ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 2, 1970 Механика

К. Х. ШАХБАЗЯН, В. М. ТАИРЯН

СИНТЕЗ ПЛОСКОГО ЧЕТЫРЕХШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА ПРИ ЗАДАННЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ОСИ ШАТУНА

В данной статье предлагается аналитический метод решения задачи синтеза плоского четырехшарнирного механизма по заданным положениям прямой, связанной с шатуном.

Положение плоской фигуры, совершающей движение в своей плоскости, вполне определяется положениями двух ее точек. Однако, возможно, положение плоской фигуры определять лишь положением одной точки и углом наклона проходящей через заданную точку прямой относительно выбранной оси на неподвижной плоскости.

В шарнирном четырехзвеннике положения шатунной плоскости вполне определяются заданием общей точки пары кривошип—шатун и углом наклона оси шатуна относительно одной из осей координат, т. е. положения шатунной плоскости в четырехзвеннике определяются направлениями оси шатуна, ограниченных с одной стороны, в частности, находящихся на одной окружности.

В дальнейшем договоримся под выражением „направления оси шатуна", введенном для краткости письма, подразумевать „направления оси шатуна, ограниченных с одной стороны окружностью".

Остановимся на вопросе определенности задачи синтеза четырехшарнирника по положениям, заданным направлениями оси шатуна.

При заданных трех направлениях оси шатуна четырехзвенник вполне определен, если задана длина шатуна l или же любая из координат (x, y) центра вращения коромысла*. Если же не задаваться любым из вышеуказанных параметров, то для определенности задачи необходимо задание четвертого направления оси шатуна. Если задаваться относительными направлениями оси шатуна, т. е. углы наклона отсчитывать от прямой на неподвижной плоскости, совпадающей с одним из направлений оси шатуна, то задача станет определенной при пяти заданных относительных направлениях оси шатуна.

Задаваться четырехзвенником более пяти относительными направлениями оси шатуна, в общем случае, не представляется возможным.

С математической точки зрения задачи синтеза по заданным направлениям оси шатуна представляют собой интерполяционные задачи с наперед заданными узлами интерполяции. Подобные задачи решались рядом авторов (2), (3), (4), (5) различными методами: в частнос-

* Здесь и в дальнейшем ведомое звено условно названо коромыслом.

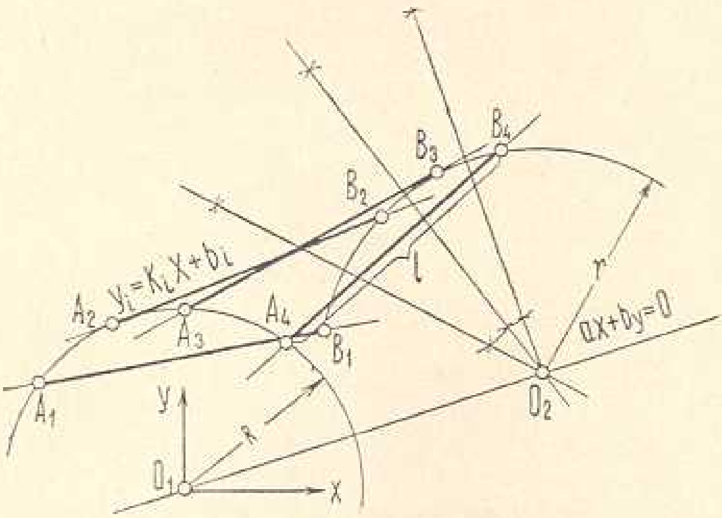
ти, методами кинематической геометрии (Бурместер, Альт, Бейер, Лихтенхельдт, Черкудинов и др.), аналитическим методом (Уилсон), применением комплексного переменного (Блох), чисто геометрическим методом (Хайн) и т. д.

Метод подхода к решению поставленной задачи

Пусть заданы соответствующие уравнения направления оси шатуна

$$y_i = k_i x + b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

при этом, начало координат совпадает с центром вращения $O_1 A$ кривошипа (фиг. 1).



Фиг. 1.

