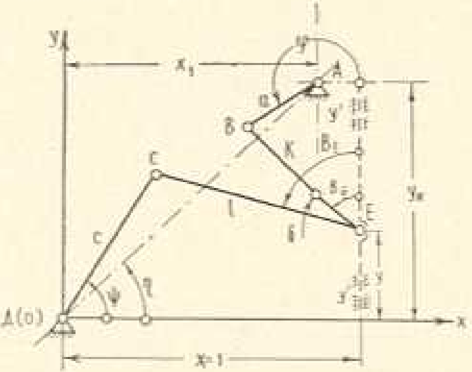
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

К. Х. ШАХБАЗЯН, В. М. ТАИРЯН

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ШЕСТИ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА

Известно, что при решении задачи синтеза направляющих механизмов [1] становится возможным определить только часть параметров кинематической схемы, причем даже при определении четырех параметров коэффициенты приближающей функции вычисляются из системы нелинейных уравнений.

В данной работе дается метод, с помощью которого становится возможным решить поставленную задачу синтеза прямолинейно-направляющего четырехшарнирного механизма по пяти и шести вычисляемым параметрам кинематической схемы, где коэффициенты приближающей функции вычисляются из системы линейных уравнений, а параметры—из системы нелинейных уравнений, причем возможно все шесть уравнений свести только к двум нелинейным уравнениям, которые легко решаются по нижеуказанному алгоритму.



Фиг. 1.

В принятой системе координат данный механизм (фиг. 1) при $x=1$ (удаление чертящей точки E на участке прямолинейного движения от оси y) определяется следующими параметрами: x_A, y_A — координаты шарнира A; a, c — соответствующие длины звеньев AB и CD; l, k — стороны шатуна; δ — угол между сторонами шатуна.

При синтезе прямолинейно-направляющих механизмов в качестве переменной целесообразно иметь перемещение Y, однако при вычислении пяти и шести параметров механизма при переменной Y решение задачи пока не представляется возможным, поэтому в качестве переменной возьмем β, т. е. угол между направлением движения чертящей точки E и стороной шатуна.

После определения параметров механизма при переменной β представляется возможным определить интервал приближения по переменной Y.

Выражение условия совместности

Поставив условно при вершине E угла раствора сторон шатуна сдвоенную кинематическую пару и ползун, движущийся в направляющих $y'y'$, получим два кривошипно-ползунных механизма ABE и DCE.

Перемещение точки E для каждого кривошипно-ползунного механизма определяется из уравнений:

$$Y_{\rm I}^2 + 2Y_{\rm I}\, l\cos\beta_{\rm I} + 1 + l^2 - c^2 - 2l\sin\beta_{\rm I} = 0 \tag{1}$$

$$Y_{\rm II}^2 + 2Y_{\rm II}\,(k\cos\beta_{\rm II} - y_A) + 1 + k^2 + x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - a^2 - \\ - 2ky_A\cos\beta_{\rm II} - 2k\sin\beta_{\rm II} + 2kx_A\sin\beta_{\rm II} = 0 \tag{2}$$

где $\beta_{\rm I} = \beta_{\rm II} + \delta$ (δ — величина переменная),

$\beta_{\rm I}$ и $\beta_{\rm II}$ — соответственно углы давления в кривошипно-ползунных механизмах DCE и ABE.

Ввиду совместной работы двух кривошипно-ползунных механизмов перемещение точки E определится однозначно из выражений (1) и (2) по формуле:

$$Y = \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{m_1 - m_2} \tag{3}$$

где

$$n_1 = 2l\cos\beta_{\rm I}, \qquad n_2 = 2(k\cos\beta_{\rm II} - y_A)$$
$$m_1 = L - 2l\sin\beta_{\rm I}, \qquad m_2 = M - 2ky_A\cos\beta_{\rm II} + 2k(x_A - 1)\sin\beta_{\rm II} \tag{4}$$

$$L = 1 + l^2 - c^2$$
$$M = 1 + k^2 + x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - a^2 \tag{5}$$

