ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 2, 1970 Механика

А. М. МКРТЧЯН

КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ С РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Решения задач круглых призматических стержней с произвольными разрезами приводятся, вообще говоря, к бесконечным системам линейных уравнений или же к интегральным уравнениям Фредгольма [1].

В данной статье на основе решений парных интегральных уравнений, связанных с функциями Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} x)$, приведенных в работе [2], даются замкнутые решения для некоторых задач о кручении круговых и секториальных призматических стержней с поперечными сечениями, имеющими разрезы. Известно, что решение данной задачи сводится к определению функции напряжений при кручении U, которая в полярной системе (r, φ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=-2$$

и граничному условию

$$U|_\Gamma=0$$

где Γ — контур сечения.

Следуя [1] и пользуясь преобразованием

$$r=be^{-t},\quad U(t,\varphi)=\Phi(t,\varphi)-\frac{b^2}{2}e^{-2t}$$

решение задачи приводится к определению функции $\Phi(t,\varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0 \tag{0.1}$$

и граничному условию

$$\Phi(t,\varphi)-\frac{b^2}{2}e^{-2t}\Big|_\Gamma=0 \tag{0.2}$$

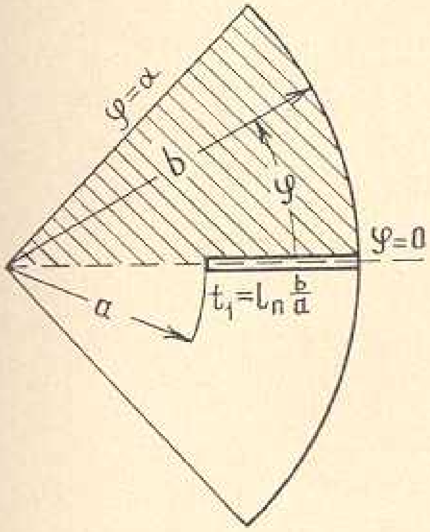
1. Рассмотрим кручение стержня с поперечным сечением в виде кругового сектора с размером (фиг. 1).

В силу симметрии области сечения ищем решение уравнения (0.1) только в верхней половине области сечения $(0<\varphi<\alpha)$ $(0<t<\infty)$. Граничные условия для функции $\Phi(t,\varphi)$ принимают вид

$$\Phi(t, \varphi)\big|_{\varphi=\alpha} = \frac{b^2}{2} e^{-2t} \tag{1.1}$$

$$\Phi(t, \varphi)\big|_{t=0} = \frac{b^2}{2} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\Phi(t, \varphi)\big|_{\varphi=0} = \frac{b^2}{2} e^{-2t} \quad (0 < t < t_1) \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial t}\bigg|_{\varphi=0} = 0 \quad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \tag{1.3}$$



фиг 1.

Функцию $\Phi(t, \varphi)$ ищем в виде суммы интеграла и ряда Фурье

$$\Phi(t, \varphi) = \int_0^\infty [C(z)\,\mathrm{sh} z\varphi + D(z)\,\mathrm{ch} z\varphi]\,\sin zt dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha_k t} \sin \alpha_k \varphi \tag{1.4}$$

где $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{\alpha}$.

Удовлетворив условиям (1.1) и (1.2), получим

$$\begin{aligned} &C(z)\,\mathrm{sh} z\alpha + D(z)\,\mathrm{ch} z\alpha = \frac{b^2 z}{\pi(4 + z^2)} \\ &A_k = \frac{b^2}{\alpha\,\alpha_k} \left[1 + (-1)^{k+1}\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

и функция напряжений $U(t, \varphi)$ примет вид

$$U(t, \varphi) = -\frac{b^2}{2} e^{-2t} + \frac{b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z \operatorname{sh} z\varphi}{(4+z^2) \operatorname{ch} z\alpha} \sin zt dz -$$

$$-\frac{b^2}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}}{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{\alpha}} \right) + \int_0^\infty D(z) \frac{\operatorname{ch} z(\alpha-\varphi)}{\operatorname{ch} z\alpha} \sin zt dz \tag{1.6}$$