При радиусе кривошипа $O_1 A = R$ координаты точки A определяются, если решим систему (1) с уравнением окружности

$$A_x^2 + A_y^2 = R^2 \tag{2}$$

При выборе координат точки A необходимо, чтобы удовлетворялось одно из нижеследующих условий:

$$\begin{aligned} &A_{x_1} > A_{x_2} > \cdots > A_{x_n} \; (A_{x_1} < A_{x_2} < \cdots < A_{x_n}) \\ &A_{y_1} > A_{y_2} > \cdots > A_{y_n} \; (A_{y_1} < A_{y_2} < \cdots < A_{y_n}) \end{aligned} \tag{3}$$

чтобы не нарушалась требуемая последовательность занимаемых положений оси шатуна.

Если же заданы угловые коэффициенты шатуна и соответствующие координаты начальной точки A оси шатуна, то из (2) определяем вторую неизвестную координату.

Имея координаты точки A и угловой коэффициент k, определяем координату точки B, выраженную через координаты известной точки A и искомую длину шатуна l

$$B_{x_i} = A_{x_i} \pm l \cos \alpha_i$$

$$B_{y_i} = A_{y_i} \pm l \sin \alpha_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

где

$$\alpha_i = \operatorname{arc\,tg} k_i$$

Центр вращения точки B находится на перпендикуляре к отрезку между точками B_i.

Направления отрезков определяются ненормированными величинами

$$B_{x_i} - B_{x_{i-1}}, \; B_{y_i} - B_{y_{i-1}} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Известной точкой перпендикуляра является середина отрезка между точками, соответствующими двум положениям точки B. Поэтому уравнение прямой, на которой лежит центр вращения, примет вид

$$\begin{gathered}(B_{x_i} - B_{x_{i-1}})(2x - B_{x_i} - B_{x_{i-1}}) + \\ + (B_{y_i} - B_{y_{i-1}})(2y - B_{y_i} - B_{y_{i-1}}) = 0\end{gathered} \tag{5}$$

Количество уравнений (5) будет на единицу меньше числа заданных уравнений оси шатуна.

Уравнение (5) позволяет произвести синтез данного механизма по трем и четырем направлениям оси шатуна, ограниченных с одной стороны.

При определении трех параметров механизма имеем два уравнения вида (5), которые после соответствующих преобразований приводятся к виду

$$(A_i + lB_i)\,x + (C_i + lD_i)\,y + lN_i = 0 \qquad i = 1, 2 \tag{6}$$

где A, B, C, D и N — известные величины, выраженные через координаты точки A и соответствующие им угловые коэффициенты оси шатуна.

Задаваясь одним из неизвестных параметров (x; y; l), определяем из системы (6) остальные два.

Следует отметить, что при задании l задача приводится к известной задаче синтеза по трем положениям шатуна.

Имея x, y и l, определяем длину коромысла

$$r = \sqrt{(B_{x_i} - x)^2 + (B_{y_i} - y)^2} \tag{7}$$

Не останавливаясь на подробностях вычисления при заданных трех направлениях, перейдем к синтезу по четырем направлениям оси шатуна.

Синтез по четырем направлениям оси шатуна

Пусть требуется спроектировать шарнирный четырехзвенник, для которого ось шатуна в соответствующих положениях кривошипа принимала последовательно направления, заданные уравнениями (фиг. 1)

$$y_i = k_i x + b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

При длине кривошипа $R = 1$ определяем координаты точки A, после чего по уравнениям (4) вычисляем координаты точки B, выраженные через неизвестную длину шатуна.