При надлежащем выборе параметров механизма можно добиться фиксированного ($\delta = \text{const}$) угла раствора сторон шатуна на заданном интервале приближения. Вернемся к исходной схеме механизма, где

$$\beta_{\rm I} - \beta_{\rm II} = \delta = \text{const} \tag{6}$$

Формула (6) представляет собой условие жесткости шатуна. При обеспечении условия (6) и подстановки (3) в любое из уравнений (1) и (2) получим тождественное уравнение, которое устанавливает связь между параметрами исходной схемы (фиг. 1) и переменным β на заданном участке приближения.

$$n_I^2 m_{II} + n_{II}^2 m_I - n_I n_{II}(m_I + m_{II}) + (m_I - m_{II})^2 = 0 \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} n_I = 2l\cos(\beta+\delta), \qquad n_{II} = 2(k\cos\beta - y_A) \\ m_I = L - 2l\sin(\beta+\delta) \\ m_{II} = M - 2ky_A\cos\beta + 2k(x_A - 1)\sin\beta \end{gathered} \tag{8}$$

Значения L и M даются формулой (5).

Выражение (7) справедливо также для совместной работы двух кривошипно-ползунных механизмов с общей шатунной плоскостью, поэтому назовем его условием совместности.

Подставляя значения (8) в условие совместности (7) и принимая $\delta = \text{const}$ (тем самым фиксируя раствор сторон шатуна), после соответствующих преобразований получим

$$B + C\sin\beta + D\cos\beta + E\sin2\beta + F\cos^2\beta + G\sin2\beta\cos\beta - A\cos^3\beta = 0 \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} A = 8lk\,[(l\cos2\delta - k\cos\delta)\,y_A - (l\sin2\delta - k\sin\delta)\,x_A] \\ B = 4Ml^2\sin^2\delta - 8lky_A(x_A - 1)\sin\delta + 4l^2y_A\sin2\delta + 4l^2\cos^2\delta + \\ + 8lk(x_A - 1)\cos\delta + 4Ly_A^2 + (L-M)^2 + 4k^2(x_A - 1)^2 \\ C = 4[k(M-L)(x_A - 1) - l(2y_A^2 + L - M)\cos\delta - \\ -(L+M)\,ly_A\sin\delta + 2l^2k(x_A - 1)\sin^2\delta] \\ D = 4[l^2k(1 - 2x_A)\sin2\delta - 2l^2ky_A\sin^2\delta - l(2y_A^2 - 2k^2x_A + \\ + 2k^2 + L - M)\sin\delta + ly_A(L+M)\cos\delta - ky_A(L+M)] \\ E = 2[l^2(1-M)\sin2\delta + lk(L + M + 2y_A^2 + 2x_A - 2)\sin\delta - \\ - 2k^2y_A(x_A - 1) - 2ly_A(l\cos2\delta - kx_A\cos\delta)] \\ F = 4[l^2(M-1)\cos2\delta - 2l^2y_A\sin2\delta + 2lkx_Ay_A\sin\delta - \\ - lk(L + M + 2y_A^2 + 2x_A - 2)\cos\delta + k^2(L + y_A^2 - x_A^2 - 1 + 2x_A)] \\ G = 4lk[(l\sin2\delta - k\sin\delta)\,y_A + (l\cos2\delta - k\cos\delta)\,x_A] \end{gathered} \tag{10}$$

Не останавливаясь на решении задачи по пяти вычисляемым параметрам (однако, для этого случая решен числовой пример), решим задачу по шести параметрам.

Вычисление шести параметров

Если требуется определить шесть параметров механизма a, l, k, c, x_A и y_A, то выражение (9) приводим к виду полинома:

$$A\,[p_0 f_0(\beta) + p_1 f_1(\beta) + \cdots + p_5 f_5(\beta) - F(\beta)] = 0 \tag{11}$$

