ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 2, 1970 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ВБЛИЗИ КАУСТИКИ

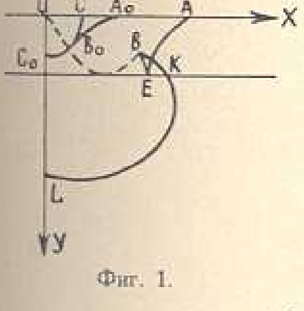
1. Рассматривается задача о движении неоднородной сжимаемой жидкости под действием давления, заданного на ее поверхности в виде

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1\left(\dfrac{x}{Vt}\right) & x < Vt \\ O & x > Vt \end{cases} \tag{1.1}$$

где ось Ox выбрана по невозмущенной поверхности жидкости, V — скорость фронта давления по поверхности, t — время с начала движения. Скорость звука в невозмущенной жидкости $a(y) < V$ при $y < y_0$, $a(y) \geqslant V$ при $y \geqslant y_0$. При этих условиях картина возмущенного движения дается фиг. 1. В линейной задаче уравнение фронта волны A_0B_0, соответствующей возмущениям, созданным точкой A_0, имеет вид [1]

$$x - Vt_0 = \frac{1}{V}\int_0^y \frac{dy}{\mu}$$

$$t - t_0 = \int_0^y \frac{dy}{a^2(y)\,\mu}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}} \tag{1.2}$$



Фиг. 1.

При постоянном t_0 из (1.2) получается уравнение луча OB_0. Картина фронтов волн, получаемая после достижения волной A_0B_0 линии $y = y_0$, дается линиями AE и BE [1], причем BE есть фронт волны, отраженный от каустики $y = y_0$.

Уравнения BE и соответствующих лучей будут

$$x - Vt_0 = \frac{1}{V}\int_0^{y_0} \frac{dy}{\mu} - \frac{1}{V}\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\mu}$$

$$t - t_0 = \int_0^{y_0} \frac{dy}{a^2(y)\,\mu} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{a^2(y)\,\mu} \tag{1.3}$$

или

$$x - Vt = -V\int\limits_0^{y_0} \psi dy + V\int\limits_{y_0}^{y} \psi dy \tag{1.4}$$

После введения координат x_1, y_1,

$$x_1 = x - Vt + V\int\limits_0^{y_0} \psi dy$$

$$y_1 = y - y_0 \tag{1.5}$$

связанных с точкой E, в окрестности отраженной от $y = y_0$ волны BE, линейное решение примет вид [2]

$$P = 2A_1(-y_1)^{-\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\frac{x_1}{\sigma}}{2} + \frac{3\ln 3 + 4\ln 2}{2\pi}\right)$$

$$\sigma = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y_1)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{R} = \frac{a'}{V} \tag{1.6}$$

где вблизи $y = y_0$ положено $a(y) = V - a'y_1$. Постоянная A_1 дается решением для интенсивности AE по лучевой теории [3]

$$P_{\text{геом}} = P_1(1)\sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}}{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}}}\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}} \tag{1.7}$$

или в переменных (1.5)

$$P_{\text{геом}} = A_1(-y_1)^{-\frac{1}{4}}, \quad A_1 = P_1\sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}}{\frac{2}{RV^2}}}\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}} \tag{1.8}$$

Поскольку известно, что на отраженном от каустики фронте волны имеется логарифмическая особенность [3], [4], с учетом асимптотического решения вблизи линии $y = y_0$ (1.6), можно предположить, что вблизи линии BE и вдали от $y = y_0$ выполняется соотношение

$$P = -\frac{1}{\pi}P_1\sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}}{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}}}\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}}\ln\left|\frac{t - t_1}{\int\limits_{y_0}^{y} \psi dy}\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi}P_1\sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a^2(0)}-\frac{1}{V^2}}{\frac{1}{a^2(y)}-\frac{1}{V^2}}}\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}}\,(3\ln 3+5\ln 2) \qquad (1.9)$$

где

$$t-t_1=t-\frac{x}{V}-\int_0^{y_*}\mu dy+\int_{y_0}^{y}\mu dy \qquad (1.10)$$

или в переменных (1.5) при малых $y_1=y-y_0$

$$t-t_1=-\frac{x_1}{V}-\frac{1}{V}\sqrt{\frac{2}{R}}\,\frac{2}{3}(-y_1)^{\frac{3}{2}} \qquad (1.11)$$

причем из (1.9) получится (1.6).

Для устранения особенности в решении (1.9) вблизи BE можно применить метод замены в (1.9) линейной характеристики $t-t_1=\mathrm{const}$ через $\mp y_{2,3}$, где $y_{2,3}=\mathrm{const}$ есть уравнение одномерных вдоль луча нелинейных характеристик

$$\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{1}{a(y)}-\alpha^0\frac{1}{a(y)}\frac{P}{\rho(y)\,a^2(y)} \qquad (1.12)$$

соответственно впереди и позади ударной волны BE [5], [6].

Здесь $\alpha^0=\dfrac{\rho^2(y)\,a^5(y)}{2}\dfrac{\partial^2\frac{1}{\rho}}{\partial P^2}$ [7], причем для адиабатического уравнения состояния с показателем n

$$\alpha^0=\frac{n+1}{2} \qquad (1.13)$$

В силу (1.3) для длины дуги ds вдоль отраженного от $y=y_0$ луча можно найти

$$ds=-\frac{dy}{a(y)\,\mu} \qquad (1.14)$$

поэтому (1.12) запишется в виде

$$\frac{\partial t}{\partial y}a(y)\,\mu=-\frac{1}{a(y)}+\alpha^0\frac{1}{\rho(y)\,a^3(y)} \qquad (1.15)$$

Подставляя в (1.15) (1.9), где заменено $t-t_1=y_{2,3}$, и интегрируя, можно найти

$$t-t_1=F(y_{2,3})\,A(y)+$$

$$+\frac{1}{\pi}P_1\sqrt[4]{\frac{1}{a^2(0)}-\frac{1}{V^2}}\int_{y_0}^{y}\frac{\alpha^0\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}}\ln\int_{y_0}^{y}\mu\,dy}{a^4(y)\,\rho(y)\,\mu^{\frac{3}{2}}}dy\mp y_{2,3} \qquad (1.16)$$

где

$$A(y)=-\frac{1}{\pi}P_1\sqrt[4]{\frac{1}{a^2(0)}-\frac{1}{V^2}}\int_{y_0}^{y}\frac{\alpha_0\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}}\,dy}{\rho(y)\,a^4(y)\,\mu^{\frac{3}{2}}} \qquad (1.17)$$

$$A(y)>0,$$

$$F(y_{2,3})=\ln|y_{2,3}|-(3\ln 3+5\ln 2) \qquad (1.18)$$

причем $t-t_1=\mp y_{2,3}$ на каустике.