Удовлетворение условий (1.3) с учетом (1.5) приводит к парным интегральным уравнениям для определения $D(z)$

$$\begin{gathered} \int_0^\infty D(z) \sin zt dz = \frac{b^2}{2} e^{-2t} \qquad (0 < t < t_1) \\ \int_0^\infty z D(z) \operatorname{cth} z\alpha \sin zt dz = g(t) \qquad (t_1 < t < \infty) \end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$g(t) = \frac{b^2}{2} \int_0^\infty \frac{z \sin zt}{(4+z^2) \operatorname{sh} z\alpha} + \frac{b^2}{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi t}{\alpha}} \tag{1.8}$$

Продифференцировав первое уравнение из (1.7) и введя обозначения

$$y = \frac{z\alpha}{\pi} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{\pi t}{\alpha} \tag{1.9}$$

„парные" уравнения (1.7) приводим к виду

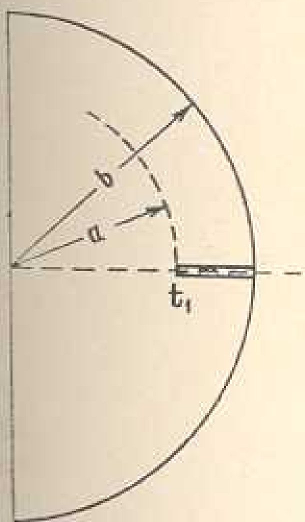
$$\begin{gathered} \int_0^\infty y D\left(\frac{y\pi}{\alpha}\right) \cos y\xi dy = -\frac{\alpha^2}{\pi^2} b^2 e^{-2\xi\frac{\alpha}{\pi}} \qquad (0 < \xi < \xi_1) \\ \int_0^\infty y D\left(\frac{y\pi}{\alpha}\right) \operatorname{cth} y\pi \sin y\xi dy = \frac{\alpha^2}{\pi^2} g\left(\xi \frac{\alpha}{\pi}\right) \qquad (\xi_1 < \xi < \infty) \end{gathered} \tag{1.10}$$

Пользуясь теперь известным результатом [2], решение уравнений (1.10) получим в виде

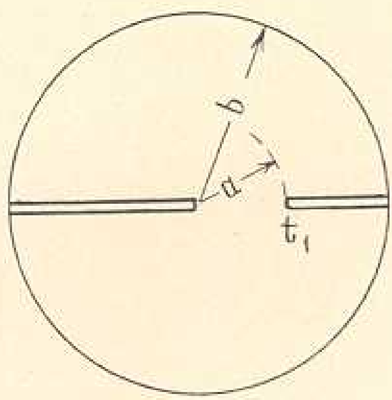
$$D\left(y \frac{\pi}{\alpha}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \operatorname{th} y\pi \left\{ b^2 \int_0^{\xi_1} P_{-\frac{1}{2}+iy} (\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \right. \times$$

$$\times \int\limits_0^x \frac{e^{-2\xi\frac{\pi}{\alpha}}}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \xi}} d\xi - \int\limits_{\xi_1}^{\infty} P_{-1/2+iy} (\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \int\limits_x^{\infty} \frac{g\left(\xi; \frac{\alpha}{\pi}\right) d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} x}} \Biggr\} \quad (1.11)$$

В частном случае, положив $\alpha = \frac{\pi}{2}$, из (1.11) и из (1.6) получим решение для задачи о кручении призматического стержня с сечением в виде полукруга с разрезом (фиг. 2). Когда $\alpha = \pi$, получим решение задачи о кручении призматического стержня с круглым поперечным сечением с двумя продольными разрезами разных глубин (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

2. Рассмотрим теперь кручение круглого стержня с внутренними „n" симметричными одинаковыми разрезами, идущими от центра. В силу симметрии профиля функцию $\Phi(t, \varphi)$ ищем только в $\frac{1}{2n}$ — ой части сечения (фиг. 4). В этом случае граничные условия будут иметь вид

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Phi(t, \varphi)\Big|_{t=0} = \frac{b^2}{2} + U_0 \quad (2.2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \qquad (0 < t < t_1) \\ &\Phi(t, \varphi)\Big|_{\varphi=0} = \frac{b^2}{2} e^{-2t} \quad (t_1 < t < \infty) \end{aligned}\right. \quad (2.3)$$

где U_0 — значение функции напряжения на внешнем контуре.