где

$$p_0 = \frac{B}{A}, \quad p_1 = \frac{C}{A}, \quad p_2 = \frac{D}{A}, \quad p_3 = \frac{E}{A}, \quad p_4 = \frac{F}{A}, \quad p_5 = \frac{G}{A}$$

$$\begin{gathered} f_0(\beta) = 1, \quad f_1(\beta) = \sin\beta, \quad f_2(\beta) = \cos\beta, \quad f_3(\beta) = \sin 2\beta \\ f_4(\beta) = \cos^2\beta, \quad f_5(\beta) = \sin 2\beta\cos\beta, \quad F(\beta) = \cos^3\beta \end{gathered} \tag{12}$$

При $\delta = 0$, $\delta = \frac{\pi}{2}$ и $\delta = \pi$ коэффициенты приближающей функции принимают вид:

при $\delta = 0$

$$p_0 = \frac{4Ly_A^2 + (L-M)^2 + 4(kx_A + l - k)^2}{8lky_A(l-k)}$$

$$p_1 = -\frac{(L-M)(kx_A + l - k) + 2ly_A^2}{2lky_A(l-k)}$$

$$p_2 = \frac{L+M}{2lk}, \qquad p_3 = \frac{kx_A - k - l}{2lk} \tag{13}$$

$$p_4 = \frac{(Ml - Lk)(l-k) - y_A^2 k(2l-k) - (kx_A + l - k)^2}{2lky_A(l-k)}$$

$$p_5 = \frac{x_A}{2y_A}$$

при $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$p_0 = \frac{4Ml^2 - 8lky_A(x_A - 1) + 4Ly_A^2 + (L-M)^2 + 4k^2(x_A-1)^2}{8lk(kx_A - ly_A)}$$

$$p_1 = \frac{k(M-L)(x_A-1) - ly_A(L+M)}{2lk(kx_A - ly_A)}$$

$$p_2 = -\frac{l(2y_A^2 - kx_A^2 + k^2 + L - M) + 2l^2ky_A + ky_A(L+M)}{2lk(kx_A - ly_A)}$$

$$p_3 = \frac{lk(L + M + 2y_A^2 + 2x_A - 2) + 2l^2y_A - 2k^2y_A(x_A - 1)}{4lk(kx_A - ly_A)} \tag{14}$$

$$p_4 = \frac{2lkx_A y_A - l^2(M-1) + k^2(L + y_A^2 - x_A^2 + 2x_A - 1)}{2lk(kx_A - ly_A)}$$

$$p_5 = \frac{ky_A + lx_A}{kx_A - ly_A}$$

При $\delta = \pi$

$$p_0 = \frac{4Ly_A^2 + (L-M)^2 + 4k^2(x_A-1)^2 - 4l^2 - 8lk(x_A-1)}{8lky_A(l+k)}$$

$$p_1 = \frac{k(x_A-1)(M-L) + l(2y_A^2 + L - M)}{2lky_A(l+k)}$$

$$p_2 = -\frac{L+M}{2lk}, \qquad p_3 = -\frac{l-k+kx_A}{2lk} \tag{15}$$

$$p_4 = \frac{l^2(M-1) + lk(L+M+2y_A^2+2x_A-2) + k^2(L+y_A^2+2x_A-x_A^2-1)}{2lky_A(l+k)}$$

$$p_5 = \frac{x_A}{2y_A}$$

Покажем как после вычисления коэффициентов $p_0, p_1, \cdots, p_5$ определяются параметры механизма (при $\delta = 0$).

Из системы (13) путем исключения параметров x_A, y_A, L и M получаем систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &8p_4p_5lk^2(l-k)(2p_3lk+k+l)(p_3k+1) + 32p_5^2k^2l^2(p_3k+1)^3 - \\ &- 2p_1p_5k^2(l-k)^2(l+k)(2p_3kl+k+l) - (2p_3lk+k+l)^2(l^2-k^2) - \\ &- 8p_2p_5^2lk^3(l-k)^2(p_3k+1) + 2k(2l-k)(p_3k+1)(2p_3lk+k+l)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\tag{16}$$