Уравнение ударной волны дается (1.15), в котором следует заменить P на $\frac{P+P_0}{2}$, где P и P_0 — давления позади и впереди BE, получаемые по (1.9) с заменой $t-t_1$ на $y_{3,2}$. Тогда на ударной волне BE получится уравнение

$$\frac{\partial(t-t_1)}{\partial y}=A'(y)\,\frac{F(y_2)+F(y_3)}{2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\alpha^0P_1\sqrt[4]{\frac{1}{a^2(0)}-\frac{1}{V^2}}\,\frac{\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}}\ln\int_{y_0}^{y}\mu dy}{\rho(y)\,a^4(y)\,\mu^{\frac{3}{2}}} \qquad (1.19)$$

Подставляя в левую часть (1.19) $\frac{\partial(t-t_1)}{\partial y}$ из (1.16), взятого для значения y_3, то есть позади волны, можно найти

$$F'(y_3)\frac{dy_3}{dy}+\frac{dy_3}{dy}=A'\,\frac{F(y_2)-F(y_3)}{2} \qquad (1.20)$$

Второе условие найдется приравниванием $t-t_1$ для y_2 и y_3 и имеет вид

$$F(y_3)A+y_3=F(y_2)A-y_2 \qquad (1.21)$$

Из (1.20), (1.21) видно, что можно полагать $\frac{y_2}{A}$ и $\frac{y_3}{A}$ постоянными, причем получится

$$2+2\frac{y_3}{A}=\ln\frac{y_2/A}{y_3/A},\quad \frac{y_3}{A}+\frac{y_2}{A}=\ln\frac{y_2/A}{y_3/A} \qquad (1.22)$$

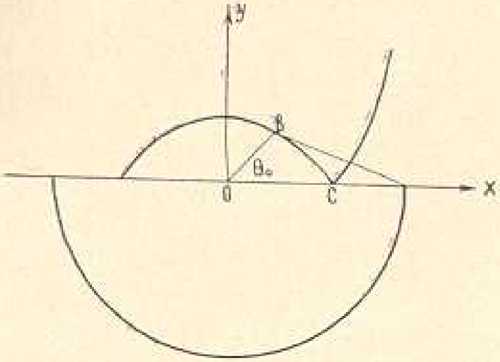
или

$$\frac{y_3}{A}=\frac{y_2}{A}-2,\quad 2\frac{y_2}{A}-2=\ln\frac{\frac{y_2}{A}}{\frac{y_2}{A}-2},\quad \frac{y_3}{A}>0 \tag{1.23}$$

Интересно, что значения постоянных $\frac{y_2}{A}, \frac{y_3}{A}$ повторяют результат [8].

Таким образом, всюду, где линейное решение имеет логарифмическую особенность и позади волны имеет место сжатие, ударная волна описывается приведенными выражениями.

Приведенный метод поэтому может быть применен к задаче определения в нелинейной постановке окрестности отраженной от полупространства волны BC, при наличии полного внутреннего отражения сферической волны от границы полупространства [9], [10] фиг. 2.



Фиг. 2.

Обозначая кривизну отраженной волны BC в начальном положении через K_2, вводя полярные координаты, можно найти [11] $\left(\lambda=1,\ \beta=-\frac{3}{2}\right)$ позади BC

$$P=\frac{A}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}}\,\frac{\sqrt{2}\,(\theta_0-\theta)^{\frac{1}{2}}\,(ct)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\{\lambda-\ln(t-\tau)\},\quad t>\tau \tag{1.24}$$

впереди BC

$$P=\frac{A}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}}\,\frac{\sqrt{2}\,(\theta_0-\theta)^{\frac{1}{2}}\,(ct)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\{\lambda-\ln(\tau-t)\},\quad t<\tau \tag{1.25}$$

где

$$\lambda=2\psi(1)-2\psi\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\frac{2(\theta-\theta_0)^2}{K_1-K_2}$$

$t=\tau$ есть уравнение BC в линейной задаче, c — начальная скорость звука, $K_1 = \frac{1}{ct}$*, $\theta = \theta_0$ — угол точки B соединения волны BC и боковой волны AB, $|\overline{x}_\beta|_{M_0}$ дает коэффициент расхождения лучевой трубки [4].

Заменяя в (1.24) и (1.25) характеристическую переменную $t-\tau$ через y_3 и $-y_2$, подставляя полученные значения P в уравнение характеристик

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\alpha^0 \frac{P}{\rho_0 c^2} \tag{1.26}$$

и интегрируя при условии $s=0$, $y_3 = t-\tau$, $y_2' = \tau - t$, можно получить уравнения характеристик впереди и позади волны BC

$$t - \tau = -\int_0^s \frac{\alpha^0 A_0 (\lambda - \ln y_2)}{\rho_0 c^3} ds - y_2$$

$$A_0 = \frac{A}{\sqrt{|\overline{x}_\beta|_{M_0}}} \frac{\sqrt{2}\,(\theta_0 - \theta)^{\frac{1}{2}} (ct)^{\frac{3}{2}}}{\pi} \tag{1.27}$$

$$t - \tau = -\int_0^s \frac{\alpha^0 A_0 (\lambda - \ln y_3)}{\rho_0 c^3} ds + y_3 \tag{1.28}$$