Решение уравнения (1) для этого случая ищем в виде

$$\Phi(t,\ \varphi)=\int\limits_0^\infty [C(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda\varphi+D(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda\varphi]\sin\lambda t d\lambda+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\alpha_k t}\cos\alpha_k\varphi+A_0 \qquad (2.4)$$

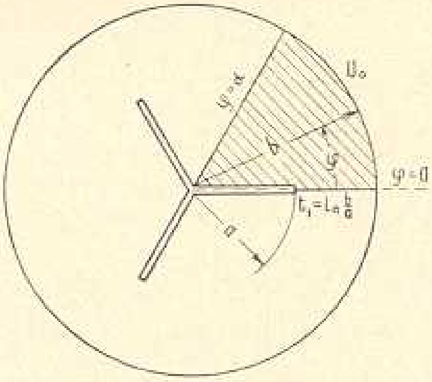
Удовлетворив условиям (2.1) и (2.2), получим

$$D(\lambda)=-C(\lambda)\,\mathrm{cth}\,\lambda\alpha$$

$$A_k=0,\quad A_0=\frac{b^2}{2}+U_0 \qquad (2.5)$$

и функция напряжений для этой задачи принимает вид

$$U(t,\ \varphi)=\frac{b^2}{2}(1-e^{-2t})+U_0-\int\limits_0^\infty C(\lambda)\,\frac{\mathrm{ch}\,\lambda(\alpha-\varphi)}{\mathrm{sh}\,\alpha\lambda}\sin\lambda t d\lambda \qquad (2.6)$$



Фиг. 4.

Удовлетворение условиям (2.3) с учетом (2.5) приводит к парным интегральным уравнениям для определения $C(\lambda)$

$$\int\limits_0^\infty \lambda C(\lambda)\sin\lambda t d\lambda=0 \quad (0<t<t_1)$$

$$\int\limits_0^\infty C(\lambda)\,\mathrm{cth}\,\lambda\alpha\sin\lambda t d\lambda=A_0-\frac{b^2}{2}e^{-2t} \quad (t_1<t<\infty) \qquad (2.7)$$

Интегрируя первое из уравнений (2.7) по t в пределах от нуля до t, получим

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty C(\lambda)\cos\lambda t\,d\lambda = C_0 \quad (0<t<t_1) \\
\int_0^\infty C(\lambda)\,\mathrm{cth}\,\lambda\alpha\,\sin\lambda t\,d\lambda = A_0-\frac{b^2}{2}e^{-2t} \quad (t_1<t<\infty)
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

где обозначено

$$
C_0=\int_0^\infty C(\lambda)\,d\lambda \tag{2.9}
$$

Произведя замену переменных $\lambda\alpha = z\pi$, $\pi t = \alpha y$ и пользуясь решением [2] уравнений (2.8), получим

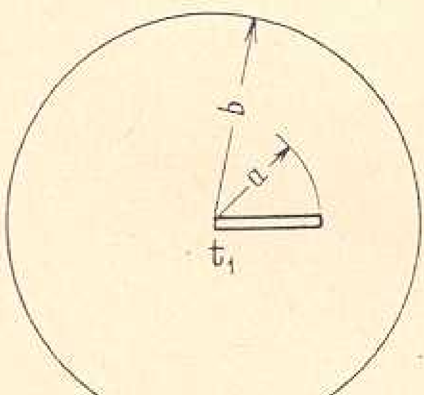
$$
C\left(\frac{z\pi}{\alpha}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\alpha z\,\mathrm{th}\,z\pi\left\{C_0\int_0^{y_1}P_{-1/2+iz}(\mathrm{ch}x)\,\mathrm{sh}x\,dx\int_0^x\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}y}}+\right.
$$

$$
\left.+\int_{y_1}^\infty P_{-1/2+iz}(\mathrm{ch}x)\,\mathrm{sh}x\,dx\int_x^\infty\frac{g\left(y\frac{\alpha}{\pi}\right)dy}{\sqrt{\mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x}}\right\} \tag{2.10}
$$

где

$$
g\left(y\frac{\alpha}{\pi}\right)=A_0-\frac{b^2}{2}e^{-2y\frac{\alpha}{\pi}} \tag{2.11}
$$

Постоянные C_0 и U_0 определяются из (2.9) и теоремы Бредта.



Фиг. 5.