Уравнения перпендикуляров, на которых лежит центр вращения коромысла после соответствующих преобразований принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (A_1 \pm lB_1)\, x + (C_1 \pm lD_1)\, y \pm lN_1 = 0 \\ (A_2 \pm lB_2)\, x + (C_2 \pm lD_2)\, y \pm lN_2 = 0 \\ (A_3 \pm lB_3)\, x + (C_3 \pm lD_3)\, y \pm lN_3 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

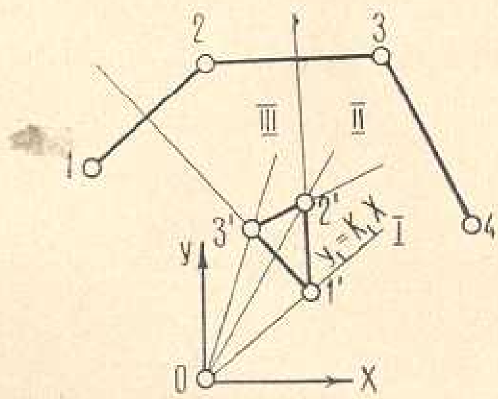
где

$$A_{i-1} = A_{x_i} - A_{x_{i-1}}, \quad C_{i-1} = A_{y_i} - A_{y_{i-1}}$$

$$B_{i-1} = \cos\alpha_i - \cos\alpha_{i-1}, \quad D_{i-1} = \sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1} \tag{9}$$

$$N_{i-1} = A_{x_{i-1}} \cos\alpha_{i-1} + A_{y_{i-1}} \sin\alpha_{i-1} - A_{x_i} \cos\alpha_i - A_{y_i} \sin\alpha_i$$

В общем случае перпендикуляры к отрезкам B_1B_2, B_2B_3 и B_3B_4 (фиг. 2) пересекаются в трех различных точках, образуя замкнутый контур $1'2'3'1'$.



Фиг. 2.

Используя уравнения перпендикуляров (8) напишем уравнения прямых, проходящих через начало координат и соответственно точки $1'$ и $2'$

$$y_1 = -\frac{A_2N_1 - A_1N_2 \pm (B_2N_1 - B_1N_2)\, l}{C_2N_1 - C_1N_2 \pm (D_2N_1 - D_1N_2)\, l}\, x$$

$$y_{II} = -\frac{A_3N_2 - A_2N_3 \pm (B_3N_2 - B_2N_3)\, l}{C_3N_2 - C_2N_3 \pm (D_3N_2 - D_2N_3)\, l}\, x \tag{10}$$

Потребуем, чтоб эти две прямые совпали, т. е. приравняем угловые коэффициенты

$$\frac{A_I \pm lB_I}{C_I \pm lD_I} = \frac{A_{II} \pm lB_{II}}{C_{II} \pm lD_{II}} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} A_I &= A_2N_1 - A_1N_2 \quad & C_I &= C_2N_1 - C_1N_2 \\ A_{II} &= A_3N_2 - A_2N_3 \quad & C_{II} &= C_3N_2 - C_2N_3 \\ B_I &= B_2N_1 - B_1N_2 \quad & D_I &= D_2N_1 - D_1N_2 \\ B_{II} &= B_3N_2 - B_2N_3 \quad & D_{II} &= D_3N_2 - D_2N_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Прямая, проходящая через начало координат и точку $3'$, при этом совпадет с ними, так как при обеспечении условия (11) точки $1'$, $2'$ и $3'$ сливаются в одну. Условие (11) дает нам следующее квадратное уравнение относительно длины шатуна:

$$ml^2 \pm pl + q = 0 \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} m &= B_I D_{II} - B_{II} D_I \\ p &= A_I D_{II} - A_{II} D_I + B_I C_{II} - B_{II} C_I \\ q &= A_I C_{II} - A_{II} C_I \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что в уравнении (13) нет необходимости двойных знаков. Необходимо лишь учитывать, что полученным отрицательным значениям длины шатуна соответствует левостороннее расположение точки B.

Из уравнения (13) можем иметь два действительных решения (возможно, чтобы они совпали), или ни одного относительно длины шатуна.

После определения l из любых двух уравнений системы (8) определяем x и y. Далее по формуле (7) определяем длину коромысла r.

Используя уравнение (13), можно решить задачу синтеза кривошипно-ползунного механизма по четырем значениям угла давления (μ) в соответствующих положениях ползуна (фиг. 3).

В выражении (4) в этом случае $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, $x_1 = 0$ и $z_i = \mu_i$.