Вводя обозначения

$$F(y_1) = \ln y_1 - 2\psi(1) + 2\psi\left(\frac{3}{2}\right) - \ln 2 - \ln(\theta - \theta_0)^2$$

$$A_1 = \int_0^s \frac{\alpha^0 A_0}{\rho_0 c^3} ds, \quad A_1 > 0 \tag{1.29}$$

и используя условие на ударной волне

$$\frac{\partial (t-\tau)}{\partial s} = -\frac{1}{2c}\alpha^0 \frac{P + P_0}{\rho_0 c^2} \tag{1.30}$$

где P дается (1.24), а P_0 — (1.25), можно получить из (1.30)

$$\frac{\partial (t-\tau)}{\partial s} = \frac{1}{2c}\alpha^0 A_0 \frac{F(y_2) + F(y_3) + 2\ln(K_1 - K_2)}{\rho_0 c^2} \tag{1.31}$$

Подставляя (1.28) в (1.31), можно получить на ударной волне BC

$$F'(y_3) A_1 \frac{\partial y_3}{\partial s} + \frac{\partial y_3}{\partial s} = \frac{1}{2}\alpha^0 A_0 \frac{F(y_2) - F(y_3)}{\rho_0 c^3} \tag{1.32}$$

* Или кривизна гиперсферы с центром в M для неоднородной жидкости [4]

Отсюда видно, что можно полагать

$$\frac{y_2}{A_1} = \lambda_2, \quad \frac{y_3}{A_1} = \lambda_3 \tag{1.33}$$

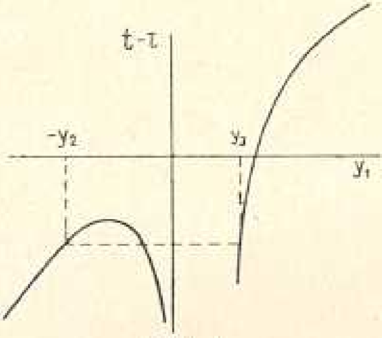
где λ_2 и λ_3 постоянны. Тогда из (1.32) и уравнения, получаемого приравниванием (1.27), (1.28), можно получить уравнения

$$2 + 2\lambda_3 = \ln\frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \quad \lambda_3 = \lambda_2 - 2, \quad \lambda_3 > 0 \tag{1.34}$$

которые повторяют уравнения (1.23).

Из (1.27) и (1.28) видна зависимость $t - \tau$ от y_1 ($y_1 = y_3$, $y_1 = -y_2$), изображенная на фиг. 3, из которой видно, что области впереди BC соответствует $y_1 \leqslant -y_2$, области позади BC соответствует $y_1 \geqslant y_3$. Скачок давления на BC по (1.24), (1.25) имеет вид

$$P - P_0 = -\frac{A}{\sqrt{|\ddot{x}_B|_{M_c}}}\frac{\sqrt{2}\,(\theta_0 - \theta)^{\frac{1}{2}}(ct)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\ln\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \tag{1.35}$$



Фиг. 3.

Строгое обоснование метода по существу дано в работе [6], где в качестве основного течения следует брать медленно меняющуюся часть решения, которая в первом порядке удовлетворяет линейным уравнениям. Тогда для быстро меняющейся, логарифмической, части решения получится линейное решение, где произведена замена характеристической переменной.

2. Для определения решения вблизи каустики в проводящей однородной среде рассматривается плоская задача о движении тонкого тела с углом раствора 2β в жидкости, находящейся в постоянном начальном магнитном поле B_0. В начальный момент $t = 0$ тело занимает отрицательную полуось x и имеет скорость c_0, где c_0 — скорость магнитозвуковых волн, а далее движется с положительным ускорением по закону $x_B = f(t)$, где B — вершина тела, $f'(t) \geqslant c_0$. В предположении, что магнитное поле B_0 направлено по положительной оси x, уравнения движения в линейной задаче запишутся в виде [12], [3]

$$\Delta_0\varphi = 0, \quad \Delta_0 = \{\tau^2 - a_1^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}(\tau^2 - a_0^2\xi_1^2) - a_0^2\tau^2\xi_2^2 \tag{2.1}$$

где введены обозначения $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$, $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $a_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$, причем ρ_0, a_0 — начальные плотность и скорость звука, и в качестве φ можно взять давление P, скорости частиц v_x, v_y или напряженности возмущенного магнитного поля $B_x = B_0(1 + b_x)$, $B_y = B_0 b_y$. Решение (2.1) в виде плоских волн $\varphi = e^{-i\omega t + i\omega\alpha x + i\omega\beta y}$ дает уравнение поверхности нормалей

$$1 - (\alpha^2 + \beta^2)(a_0^2 + a_1^2 - a_0^2 a_1^2\alpha^2) = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение лучей, вдоль которых движется волна AB (фиг. 4), имеет вид

$$x - f(t_0) = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha}}{\alpha\frac{d\beta}{d\alpha} - \beta}(t - t_0)$$

$$y = -\frac{1}{\alpha\frac{d\beta}{d\alpha} - \beta}(t - t_0) \tag{2.3}$$

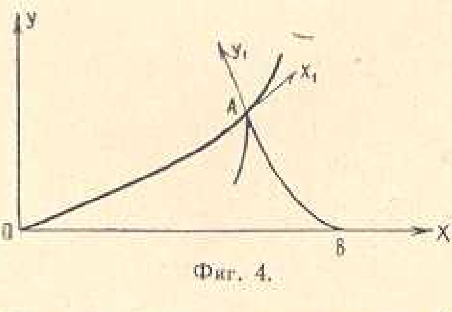
$$\alpha = \frac{1}{f'(t_0)}$$

При $f''(t) > 0$ лучи (2.3) имеют огибающую, называемую каустикой, уравнение которой получается из (2.3), к которому добавится условие

$$0 = 1 + \alpha\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}y\,\frac{f''(t_0)}{f'^2(t_0)} \tag{2.4}$$

Граничные условия на поверхности тела $y = r(x, t)$ имеют вид

$$v_y(x, 0, t) = f'(t)\frac{\partial r}{\partial x} \tag{2.5}$$



Фиг. 4.