$$\begin{aligned} &16p_2p_5^2lk^3(p_3k+1)^2(2p_3lk+k+l)^2 - 4p_1p_3p_5k^3(l-k)(2p_3lk+k+l)^3 - \\ &- (2p_3lk+k+l)^4(2p_3lk+1) + 4p_1^2p_5^2k^4(l-k)^2(2p_3lk+k+l)^2 + \\ &+ 256p_5^4l^2k^4(p_3k+1)^4 - 64p_0p_5^3lk^4(l-k)(2p_3lk+k+l)(p_3k+1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Решив систему уравнений (16), получаем параметры l и k. Далее из системы (13) определяем параметры x_A, y_A и величины L, M

$$x_A = \frac{2p_3lk+k+l}{k}, \qquad y_A = \frac{x_A}{2p_5} \tag{17}$$

$$L = \frac{p_2lk(kx_A+l-k) - p_1lky_A(l-k) - ly_A^2}{kx_A+l-k} \tag{18}$$

$$M = \frac{p_2lk(kx_A+l-k) + p_1lky_A(l-k) + ly_A^2}{kx_A+l-k} \tag{19}$$

Имея (18) и (19), из уравнений (5) определяем параметры a и c

$$a = \sqrt{1+k^2+x_A^2+y_A^2-2x_A-M} \tag{20}$$

$$c = \sqrt{1+l^2-L} \tag{21}$$

После определения параметров механизма по формуле (3) определяем Y_1 и Y_2, соответствующие значениям β_1, β_2, и заданный интервал приближения по переменному Y, соответствующий длине прямолинейного участка

$$L = |Y_1 - Y_2| \tag{22}$$

Определение отклонения от прямолинейности

Отклонение от прямолинейности определяем приближенно по формуле

$$\Delta = 1 - x \tag{23}$$

где x вычисляется аналогично определению Y в выражении (3). Тогда выражение (23) примет вид

$$\Delta = \frac{m_1'(1 + n_2') - m_2'(1 + n_1')}{m_1' - m_2'} \tag{24}$$

Для случая $\delta = 0$ имеем

$$n_1' = -2l \sin\beta, \qquad n_2' = -2(k \sin\beta + x_A)$$

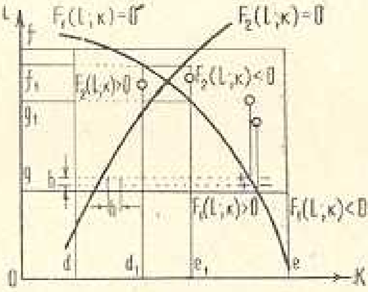
$$m_1' = l^2 + Y^2 - c^2 + 2Yl \cos\beta \tag{25}$$

$$m_2' = k^2 + x_A^2 - a^2 + (Y + y_A)^2 + 2x_A k \sin\beta + 2k\,(Y - y_A \cos\beta$$

В выражении (25) Y определяется по формуле (3).

Описание алгоритма решения нелинейной системы уравнений

Описываемый алгоритм позволяет решить систему двух нелинейных уравнений без предварительных преобразований.



Фиг. 2.

Пусть графики функций двух нелинейных уравнений суть изображенные на фиг. 2 функции $F_1(l;\ k) = 0$ и $F_2(l;\ k) = 0$.

Ориентировочно выбираем область ожидаемых значений корней уравнений. Целесообразно за нижние пределы взять значение нуль.

Выбираем за шаг h меньшее из двух шагов, определяемых следующими выражениями:

$$h_1 = \frac{d-e}{\mu} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{f-g}{\mu}$$

где μ — произвольное число.

Задавая значение $l^{(1)} = g + h$, определяем значение $F_1(l; k)$ через каждый шаг $\Delta_k = h$. Сравнивая по знаку каждое предыдущее значение функции $F_1(l; k)$ с последующим, находим те два соседних значения $k_i^{(1)}$ и $k_{i+1}^{(1)}$, где произошла перемена знака. Имея $k_i^{(1)}$ и $k_{i+1}^{(1)}$, уточняем и находим значение $k^{(1)}$, где $F_1(l; k) = 0$.

Для значений $l^{(1)}$ и $k^{(1)}$ определяем $F_2[l^{(1)}; k^{(1)}]$.

Далее, задавая значение $l^{(2)} = g + 2h$, находим $F_2[l^{(2)}; k^{(2)}]$.

