ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

Б. Л. ПЕЛЕХ

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Излагается метод решения задач изгиба трансверсально-изотропных пластинок [1], ослабленных конечным числом круговых отверстий. Доказана квазирегулярность и единственность получающихся при этом бесконечных систем алгебраических уравнений при достаточно широких классах граничных условий.

1. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной трансверсально-изотропной плиты, ослабленной конечным числом произвольно расположенных круговых отверстий.

С каждым из контуров отверстий L_k $(k=1,\ldots,m)$ свяжем систему координат x_k, y_k $(z_k = \rho_k e^{i\vartheta_k} = x_k + iy_k)$; начала координат совместим с центрами отверстий.

В рамках обобщенной теории изгиба пластинок С. А. Амбарцумяна поставленная задача сводится к нахождению решения уравнений [1]

$$\Delta\Delta w = 0, \quad \Delta\Phi - \delta^2\Phi = 0 \quad \left(\delta^2 = \frac{5G_z}{2G_a}\rho_0^2 h^{-2}\right) \tag{1.1}$$

для многосвязной области S, удовлетворяющего на контурах отверстий L_k $(k=1,\ldots,m)$ определенным условиям. Кроме того, надо удовлетворить условиям затухания компонентов напряженного и деформированного состояния при удалении от отверстий (условия „на бесконечности").

Здесь и в дальнейшем индексами (a) и (z) обозначены модули упругости и коэффициенты Пуассона в плоскостях, параллельных и нормальных к срединной; Δ — оператор Лапласа в безразмерных полярных координатах ρ, ϑ, отнесенных к ρ_0.

2. Для многосвязной области не представляется возможным найти решение уравнений (1.1) в рядах в какой-то специальной системе координат.

Согласно принципу суперпозиции, имеющему место для линейных задач, представим решение уравнений (1.1) в виде суммы полных решений для соответствующих односвязных областей [1], [2]:

$$w = \sum_{q=1}^{m} A_0^{(q)} \ln \rho_q + \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} A_p^{(q)} \\ B_p^{(q)} \end{matrix} \rho_q^{-p} + \begin{matrix} C_p^{(q)} \\ D_p^{(q)} \end{matrix} \rho_q^{-p+2} \right] \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} p\theta_q$$

$$\varphi = \sum_{q=1}^{m} F_0^{(q)} K_0(\delta \rho_q) + \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{\infty} \begin{matrix} F_p^{(q)} \\ E_p^{(q)} \end{matrix} K_p(\delta \rho_q) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} p\theta_q \tag{2.1}$$

Условия затухания усилий и моментов „на бесконечности" будут выполнены, если в (2.1) положить

$$C_1^{(q)} = D_1^{(q)} = 0 \quad (q = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.2}$$

Представим решение (2.1) в виде рядов с разделенными переменными. Для этого целесообразно воспользоваться разложением одной аналитической при $|z| < \alpha$ функции в ряд Тейлора

$$\psi(z, \alpha, p) = (\alpha - z)^{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha^{p+n}} \frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-1)!} \tag{2.3}$$

Заметим, что в силу ее аналитичности, функцию (2.3) можно дифференцировать. Рассматривая, например, функцию

$$\alpha n (n^2 - 1)(n - 2) \frac{d}{dz} \psi(z, \alpha, n + 1)$$

получим разложение

$$\frac{\alpha n (n^2 - 1)(n - 2)}{(\alpha - z)^{n+2}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{\alpha^{p+n}} \frac{(p+n)!}{(n-3)!\,(p-1)!} \tag{2.3'}$$

Полагая в (2.3)

$$\alpha = R_{kq} e^{-i\varphi_{kq}} \quad (z_k = z_q + R_{kq} e^{i\varphi_{kq}})$$

найдем

$$\rho_q^{-p} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} p\theta_q = \pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{p(p+n-1)!}{n!\,(p-1)!} \frac{\rho_k^n}{R_{kq}^{p+n}} \left[\cos n\theta_k \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n+p)\varphi_{kq} + \right.$$

$$\left. + \sin n\theta_k \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (n+p)\varphi_{kq} \right] \tag{2.4}$$

и аналогичную формулу для пересчета члена $\rho_q^{-p+2} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} p\theta_q$.

Из теоремы сложения для бесселевых функций можно получить также следующее разложение [4]:

$$K_p(\delta \rho_q) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} p\theta_q = (-1)^p \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa_n J_n(\delta \rho_q) \left\{ \left[K_{p+n}(\delta R_{kq}) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n+p)\varphi_{kq} \pm \right. \right.$$

$$\pm K_{p-n}(\delta R_{kq}) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n-p)\varphi_{kq}\Big]\cos n\theta_k \pm \Big[K_{p+n}(\delta R_{kq}) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n+p)\varphi_{kq} \pm$$

$$\pm K_{p-n}(\delta R_{kq}) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n-p)\varphi_{kq}\Big]\sin n\theta_k\Big\}, \quad \varkappa_n = \begin{cases} 0.5, & n=0 \\ 1, & n>0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Указанные выражения дают возможность представить решение (2.1) в криволинейной системе координат в виде рядов Фурье, что в свою очередь позволит удовлетворить граничным условиям на контуре K-ого отверстия.