В дальнейшем исследуется окрестность точки A пересечения волны AB с каустикой OA, на которую влияет только малая окрестность вершины B, для которой $x = f(t)$. Тогда из линеаризованных уравнений [3] $\frac{\partial b_y}{\partial t} = B^0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$ и условия обращения на теле в нуль нормальной компоненты магнитного поля $b_y = B^0 \frac{\partial r}{\partial x}$ можно получить условие (2.5).

Для определения решения всюду следует учесть конечную электропроводность среды. Вводя преобразование Лапласа по t для $v_y (\overline{v}_y)$ и полагая

$$\overline{v}_y = \int_{-\infty}^{\infty} (A e^{-i\alpha\omega x - i\omega\beta_2 y} + B e^{-i\alpha\omega x - i\omega\beta_1 y})\, d\alpha \tag{2.6}$$

из линеаризованных уравнений [3] для соответствующих значений b_x, b_y можно получить

$$b_x = \frac{-\tau\xi_2}{\tau^2 - \tau \frac{\eta}{4\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)} v_y$$

$$b_y = \frac{\tau\xi_1}{\tau^2 - \tau \frac{\eta}{4\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)} v_y \tag{2.7}$$

где η равно отношению квадрата скорости света к электропроводности.

Считая тело непроводящим, для напряженностей магнитного поля в нем можно полагать [3]

$$b_{1x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad b_{1y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\omega x - \omega|\alpha| y} \tilde{\varphi}\, d\alpha \quad (y < 0). \tag{2.8}$$

Приведенное выражение верно в случае, когда непроводящее тело занимает полуплоскость, что имеет место в задаче о движении непроводящего тонкого полутела по границе, отделяющей проводящую жидкость от непроводящего нижнего полупространства.

Поскольку [3] $\beta_1 = \alpha \sqrt{4\pi \frac{a_1^2 + a_0^2 - a_0^2 a_1^2 \alpha^2}{-a_0^2 i \alpha^2 \eta\omega}}$, учитывая толщину граничного слоя $\sim \sqrt{\frac{\eta}{\omega}}$, можно предыдущие рассуждения применять и для вышеуказанной задачи при условии, что толщина тела значительно превосходит $\sqrt{\frac{\eta}{\omega}}$, то есть всюду, кроме окрестности острия.

Тогда условие непрерывности b_x, b_y при $y=0$ [13] можно записать для величин $\overline{b}_x$, $\overline{b}_y$, соответствующих преобразованным согласно (2.6) значениям b_x, b_y (для v_y это $A+B$), в виде

$$\overline{b}_x = i\frac{\alpha}{|\alpha|}\overline{b}_y \tag{2.9}$$

Согласно (2.5) вблизи волны можно найти граничное условие для преобразования Лапласа от v_y

$$\overline{v}_y = \frac{1}{s}f'(t_0)\frac{\partial r}{\partial x}e^{-sF(x)}, \quad s=-i\omega$$

где $t=F(x)$ есть функция, обратная к $x=f(t)$. Тогда из (2.6), (2.7) и (2.9) получится с помощью преобразования Фурье

$$A+B=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-sF(\xi)}}{s}f'(t_0)\frac{\partial r}{\partial x}e^{i\omega\alpha\xi}d\xi \tag{2.10}$$

$$\frac{A(\beta_2+i|\alpha|)}{\omega^2+i\omega\frac{\eta}{4\pi}(\alpha^2+\beta_2^2)}=-\frac{B(\beta_1+i|\alpha|)}{\omega^2+i\omega\frac{\eta}{4\pi}(\alpha^2+\beta_1^2)}$$

Учитывая [12], что $\beta_1\approx\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ при $\eta\to 0$, из (2.10) можно найти, что $B\to 0$ при $\eta\to 0$ и для A получится значение

$$A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-sF(\xi)-i\omega\xi}}{s}\frac{\partial r}{\partial\xi}d\xi \tag{2.11}$$

которое получается использованием одного условия (2.5). Окончательно

$$\overline{v}_y=\frac{1}{2\pi}f'(t_0)\frac{\partial r}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega Z(\alpha,\,\xi)}d\xi \tag{2.12}$$

Вычисляя (2.12) по методу перевала, можно получить параметры фронта волны AB, однако вблизи точки A на каустике полученное таким образом решение не имеет места. Полагая

$$Z_0=\alpha_0(x-\xi_1)+\beta_0 y+F(\xi_1) \tag{2.13}$$

где α_0, ξ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\alpha_0=F'(\xi_1) \tag{2.14}$$

$$F''(\xi_1)-\frac{1}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}y}=0 \tag{2.15}$$

функцию Z можно представить в виде

$$
Z = Z_0 + (x - \xi_1 + \beta' y)(\alpha - \alpha_0) + \frac{F''(\xi_1)}{2}\,\xi^2 + \\
+ \frac{1}{6}\frac{R}{F''^{3}(\xi_1)}(\alpha - \alpha_0)^3, \quad \xi = \xi - \xi_1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{F''(\xi_1)} \tag{2.16}
$$

где введено обозначение

$$
R = \frac{F'''(\xi_1)}{F''^{2}(\xi_1)} + y\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \tag{2.17}
$$

Тогда (2.12) запишется через функцию Эйри

$$
e^{it}\bar{v}_y = e^{i\omega(Z_0 - t)}\,\frac{f'\dfrac{\partial r}{\partial x}}{s\sqrt{-\dfrac{i\omega}{2}F''(\xi_1)}}\left(\frac{2}{\omega R y}\right)^{\frac{1}{3}}\Phi\left\{\frac{x - \xi_1 + \beta'(\alpha_0)y}{\left(\dfrac{R}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\,\omega^{\frac{2}{3}}\right\} \tag{2.18}
$$

Из (2.18) видно, что в окрестности A решение определяется переменными

$$
x_1 = \alpha_0(x - \xi_1) + \beta_0 y + F(\xi_1) - t \\
y_1 = \frac{x - \xi_1 + \beta'(\alpha_0)y}{\sqrt[3]{\dfrac{R}{2}}} \tag{2.19}
$$