Сравниваем опять по знаку $F_2[l^{(2)}; k^{(2)}]$ и $F_2[l^{(1)}; k^{(1)}]$.

Если знак при этом не меняется, процесс продолжается. В случае, когда в интервале $l^{(p-1)} = g + (p-1)h$ и $l^{(p)} = g + ph$ меняется знак функции $F_2(l; k)$, то ограничиваем новую область прямыми

$$k = k^{(p-1)} \qquad l = l^{(p-1)}$$

$$k = k^{(p)} \qquad l = l^{(p)}$$

и решение начинаем заново, с новыми пределами (d_1 — меньшее из k, e_1 — большее из k, $f_1 = l^{(p-1)}$ и $g_1 = l^{(p)}$) до тех пор, пока h и $|k^{(p-1)} - k^{(p)}|$ не будут меньше требуемой точности вычисления.

Данный алгоритм был использован при решении системы уравнений (16).

Пример

Рассмотрим примеры вычисления пяти и шести параметров механизма по предложенной методике синтеза прямолинейно-направляющего механизма.

Требуется спроектировать прямолинейно-направляющий механизм по пяти и шести параметрам по заданным значениям β_1, β_2 (примем $\beta_1 = 70^\circ$ и $\beta_2 = 120^\circ$) при $\delta = 0$.

Задачу решаем методом квадратического приближения. В результате имеем следующие значения параметров механизма (табл. 1):

Таблица 1

Число вычисляемых параметров	Параметры механизма						Длина прямолинейного участка L
	l	k	a	c	x_A	y_A	
5*	1.20630	0.355856	1.978892	2.68198	2.623219	2.676754	1.0187
6	1.221828	0.324116	2.418889	2.679112	3.094684	2.67314	1.0323

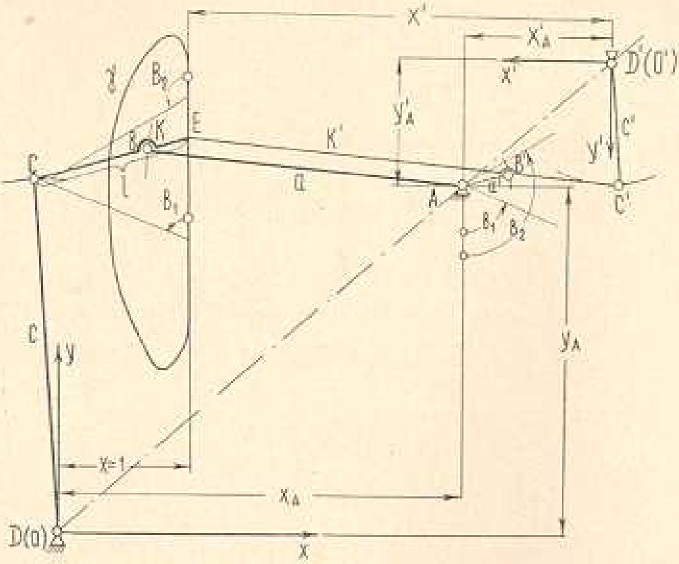
* При определении пяти параметров задаемся значением $p_5 = \frac{\operatorname{ctg}\eta}{2} = \frac{x_A}{2y_A} = 0.49$.

Значения отклонений от прямолинейности, вычисленные по формуле (24), через каждые 5° приведены в табл. 2.

Таблица 2

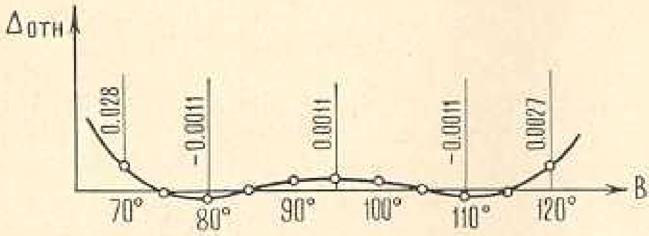
Число вычисляемых параметров	Углы в градусах										
	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
	Отклонение от прямолинейности $\Delta \cdot 10^3$										
5	0.52	−2.54	−3.05	−2.28	−1.31	−0.88	−1.23	−2.11	−2.78	−2.18	0.91
6	2.84	−0.545	−1.118	−0.31	0.696	1.12	0.701	−0.29	−1.08	−0.54	2.66

Механизм, полученный при определении шести параметров, изображен на фиг 3.