Следуя А. Н. Гузю [4, 3], введем в (2.1) новые постоянные по формулам

$$A_p^{(q)} = x_{p,1}^{(q)}, \quad C_p^{(q)} = x_{p,2}^{(q)}, \quad E_p^{(q)} = \frac{x_{p,3}^{(q)}}{K_p(\delta R_q)}$$

$$B_p^{(q)} = x_{p,4}^{(q)}, \quad D_p^{(q)} = x_{p,5}^{(q)}, \quad F_p^{(q)} = x_{p,6}^{(q)} / K_p(\delta R_q) \tag{2.6}$$

Подставляя (2.1) в граничное условие на контуре K-ого отверстия и учитывая (2.4) — (2.6), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений в виде

$$\widetilde{B}_n^{(k)} X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^{m}{}' \sum_{p=0}^{\infty} B_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} = \widetilde{\widetilde{B}}_n^{(k)}, \quad \begin{matrix} k=1,\cdots,m \\ n=0,\cdots,\infty \end{matrix} \tag{2.7}$$

где $x_n^{(k)} = \{x_{n,j}^{(k)}\}$, $\widetilde{\widetilde{B}}_n^{(k)} = |\widetilde{\widetilde{b}}_j(n,k)|$ — шестимерные вектор-столбцы; $\widetilde{B}_n^{(k)} = \| \widetilde{b}_{ij}(n,k) \|$ $B_{n,p}^{(k,q)} = \| b_{ij}(n,p,k,q) \|$ — шестимерные матрицы; штрих обозначает, что в сумме (2.7) член при $q=k$ опущен.

Матрица $\widetilde{B}_n^{(k)}$ является невырожденной, что доказывает возможность перехода от (2.8) к системе в канонической форме

$$X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^{m}{}' \sum_{p=0}^{\infty} A_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} = b_n^{(k)} \; (k=1,\cdots,m;\; n=0,\cdots,\infty) \tag{2.8}$$

При доказательстве квазирегулярности системы (2.8) следует воспользоваться различными следствиями из разложения (2.2), а также асимптотическими оценками для модифицированных функций Бесселя. При больших n справедливо

$$K_n(z) \sim \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad J_n(z) = \frac{2}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |K_{p+n}(z)| > |K_{p-n}(z)| \tag{2.9}$$

а также следующая оценка:

$$\left| J_p(\delta R_q) \frac{K_{p+n}(\delta R_q) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n+p)\varphi_{kq} \pm K_{p-n}(\delta R_q) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n-p)\varphi_{kq}}{K_n(\delta R_q)} \right| <$$

$$< \lambda \frac{(p+n)!}{n!\,p!}\left(\frac{R_q}{R_{kq}}\right)^{p+n} \tag{2.10}$$

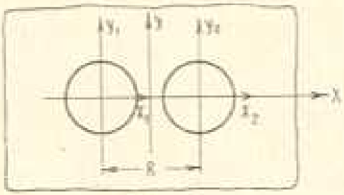
В случае граничных условий вида

$$M_{\rho_k}\Big|_{\rho_k=R_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{matrix} M_{\rho_{k,1}}\cos \\ M_{\rho_{k,2}}\sin \end{matrix} n\theta_k, \qquad H_{\rho_k\theta_k}\Big|_{\rho_k=R_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{matrix} H_{\rho_k\theta_{k,1}}\sin \\ H_{\rho_k\theta_{k,1}}\cos \end{matrix} n\theta_k$$

$$N_{\rho_k}\Big|_{\rho_k=R_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{matrix} N_{\rho_{k,1}}\cos \\ N_{\rho_{k,2}}\sin \end{matrix} n\theta_k \tag{2.11}$$

можно показать, что при любой близости несоприкасающихся произвольно расположенных круговых отверстий бесконечные системы (2.8) являются квазирегулярными и решение их единственно, если заданные на контуре K-ого отверстия изгибающие и крутящие моменты являются непрерывными функциями, первые производные от которых удовлетворяют условиям Дирихле, а перерезывающие силы — непрерывные вместе с первыми производными функции, вторые производные от которых удовлетворяют условию Дирихле.

3. Пусть бесконечная трансверсально-изотропная пластина ослаблена двумя равными круговыми отверстиями, к контурам которых приложена симметрично относительно осей x и y нагрузка (фиг. 1).



