}$$

$$\text{при } 0 \leqslant \nu \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, алгебраическая система (1.10) вполне регулярна.

Ограниченность свободных членов бесконечной алгебраической системы (1.10) становится очевидной, если учитывать свойства коэффициентов Фурье для функций, входящих в граничные условия, которые по меньшей мере принадлежат классу C_1.

§ 3. В заключение приведем результаты численного примера, которые соответствуют следующим исходным данным:

$$\frac{u}{h} = -\left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 10^{-3}, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h$$

$$\nu = \frac{1}{3}, \quad E = 2 \cdot 10^6 \ кГ/см^2 \tag{3.1}$$

Для поставленной задачи решена соответствующая бесконечная алгебраическая система (1.10), а по формулам (1.12) вычислены значения напряжений σ_x и τ_{xy}. Вычисления производились на ЭЦВМ „Наири". Результаты этих вычислений приведены в виде таблиц 1 и 2.

Эпюры напряжений σ_x и τ_{xy} (для сечений $x/h = 0$, $1/2$, 1) (фиг. 2 и фиг. 3) показывают, что напряжения типа плоского пограничного слоя быстро затухают при удалении от кромки полуполосы, однако около кромки они достаточно велики.

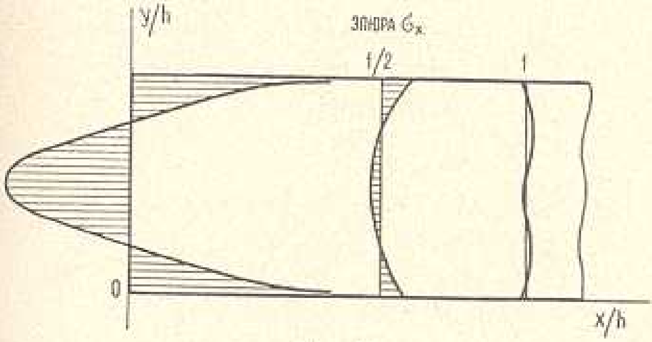
Значения σ_x $(кГ/см^2)$ *Таблица 1*

y/h \ x/h	0	1/64	1/2	1	2
0		1288.8	212.9	−3.2	−1.1
1/64	1405.9	1319.0	205.2	−5.2	0.1
1/32	1338.4	1287.7	198.5	−1.0	−0.3
1/8	720.8	716.3	131.8	5.3	−0.3
1/4	−131.4	−124.5	−8.3	2.8	0.0
1/2	−1036.7	−1011.1	−183.7	−6.5	0.3

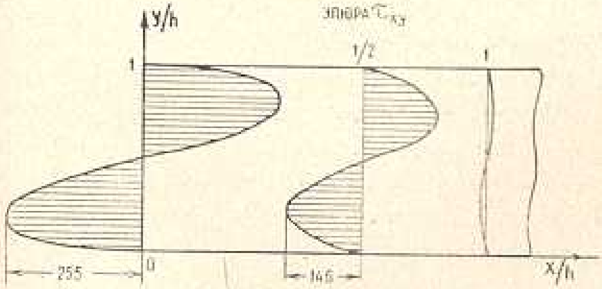
Таблица 2

Значения τ_{xy} $(кГ/см^2)$

y/h \ x/h	0	1/2	1	2
0	0	0	0	0
1/64	105.98	11.98	−1.2	1.6
1/32	167.4	28.03	−0.6	1.9
1/8	255.1	112.68	7.0	0.1
1/4	248.0	146.2	11.4	−0.3
1/2	0	0	0	0



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Поэтому в теории пластинок и оболочек достаточно точно могут быть определены напряжения и перемещения вдали от границ. Вблизи краев пластинки и оболочки плоским пограничным слоем нельзя пренебрегать.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 XI 1969

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Ռ. Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԿԻՍԱՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաշերտի համար առաձգականության տեսության հարթ մի քանի խնդիրներ, երբ վերջավոր եզրում տրված են՝ ա) տեղափոխումները, բ) համապատասխան տեղափոխման և լարման արժեքները ամբողջ եզրի վրա, իսկ երկայնական եզրերում տրված են լարումների արժեքները (դիտարկված խնդիրներում նրանք ընդունվում են հավասար զրոյի): Լուծված է նշված եզրային խնդիրներից առաջին տիպի սիմետրիկ խնդիրը: Նշվում է, որ բերված եղանակով կարելի է լուծել նաև մյուս խնդիրները:

Խնդրի լուծումը հանգեցված է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը, ցույց է տրված որ ստացված սիստեմը լիովին ռեգուլյար է:

Նշված խնդիրների լուծումները կարող են օգտագործվել սալերի և թաղանթների տեսության մեջ՝ եզրային ազդեցությունները հաշվի առնելու համար:

ON A MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A SEMI-STRIP

L. A. AGALOVIAN, R. S. GEVORKIAN

Summary

In the present work the symmetrical mixed problem of elasticity for a semi-strip with given values of displacements on one side of the semi-strip and with the longitudinal sides free from stress is solved.

The solution of the problem is given by the combination of Fourier's integrals and series. The infinite system for the unknown coefficients is obtained and is shown to be perfectly regular.

The solutions obtained may be applied to considerations of edge effects of a plane boundary edge type in the theory of plates and shells.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. 26, вып. 4, 1962.
2. *Green A. E.* Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, vol. 269, No 1339, 1962.
3. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, т. 29, вып. 4, 1965.
4. *Агаловян Л. А.* О граничных условиях для изгиба анизотропных пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XIX, №4, 1966.
5. *Ворович И. И., Копасенко В. В.* Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, т. 30, вып. 1, 1966.
6. *Horvay G.* The end problem of rectangular strips. J. Appl. Mech., vol. 20, 1953.
7. *Horvay G.* Biharmonic eigenvalue problem of the semi-infinite strip. Quart. Appl. Math., vol. 15, №1, 1957.
8. *Koiter W. T., Alblas J. B.* On the bending of cantilever rectangular plates. Proc. Koninke. Nederl. Akad. wet. B. 1954, vol. 57, №2, №5, vol. 60, №3, 1957.
9. *Benthem J. P.* A Zaplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis. Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 16, №4, 1963, p. 413—429.
10. *Zorski H.* A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. stosowanej, vol. 10, №3, 1958.
11. *Teodorescu.* Probleme plane in teoria elasticitatii, vol. I, editura Acad. Republicii Populare Romine, 1961.
12. *Ling C. B., Cheng F. H.* Stresses in a semi-infinite strip. Int. J. Eng. Sci, vol. 5, №2, 1967, p. 155.
13. *Pickett G.* Application of the Fourier Method to the Solution of Certain Boundary Problems in the theory of Elasticity. J. Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 69, 1944, p. 176.
14. *Pickett G., Jyengar K. T. S.* Stress concentrations in post-tensioned prestressed concrete beams. J. Technol., vol. 1, №2, 1956.
15. *Ямасида.* Исследование напряжений в полубесконечной полосе под действием сил, приложенных к ее концу. Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs., vol. 20, №95, 1954, p. 466.
16. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, XXI, вып. 1, 1957.
17. *Прокопов В.К.* Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. ПММ, 16, №1, 1952, 45—56.
18. *Галфаян П. О.* Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. н., т. XVI, №1, 1964.
19. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М., 1962.