причем для больших ω, то есть вблизи фронта волны, имеют место порядки малости величин

$$
x_1 \sim y_1^{\frac{3}{2}} \tag{2.20}
$$

и в переменных x_1, y_1, t движение установившееся, причем производные по x_1 значительно превосходят производные по y_1. Оставляя в нелинейных уравнениях магнитной газодинамики [12] малые второго порядка, можно найти

$$
\tau b_x + \xi_2 v_y = -2\frac{\beta^2}{\rho_0^2\,\mu a_0^2}\,P\frac{\partial P}{\partial x_1} \\
\tau b_y - \xi_1 v_y = 2\frac{\alpha\beta}{\rho_0^2\,a_0^2\,\mu}\,P\frac{\partial P}{\partial x_1} \\
\tau v_x + \frac{1}{\rho_0}\xi_1 P = -\frac{a_1^2}{a_0^2}\,\alpha\beta^2\,\frac{1}{\rho_0^2\,\mu}\,\frac{1}{1 - a_1^2\alpha^2}\,P\frac{\partial P}{\partial x_1} \tag{2.21}
$$

$$\tau v_y + \frac{1}{\rho_0} \xi_2 P + a_1^2 (\xi_2 b_x - \xi_1 b_y) = -\frac{a_1^2}{a_0^2} \frac{\beta^3}{\mu} \frac{1}{1 - a_1^2 \alpha^2} P \frac{\partial P}{\partial x_1}$$

$$\tau P + \rho_0 a_0^2 \xi_1 v_x + \rho_0 a_0^2 \xi_2 v_y = -2\alpha^0 \frac{1}{\rho_0 a_0^2} P \frac{\partial P}{\partial x_1}$$

$$\mu = 1 - a_1^2 (\alpha^2 + \beta^2)$$

Индексы при α и β отброшены.

Уравнение состояния приближенно взято в виде $a = a_0 + (\alpha^0 - 1) \frac{P}{\rho_0 a_0}$, а правые части (2.21) получены из нелинейных слагаемых в уравнениях, в которые подставлены характеристические соотношения, соответствующие производным по x_1 в левых частях (2.21)

$$v_x = \frac{1}{\rho_0} \alpha P, \quad v_y = \frac{1}{\rho_0} \frac{\beta}{\mu} P, \quad b_x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\beta^2}{\mu} P, \quad b_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\alpha\beta}{\mu} P \tag{2.22}$$

Решая (2.21) относительно P, находящихся в их левых частях, можно получить уравнение

$$\Delta_0 P = \Delta_1 \left(P \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \tag{2.23}$$

где Δ_1 получается из правых частей (2.21) с использованием (2.22) в следующем виде:

$$\frac{\Delta_1}{\dfrac{\partial^3}{\partial x_1^3}} = 3 \frac{\beta^2}{\rho_0} a_1^2 (\alpha^2 + \beta^2) \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\rho_0 a_0^2} \alpha_0 \mu \tag{2.24}$$

Координаты точки A, которые даются (2.3), (2.4), можно обозначить через x_0, y_0. Тогда имеет место по (2.19)

$$x_1 = \alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0)$$
$$y_1 = \bar{y}_1 \frac{d\beta}{d\alpha} \frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{R}{2}}}, \quad \bar{y}_1 = (x - x_0) \frac{d\alpha}{d\beta} + y - y_0 \tag{2.25}$$

где α и β определяются не по (2.14), (2.15), а по (2.3), (2.4). Тогда, используя (2.2), можно приближенно найти

$$\Delta_0 = \frac{\left(\dfrac{2}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\alpha \dfrac{d\beta}{d\alpha} - \beta} y_1 (a_0^2 \beta^2 - 2 + a_0^2 \alpha^2 + a_1^2 \alpha^2 + a_1^2 \beta^2) \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} +$$

$$
+\Big\{-(1-a_1^2\alpha^2-a_1^2\beta^2)\,a_0^2-(1-a_1^2\alpha^2)\,a_1^2-(a_1^2+a_0^2-a_1^2a_0^2\alpha^2)\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2+
$$

$$
+4\alpha\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)a_0^2a_1^2\Big\}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\,\partial y_1^2} \tag{2.26}
$$

где использовано (2.3), (2.4) для определения $\frac{\partial\beta}{\partial t}$, причем

$$
t-t_0=-\frac{1}{F'(\xi_1)}\,\frac{\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}},\quad t_0=F(\xi_1)
$$

$$
\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{d\beta}{d\alpha}\,\frac{1}{R}\,\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\,\frac{1}{\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta}. \tag{2.27}
$$

То же значение (2.26) получится при использовании (2.19), (2.14), (2.15), где отличны от нуля производные β не по t, а по y.

Из соотношения (2.2) можно получить равенство

$$
\frac{d\beta}{d\alpha}=-\alpha\,\frac{1-a_0^2a_1^2(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta} \tag{2.28}
$$

дифференцируя которое, после подстановки в (2.26), можно показать совпадение множителей при $y_1\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}$ и $\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\,\partial y_1^2}$. Тогда уравнение (2.23) с помощью уравнений (2.24) и (2.26) запишется в виде

$$
y_1\frac{\partial^4 P}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 P}{\partial x_1^2\,\partial y_1^2}=A_0\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\left(P\frac{\partial P}{\partial x_1}\right) \tag{2.29}
$$

где

$$
A_0=-\frac{3\frac{\beta^2}{\rho_0}a_1^2(\alpha^2+\beta^2)\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\rho_0a_0^2}\gamma_0\mu}{(a_0^2\beta^2-2+a_0^2\alpha^2+a_1^2\alpha^2+a_1^2\beta^2)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\left(\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta\right)\left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{2}{3}}
$$

Полагая $P=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, из (2.29), после трехкратного интегрирования по x_1, можно найти в основном порядке

$$
y_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}-A_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=0 \tag{2.30}
$$

Из (2.3) и (2.4) можно найти кривизну каустики

$$+\left\{-(1-a_1^2\alpha^2-a_1^2\beta^2)\,a_0^2-(1-a_1^2\alpha^2)\,a_1^2-(a_1^2+a_0^2-a_1^2a_0^2\alpha^2)\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2+\right.$$

$$\left.+4\alpha\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)a_0^2a_1^2\right\}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\,\partial y_1^2} \qquad (2.26)$$

где использовано (2.3), (2.4) для определения $\dfrac{\partial\beta}{\partial t}$, причем

$$t-t_0=-\frac{1}{F'(\xi_1)}\,\frac{\alpha\dfrac{d\beta}{d\alpha}-\beta}{\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}},\quad t_0=F(\xi_1)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{d\beta}{d\alpha}\,\frac{1}{R}\,\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\,\frac{1}{\alpha\dfrac{d\beta}{d\alpha}-\beta}. \qquad (2.27)$$

То же значение (2.26) получится при использовании (2.19), (2.14), (2.15), где отличны от нуля производные β не по t, а по y.