Остальное решение аналогично синтезу четырехшарнирника по четырем положениям оси шатуна, лишь только нужно учесть, что коромыслу в четырехшарнирнике соответствует кривошип в данной задаче.

С помощью уравнения (13) становится также возможным построить кривую круговых точек для заданных четырех направлений оси шатуна, ограниченных с одной стороны. Для этого ось шатуна поворачиваем каждый раз на постоянный угол (δ) во всех четырех положениях шатуна (фиг. 4). Далее определяем координаты круговых точек по формулам

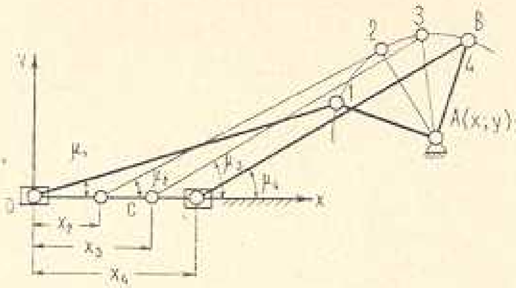
$$x_i^k = A_{x_i} + l_i \cos\alpha_i'$$

$$y_i^k = A_{y_i} + l_i \sin\alpha_i' \qquad (15)$$

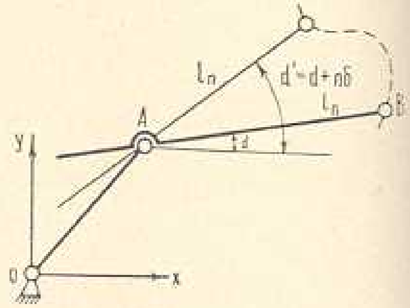
где

$$\alpha_i' = \alpha_i + n\delta; \quad n = 1, 2, \cdots, m \text{ и } m = \frac{180}{\delta}$$

По полученным координатам строим кривую круговых точек.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Кривую круговых точек возможно построить и без определения координат точек кривой. Для этого необходимо вычисленные величины l откладывать от точки A_1 на соответствующих направлениях оси шатуна.

Считаем необходимым на основе вышеизложенного отметить, что *в любом четырехзвеннике наперед заданным четырем положениям любого звена на оси шатуна соответствует единственная точка, или ни одна, находящаяся в тех же положениях на окружности.*

Как из уравнения (13), так и из того, что кривая круговых точек является алгебраической кривой третьего порядка, следует единственность круговой точки на оси шатуна, кроме двух уже имеющихся.

Пример

Требуется спроектировать четырехшарнирный механизм, в котором при заданных четырех положениях кривошипа ($R = 1$) шатун составляет с осью ox соответствующие углы. Заданы положения кривошипа координатами A_{x_i}

$$A_{x_1} = -0.8030, \; A_{x_2} = -0.3764, \; A_{x_3} = 0, \; A_{x_4} = 0.5818$$

и соответствующие им углы наклона оси шатуна

$$\alpha_1 = 11^0 33'; \; \alpha_2 = 22^0 05'; \; \alpha_3 = 28^0 01'; \; \alpha_4 = 41^0 25'$$

Ось вращения кривошипа совпадает с началом координат.