В частном случае, когда $n=1$, т. е. $\alpha=\pi$ (фиг. 5), из (2.10) получим

$$C(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, z\, \mathrm{th} z\pi \left\{ C_0 \int_0^{t_1} P_{-1/2+iz}\ (\mathrm{ch} x)\, \mathrm{sh} x dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{ch} x - \mathrm{ch} y}} + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{\infty} P_{-1/2+iz}\ (\mathrm{ch} x)\, \mathrm{sh} x dx \int_x^{\infty} \frac{g(y)\, dy}{\sqrt{\mathrm{ch} y - \mathrm{ch} x)}} \right\} \tag{2.12}$$

Теорема Бредта в этом случае выражается уравнением

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\bigg|_{t=0} d\varphi = 0 \tag{2.13}$$

которое после использования выражения $\Phi(t, \varphi)$ принимает вид

$$\int_0^{\infty} C(\lambda)\, d\lambda = 0 \tag{2.14}$$

Отсюда очевидно, что $C_0 = 0$.

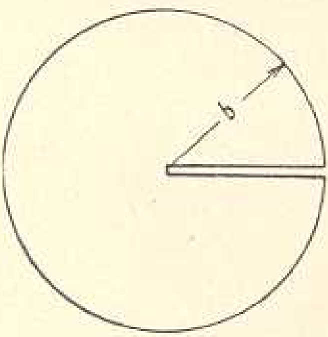
Разрешая уравнение (2.14) относительно U_0, получим

$$U_0 = \frac{b^2}{2} \frac{\psi_1(t_1)}{\psi_2(t_1)} \tag{2.15}$$

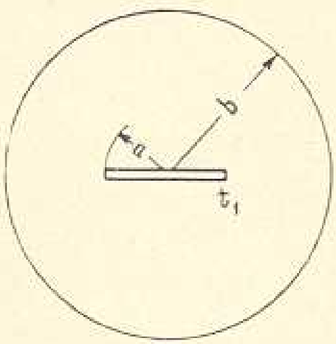
где

$$\psi_1(t_1) = \int_0^{\infty} \lambda\, \mathrm{th} \lambda\pi d\lambda \int_{t_1}^{\infty} P_{-1/2+i\lambda}\ (\mathrm{ch} x)\, \mathrm{sh} x dx \int_x^{\infty} \frac{(e^{-2t} - 1)\, dt}{\sqrt{\mathrm{ch} t - \mathrm{ch} x}}$$

$$\psi_2(t_1) = \int_0^{\infty} \lambda\, \mathrm{th} \lambda\pi d\lambda \int_{t_1}^{\infty} P_{-1/2+i\lambda}\, (\mathrm{ch} x)\, \mathrm{sh} x dx \int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{ch} t - \mathrm{ch} x}}$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Из найденного решения, положив $t_1 = 0$ (фиг. 6), для функции $\Phi(t, \varphi)$ получим выражение

$$\Phi(t, \varphi) = \frac{b^2}{2} - \frac{4b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} z(\pi - \varphi)}{z(z^2+4)\operatorname{ch} z\pi} \sin zt dz$$

которое приводится в работе [1] для задачи о кручении призматического стержня с сечением в виде круга, разрезанного по радиусу до центра.

Аналогичным образом, положив $n=2$, получим решение задачи о кручении стержня с центральным внутренним разрезом по диаметру (фиг. 7).

Автор выражает признательность Б. Л. Абрамяну за постановку задачи и ценные советы в ходе ее решения.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 II 1970

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿԼՈՐ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է՝ երկայնական ճեղքեր ունեցող, կլոր պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրը։ Շառավղային սիմետրիկ ճաք ունեցող սեկտորի և կենտրոնից սկսվող հավասար երկարությամբ սիմետրիկ դասավորված ճեղքերով շրջանի տեսքեր ունեցող լայնական կտրվածքներով պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրների համար, եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող «զույգ» ինտեգրալ հավասարումների լուծումների օգնությամբ, տրվում են փակ լուծումներ։

TORSION OF CIRCULAR RODS WITH RADIAL SLITS

A. M. MKRTCHIAN

Summary

The problem of torsion of circular prismatic rods with longitudinal slits is considered.

Closed solutions for the torsion problem of prismatic rods with a transverse section as a sector with a symmetrical slit and as a circle with slits having equal lengths and beginning from the centre with the aid of the solutions of dual integral equations, involving trigonometric functions, are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963
2. *Бабловн А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М. — Л., 1963.
4. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.