Из соотношения (2.2) можно получить равенство

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\alpha\,\frac{1-a_0^2a_1^2(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta} \qquad (2.28)$$

дифференцируя которое, после подстановки в (2.26), можно показать совпадение множителей при $y_1\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^4}$ и $\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^2\,\partial y_1^2}$. Тогда уравнение (2.23) с помощью уравнений (2.24) и (2.26) запишется в виде

$$y_1\frac{\partial^4 P}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 P}{\partial x_1^2\,\partial y_1^2}=A_0\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\left(P\frac{\partial P}{\partial x_1}\right) \qquad (2.29)$$

где

$$A_0=-\frac{3\dfrac{\rho^2}{\rho_0}a_1^2(\alpha^2+\beta^2)\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{2}{\rho_0a_0^2}\alpha_0\mu}{(a_0^2\beta^2-2+a_0^2\alpha^2+a_1^2\alpha^2+a_1^2\beta^2)\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\left(\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta\right)\left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Полагая $P=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, из (2.29), после трехкратного интегрирования по x_1, можно найти в основном порядке

$$y_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}-A_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=0 \qquad (2.30)$$

Из (2.3) и (2.4) можно найти кривизну каустики

$$k = -\frac{\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)^2}{R} \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}, \quad k > 0 \tag{2.31}$$

В случае непроводящей жидкости $a_1 = 0$, тогда для A_0 и y_1 получатся соотношения

$$A_0 = -\frac{2\alpha^0}{\rho_0 a_0^2} \frac{1}{(2k)^{\frac{2}{3}}}, \quad y_1 = -\frac{(x-x_0)\beta-(y-y_0)\alpha}{\left(\frac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{2.32}$$

и (2.30) перепишется в виде

$$2\left(ky + \frac{\alpha_0}{\rho_0 a_0^2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = 0, \quad y = (2k)^{-\frac{1}{3}} y_1 \tag{2.33}$$

Уравнение (2.33), описывающее нелинейное решение вблизи каустики для однородной непроводящей жидкости, получено в [14] и для несколько другой задачи независимо в [3], [2], [15]. Следует отметить, что, ввиду наличия некоторых опечаток и обилия обозначений, не совсем ясны порядки параметров в [14], хотя окончательные уравнения после перехода в них к исходным переменным и порядок давления правильны. Автор благодарит Ю. Л. Жилина за ценную информацию.

3. Далее рассматривается плоская задача движения проводящей жидкости под действием давления (1.1). Постановка и решение плоской задачи даны в [3]. Вблизи фронта волны A_0B_0 (фиг. 1) давление имеет вид

$$P = \operatorname{Re} \iint\limits_G \frac{\varphi'\beta''y}{(x-x'+\beta y)^3}\,dx'dt' \tag{3.1}$$

где

$$\varphi' = \frac{Ci(1-a_1^2\alpha^2-a_1^2\beta^2)}{1-\alpha^2 a_1^2 - i\alpha\beta a_1^2}, \quad C = \frac{P_1(x', t')}{\pi} \quad [3]$$

Параметр α находится из уравнения

$$\alpha(x-x') + \beta(\alpha)y = t - t' \tag{3.2}$$

а для $\beta(\alpha)$ имеет место (2.2). Учитывая соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x-x'+\beta'y} = -\frac{\beta'-\beta''\beta\frac{y}{x-x'+x'y}}{(x-x'+\beta'y)^2} \tag{3.3}$$

вблизи фронта волны A_0B_0, где $x-x'+\beta'y \approx 0$ [3], можно оставлять только второе слагаемое числителя в правой части (3.3) и по (3.1) будем иметь

$$P = \mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_G \frac{\varphi'}{\beta}\,\frac{dx'dt'}{x-x'+\beta y} \tag{3.4}$$

Определяя α_0 из равенства

$$x - x' + \beta'(\alpha_0)\,y = 0 \tag{3.5}$$

и представляя (3.2) в виде ряда по степеням $(\alpha - \alpha_0)$, можно найти

$$\alpha - \alpha_0 = i\sqrt{\frac{2}{-\beta'' y}}\,\sqrt{t - t' - \alpha_0(x - x') - \beta_0 y} \tag{3.6}$$

Тогда, записывая приближенно

$$x - x' + \beta' y = \beta_0'' y\,(\alpha - \alpha_0) \tag{3.7}$$

из (3.4) можно найти

$$P = \mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_G \frac{\varphi' i}{\beta}\,\frac{1}{\sqrt{-2\beta'' y}}\,\frac{dx'dt'}{\sqrt{t-t' - \alpha_0(x-x') - \beta_0 y}} \tag{3.8}$$

Фронт волны A_0B_0 представляет огибающую возмущений, созданных на поверхности $y = 0$, и имеет уравнение

$$\begin{gathered} \alpha_1\{x - R(t_0)\} + \beta(\alpha_1) y = t_\Phi - t_0 \\ \alpha_1 = \frac{1}{R'(t_0)}, \quad x - R(t_0) + \beta'(\alpha_1)\,y = 0 \end{gathered} \tag{3.9}$$

В точке B_0 соединения A_0B_0 с фронтом дифракционной волны B_0C_0 имеет место $t_0 = 0$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{V}$, $V = R'(0)$ [3].