Из выражения $A_x^2 + A_y^2 = 1$ определяем координаты

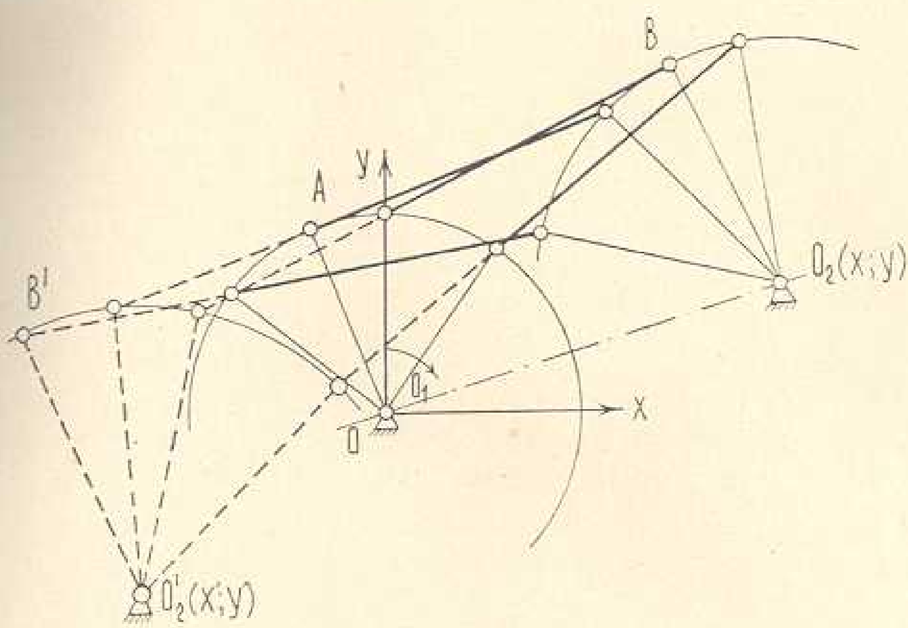
$$A_{y_1} = 0.5959,\ A_{y_2} = 0.9135,\ A_{y_3} = 1,\ A_{y_4} = 0.8133$$

Далее по формулам (14) определяем коэффициенты

$$m = 0.003487$$

$$p = 0.001893$$

$$q = 0.006254$$



Фиг. 5.

Подставив их значения в уравнение (13) и решив, получим: для правостороннего расположения точки B

$$l = 1.6379$$

для левостороннего

$$l = 1.0950$$

Далее, из двух любых уравнений системы (8) определяем координаты центра вращения коромысла $(x,\ y)$.

Для правостороннего расположения

$$x = 2.0437,\ y = 0.6469$$

а для левостороннего — $x = -1.2598,\ y = -0.9168$

Наконец, из уравнения (7) определяем длину коромысла: для правостороннего расположения $r = 1.266$,
а для левостороннего расположения $r = 1.5388$

Итак, получили два механизма, удовлетворяющих нашим требованиям, которые и показаны на фиг. 5.

Из двух механизмов выбираем тот, который в условиях конкретной задачи представляется наиболее удобным.

Ереванский Государственный
университет

Поступила 24 VI 1969

Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ, Վ. Մ. ԹԱԻՐՅԱՆ

ՀԱՐԹ ՔԱՌԱՀՈԴԱԿԱՊԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱԹԵՎԻ ԱՌԱՆՑՔԻ ՏՐՎԱԾ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է մեթոդ, որի օգնությամբ հնարավոր է լինում նախագծել քառահոդակապային մեխանիզմ շարժաթևի առանցքի տված երեք և չորս ուղղություններով (սահմանափակված մեկ կողմից), կամ շարժաթևի առանցքի անկյունային գործակցի և նրան համապատասխանող սկզբնական կետի կոորդինատներով, որոնք գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա տված դիրքերում։

Որպես օրինակ նախագծված է քառահոդակապային մեխանիզմ, որտեղ շառավիղի տված չորս դիրքերում շարժաթևի առանցքը Ox առանցքի հետ կազմում է համապատասխան անկյուններ։

SYNTHESIS OF A PLANE FOUR-HINGE MECHANISM ACCORDING TO THE GIVEN DIRECTIONS OF THE AXIS OF A CONNECTING-ROD

K. Kh. SHAKHBAZIAN, V. M. TAIRIAN

Summary

In this work a method is offered by means of which the problem of synthesis of the plane mechanism for three or four given directions of the axis of a connecting-rod is solved limited on one side or according to angle coefficients of the axis of the connecting-rod and respective coordinates of the reference point (on the same circle).

As an example a four-hinge mechanism is designed in which for the given four positions of the crank the connecting-rod forms respective angles with the *Ox* axis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов. Изд. Наука, 1965.
2. *Артоболевский И. И., Блох З. Ш., Добровольский В. В.* Синтез механизмов. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
3. *Бейер Р.* Кинематический синтез механизмов. Машгиз, М., 1959.
4. *Уилсон.* Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 2, 1965.
5. *Hain K.* Angewandte Getriebelehre. Hannover, 1953.