Фиг. 3.

График отклонения от прямолинейности, соответствующий вычислению шести параметров механизма, показан на фиг. 4.



Фиг. 4.

Применение преобразования Робертса

После нахождения параметров механизма по теореме Робертса определяем другой четырехзвенник $AB_1C_1D_1$ с внешним расположением чертящей точки E. Угол наклона шатуна β к направлению движения точки E начального четырехзвенника будет соответствовать углу поворота кривошипа AB_1 преобразованного четырехзвенника (фиг. 3). Поэтому предложенный метод синтеза также приемлем при синтезе прямолинейно-направляющих механизмов при заданном угле поворота кривошипа. Для этого необходимо принять угол поворота кривошипа за угол наклона шатуна к направлению движения точки E и найти по вышеизложенному методу параметры начального механизма. Затем, по нижеприведенным формулам сделать пересчет параметров в новой системе координат $x'o'y'$, приняв $x' = 1$.

В старых координатах xoy имеем следующие параметры преобразованного механизма:

$$
\begin{aligned}
&x_{A_1} = x_A, \qquad a_1 = k, \qquad x_{D_1} = x_A \frac{l}{l-k} \\
&y_{A_1} = y_A, \qquad k_1 = a, \qquad y_{D_1} = y_A \frac{l}{l-k} \\
&l_1 = \frac{l}{l-k}, \qquad c_1 = c\,\frac{l}{l-k}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Приняв $x_{D_1} - 1 = x'$ за единичный размер в новых координатах, получим

$$
x'_A = \frac{x_A k}{\lambda}, \qquad k' = \frac{a(l-k)}{\lambda}, \qquad l' = \frac{al}{\lambda}
$$

$$
y'_A = \frac{y_A k}{\lambda}, \qquad c' = \frac{ck}{\lambda}, \qquad a' = \frac{k(l-k)}{\lambda}
$$

где $\lambda = l(x_A - 1) + k$

Ереванский государственный университет

Поступила 24 VI 1969

Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ, Վ. Մ. ԹԱԻՐՅԱՆ

ՈՒՂՂԱԳԻԾ-ՈՒՂՂՈՐԴ ՔԱՌՀՈԴԱԿԱՊԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՎԵՑ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում է մեթոդ, որի օգնությամբ հնարավոր է լուծել ուղղագիծ-ուղղորդ քառհոդակապային մեխանիզմի նախագծման խնդիրը հինգ և վեց պարամետրերով:

Մոտարկվող ֆունկցիայի գործակիցները որոշվում են գծային հավասարումների սիստեմից, իսկ մեխանիզմի պարամետրերը՝ ոչ-գծային հավասարումներից, ընդ որում հնարավոր է բոլոր վեց հավասարումները բերել միայն երկու ոչ-գծային հավասարումների սիստեմի, որոնք լուծվում են աշխատանքում նշված ալգորիթմով:

Որպես օրինակ, նախագծված է քառօղակապային մեխանիզմ՝ հինգ և վեց պարամետրերով:

ON CIRCULATION OF SIX PARAMETERS OF A STRAIGHTLINE-DIRECTING FOUR-HINGE MECHANISM

K. Kh. SHAKHBAZIAN, V. M. TAIRIAN

S u m m a r y

In this work a method is presented by means of which the problem of synthesis of a straightline-directing four-hinge mechanism may be solved from five or six calculated parameters of a kinematic scheme.

The approximate function coefficients are calculated from a linear equation system while the mechanism parameter from a nonlinear equation system, and all the six equations may be reduced to only two nonlinear equations to be solved from the indicated algorithm.

As an example a four-hinge mechanism is designed according to five or six parameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И.* и *Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. *Рудольф Бейер.* Кинематический синтез механизмов. Машгиз, М., 1959.
3. *Демидович Б. П.* и *Марон И. А.* Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1966.