Тогда из (3.9) можно найти

$$\alpha_1 = \frac{1}{V} - \frac{R''(0)}{V^2}\,t_0, \quad x + \beta'\left(\frac{1}{V}\right) y \approx V t_0 r, \quad r = 1 + \beta'' y\,\frac{R''(0)}{V^3} \tag{3.10}$$

Отсюда для t_Φ можно найти

$$t_\Phi = \frac{x}{V} + \beta\left(\frac{1}{V}\right) y - \frac{R''}{2V^3}\,\frac{(x + \beta' y)^2}{r} \tag{3.11}$$

Вводя в (3.8) вместо t' переменную ξ по формуле

$$t' - f(x') = \xi \tag{3.12}$$

где $t = f(x)$ — функция, обратная $x = R(t)$, можно представить подкоренное выражение в (3.8) в виде

$$\begin{gathered} t - t' - \alpha_0(x - x') - \beta_0 y = t + \frac{1}{2}\,\frac{R''}{V^3}\,x'^2 - \frac{x}{V} - \beta\left(\frac{1}{V}\right) y - \\ -(x - x' + \beta' y)\left(\alpha_0 - \frac{1}{V}\right) - \frac{1}{2}\,\beta''\left(\frac{1}{V}\right) y \left(\alpha_0 - \frac{1}{V}\right)^2 - \xi \end{gathered} \tag{3.13}$$

что в силу (3.5), записанного в виде

$$x-x'+\beta'\left(\frac{1}{V}\right)y=-\beta''\left(\frac{1}{V}\right)y\left(\alpha_0-\frac{1}{V}\right) \tag{3.14}$$

и (3.11), можно записать следующим образом:

$$t-t'-\alpha_0(x-x')-\beta_0 y=t-t_\phi+\frac{r}{2\beta''y}\left(x'-\frac{x+\beta'y}{r}\right)^2-\xi \tag{3.15}$$

В области позади дифракционной волны CB_0C_0 пределы интегрирования по ξ и x' берутся от нуля до значения, обращающего в нуль (3.15) [11]. Взяв непрерывную часть в (3.8) за знак интеграла и вычисляя интеграл по ξ учетом $\frac{\partial t_\phi}{\partial y}=\beta\left(\frac{1}{V}\right)$, из (3.8) и (3.15) можно получить в области за CB_0C_0

$$P=-\left(\operatorname{Re}\frac{\varphi' i}{\sqrt{-2\beta''y}}\right)\int_0^{r_0^*}\frac{dx'}{\sqrt{t-t_\phi+\frac{r}{2\beta''y}\left(x'-\frac{x+\beta'y}{r}\right)^2}} \tag{3.16}$$

где r_0^* определится из условия обращения в нуль (3.15) в виде

$$r_0^*=\frac{x+\beta'y}{r}+\sqrt{t-t_\phi}\,\frac{\sqrt{-2\beta''y}}{\sqrt{r}} \tag{3.17}$$

или, вычисляя интеграл,

$$P=-(\operatorname{Re}\varphi' i)\frac{1}{\sqrt{r}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-t_\phi+\frac{(x+\beta'y)^2}{2\beta''yr}}}{\frac{-x-\beta'y}{\sqrt{r}\sqrt{-2\beta''y}}} \tag{3.18}$$

Вводя уравнение дифракционной волны* B_0C_0 [12]

$$\begin{gathered}\alpha_3 x+\beta(\alpha_3)y=t_{\text{дифр}}\\ x+\beta'(\alpha_3)y=0\end{gathered} \tag{3.19}$$

и записывая приближенно

$$x+\beta'\left(\frac{1}{V}\right)y=-\beta''\left(\frac{1}{V}\right)y\left(\alpha_3-\frac{1}{V}\right)$$

---

* Кривизна гиперсферы с центром в точке (x, y, t) [4], вычисленная в начальной точке луча, равная взятой с обратным знаком кривизне волны (3.19), находится в виде $K_1=-\frac{1}{\beta''y}\frac{(\alpha\beta'-\beta)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$t_{\text{дифр}} = \frac{x}{V} + \beta\left(\frac{1}{V}\right)y + (x + \beta' y)\left(\alpha_3 - \frac{1}{V}\right) + \frac{1}{2}\beta''\left(\frac{1}{V}\right)\left(\alpha_3 - \frac{1}{V}\right)^2$$

с помощью (3.11) получится

$$t_{\text{дифр}} = t_{\text{ф}} - \frac{(x + \beta' y)^2}{2\beta'' y r}, \quad K_1 - K_2 = -\frac{r}{\beta'' y}\,\frac{(\alpha\beta' - \beta)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.20}$$

где k_2 — кривизна AB в начальной точке луча $t = t_0$, причем (3.18) запишется в виде

$$P = \operatorname{Re}\left(\frac{P_1}{\pi}\,\frac{1 - a_1^2\alpha^2 - a_1^2\beta^2}{1 - \alpha^2 a_1^2 - i\alpha_1\beta_1 a_1^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r}\sqrt{2}\sqrt{t - \alpha_3 x - \beta(\alpha_3)y}}{\sqrt{-\beta'' y}\left(\frac{1}{V} - \alpha_3\right)} \tag{3.21}$$

Для непроводящей среды (3.21) получено в [16].

В области между волнами A_0B_0 и B_0C_0 будут действительными оба корня $r^*_{0,1}$, причем r^*_1 соответствует знаку „—" перед радикалом в (3.17).

Интегрируя в (3.16) от r^*_1 до r^*_0, можно найти, что давление в указанной области совпадет с давлением на A_0B_0, равным $\dfrac{P_1}{\sqrt{r}}$. В общем случае произвольной волны A_0B_0 в качестве r в (3.21) следует брать отношение полных кривизн A_0B_0 в начальной и данной точке луча. Приведенным методом можно исследовать также решение в окрестности точки соединения произвольной волны с дифракционной [11] в проводящей жидкости*. Из решения (3.21) видно, что удобно ввести переменные в окрестности B_0

$$x_1 = \alpha_3\frac{x}{t} + \beta_3\frac{y}{t} - 1, \quad \alpha_3,\ t \tag{3.22}$$

Пусть $\gamma = \dfrac{P_1}{\rho_0 a_0^2}$ мало. Тогда из (3.21)

$$\frac{P}{\rho_0 a_0^2} \sim \gamma, \quad x_1 \sim \gamma, \quad \alpha_3 \sim \gamma^{\frac{1}{2}} \quad t \sim 1 \tag{3.23}$$

Переходя в (2.21) к переменным (3.22), подобно (2.23), (2.24) можно получить приближенные уравнения

$$\Delta_0 P = \Delta_1\left(P\frac{\partial P}{\partial x_1}\right) \tag{3.24}$$

где Δ_0 дается (2.1), а Δ_1 — (2.24), деленными на t^4. Вычисление Δ_0 дает приближенное выражение

* При произвольном $\beta(\alpha)$, заменяя в [11] параметры, входящие в гипергеометрические функции в соответствии с (3.20), можно найти, что решение [11] верно для произвольного гиперболического постоянного оператора.

$$\frac{2\mu}{t^4} x_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{2\mu}{t^3} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial t} - \frac{\mu}{t^4} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{5\mu}{t^4} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \tag{3.25}$$

где обозначено $\mu = 2 - (a_0^2 + a_1^2)(\alpha_3^2 + \beta_3^2)$, $y_1 = \left(\frac{1}{V} - \alpha_3\right)\sqrt{-\frac{\beta'' y}{t}}$ и использованы равенство (2.28) и равенство, получаемое приравниванием множителей при $y_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4}$ и $\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial y_1^2}$ в (2.26). Тогда (3.24) с учетом (3.25) и (2.24), деленном на t^4, запишется в виде

$$\frac{\partial^4 P}{\partial x_1^4} \frac{2\mu}{t^4} x_1 - \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^3 \partial t} \frac{2}{t^3}\mu - \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} \frac{\mu}{t^4} + \frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3} \frac{5}{t^4}\mu = \tag{3.26}$$

$$= \frac{A_1}{\rho_0 a_0^2 t^4} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \left(P \frac{\partial P}{\partial x_1} \right)$$

где

$$A_1 = 3\beta_3^2 a_0^2 a_1^2 \frac{\alpha_3^2 + \beta_3^2}{1 - a_1^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2)} + 2\alpha^0 \{1 - a_1^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2)\} \tag{3.27}$$

Используя равенство

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\left(x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1}\right) = 3\frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3} + x_1 \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^4} \tag{3.28}$$

и вводя функцию φ по формуле

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rho_0 a_0^2 \tag{3.29}$$

(3.26) можно записать в виде

$$t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\left(\frac{A_1}{2\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_1\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = 0 \tag{3.30}$$

Вводя переменные

$$\frac{x_1}{\frac{A_1}{2\mu}} = \delta, \qquad \frac{y_1}{\sqrt{\frac{A_1}{2\mu}}} = Y, \qquad \varphi = \frac{A_1}{2\mu} \Phi$$

(3.30) можно переписать в виде

$$t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \delta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \delta} - \delta\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0$$

что совпадает с уравнением коротких волн для однородной непроводящей жидкости [17]. Тогда решения, полученные для этого случая [18], [19], верны и для вышеуказанной задачи.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 IV 1969

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԿԱՈՒՍՏԻԿԱՅԻ ՄՈՏ

Ամփոփում

Դիտարկվում է անհամասեռ հեղուկում հարվածային ալիքի թափանցման խնդիրը, երբ ճառագայթներն ունեն պարուրիչ, որը անվանում են կաուստիկա և որի վրա գծային լուծումը անվերջ է։ Ստացված է գծային խնդրի լուծումը կամայական ալիքի համար Լանդաուի և Լիֆշիցի հիպերերկրաչափական ֆունկցիայի տեսքով։ Որոշված են պարամետրների կարգերը և ստացված են պարզեցված ոչ-գծային հավասարումները կաուստիկայի շրջակայքում։ Անդրադարձող ալիքի մոտ, գծային լուծումն ունի լոգարիթմական անվերջությունը, որը վերացվում է՝ գծային խարակտերիստիկան ոչ-գծայինով փոխարինման մեթոդով։

DETERMINATION OF MEDIUM PARAMETERS NEAR CAUSTIC

A. G. BAGDOEV

Summary

The problem of converging rays of the wave front in a nonhomogenuous medium for a nonlinear case is considered. The singularity of the linear solution is improved and the equations of nonlinear motion of an electroconducting fluid are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Проникновение давления в неоднородную сжимаемую жидкость. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVI, № 3, 1962.
2. *Багдоев А. Г.* Определение давления вблизи особой линии для ударной волны. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
3. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
4. *Бабич В. М.* Распространение нестационарных волн и каустики. Ученые записки, ЛГУ, № 32, 1958.
5. *Whitham G. B.* The propagation of weak spherical shock in star. Communications on pure and applied mathematics, vol. VI, 1953.
6. *Губкин К. Е.* Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, № 4, 1958.
7. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
8. *Черноусько Ф. Л.* Отражение сходящейся слабой ударной волны в газе переменной плотности. ПММ, № 2, 1961.
9. *Зволинский Н. В.* Отраженные и головные волны, возникающие на границе сред. Изв. АН СССР, сер. геоф., № 10, 1957, № 1, № 2, 1958.

10. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы, ИЛ, М., 1962.
11. *Багдоев А. Г.* Определение параметров движения жидкости в окрестности встречи фронтов волн. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
12. *Бай Ши-и.* Магнитная гидродинамика. Изд-во „Мир", М., 1964.
13. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* Газовая динамика. Гостехиздат, М., 1965.
14. *Guiraud Y. P.* La acoustique geometrique et la focalisation. Comptes rendus, № 6, 1965.
15. *Багдоев А. Г.* Определение решения вблизи особой линии. Докл. АН Арм. ССР, № 5, 1967.
16. *Сагомонян А. Я.* Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд. МГУ, 1962.
17. *Рыжов О. С.* и *Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, № 5, 1958.
18. *Булах Б. М.* Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, № 2, 1961.
19. *Багдоев А. Г.* и *Гургенян А. А.* Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968.