Фиг. 1.

$$M_{\rho_1}\Big|_{\rho_1=1}=\sum_{n=0}^{\infty}M_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_1, \qquad H_{\rho_1\theta_1}\Big|_{\rho_1=1}=\sum_{n=1}^{\infty}H_{\rho\theta}^{(n)}\sin n\theta_1$$

$$N_{\rho_1}\Big|_{\rho_1=1}=\sum_{n=1}^{\infty}N_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_1 \tag{3.1}$$

$$M_{\rho_2}\Big|_{\rho_2=1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n M_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_2, \quad H_{\rho_2\theta_2}\Big|_{\rho_2=1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_{\rho\theta}^{(n)}\sin n\theta_2$$

$$N_{\rho_2}\Big|_{\rho_2=1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n N_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_2$$

На базе (2.1) и в силу геометрической и силовой симметрии задачи, решение уравнений (1.1) для двухсвязной области представим так:

$$w=A(\ln\rho_1+\ln\rho_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n[\rho_1^{-n}\cos n\theta_1+(-1)^n\rho_2^{-n}\cos n\theta_2]+$$

$$+ C_n[\rho_1^{-n+2}\cos n\theta_1 + (-1)^n \rho_2^{-n+2}\cos n\theta_2]\} \tag{3.2}$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} E_n [K_n(\delta\rho_1)\sin n\theta_1 + (-1)^n K_n(\delta\rho_2)\sin n\theta_2]$$

Переходя в (3.2) к первой системе координат и подставляя затем полученные выражения в граничные условия на контуре левого отверстия (краевые условия на контуре правого отверстия удовлетворяются автоматически), приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений вида

$$\tilde{B}_n X_n + \sum_{p=1}^{\infty} B_{n,p} X_n = \tilde{\tilde{B}}_n, \quad n = 1, \ldots, \infty \tag{3.3}$$

где согласно (2.6)

$$A_n = x_{n,1}, \quad C_n = x_{n,2}, \quad E_n = x_{n,3}/K_n(\delta) \tag{3.4}$$

Выпишем значения коэффициентов $\tilde{b}_{ij}(n)$, $b_{ij}(n, p)$ и $\tilde{\tilde{b}}_j(n)$ при $i, j = 1, 2, 3$:

$$\tilde{q}_{11}(n) = -D(1-\nu_a)\rho_0^{-2} n(n+1), \quad \tilde{b}_{12}(n) = -D\rho_0^{-2}\{(1-\nu_a)(n^2+n-2) -$$

$$-4(n-1)[1+\tilde{\varepsilon}(1-\nu_a)n(n+1)]\}$$

$$\tilde{b}_{13}(n) = \frac{Dn(1-\nu_a)}{\rho_0^2 K_n(\delta)}[\delta K_n'(\delta) - K_n(\delta)], \quad \tilde{b}_{21}(n) = -D\rho_0^{-2} n(n+1)(1-\nu_a)$$

$$\tilde{b}_{22}(n) = -D\rho_0^{-2} n(n-1)[1+4\tilde{\varepsilon}(n+1)](1-\nu_a)$$

$$\tilde{b}_{23}(n) = -D\rho_0^{-2}(1-\nu_a)\left\{\frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{K_n(\delta)}[\delta K_n'(\delta) - n^2 K_n(\delta)]\right\}, \quad \tilde{b}_{31}(n) = 0$$

$$\tilde{b}_{32}(n) = -4D\rho_0^{-3} n(n-1), \quad \tilde{b}_{33}(n) = -\frac{D\delta^2}{2\rho_0^3} n(1-\nu_a) \tag{3.5}$$

$$\tilde{b}_{11}(n, p) = -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2}\frac{(p+n-1)!}{(n-2)!(p-1)!}\frac{1}{R^{p+n}}$$

$$\tilde{b}_{12}(n, p) = -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2}\frac{(p+n-1)!}{n!(p-2)!}\frac{1}{R^{p+n}} \times$$

$$\times\left[\frac{n(n-1)R^2}{p+n-1} - (n-2) - \frac{}{1-\nu_a} - 4\tilde{\varepsilon}n(n-1)\right]$$

$$\tilde{b}_{13}(n, p) = \frac{D(1-\nu_a)n}{\rho_0^2 K_n(\delta)}[K_{p+n}(\delta R) - K_{p-n}(\delta R)][\delta J_n'(\delta) - J_n(\delta)]$$

$$\widetilde{b}_{21}(n, p) = \frac{D(1-\nu_a)(p+n-1)!}{\rho_0 (n-2)!(p-1)!} \frac{1}{R^{p+n}}$$

$$\widetilde{b}_{22}(n, p) =$$
$$= -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2} \frac{(p+n-1)!}{n!(p-2)!} \frac{1}{R^{p+n}} \left[\frac{R^2(n-1)}{p+n-1} + 1 + 4\widetilde{\varepsilon} n(n-1)\right]$$

$$\widetilde{b}_{23}(n, p) = -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2} \frac{K_{p+n}(\delta R) - K_{p-n}(\delta R)}{K_n(\delta)} \times$$
$$\times \left[n^2 J_n(\delta) - \delta J_n'(\delta) - \frac{\delta^2}{2} J_n(\delta)\right], \quad \widetilde{b}_{31}(n, p) = 0$$

$$b_{32}(n, p) = \frac{4D}{\rho_0^3 R^{p+n}} \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!(p-2)!}$$

$$\widetilde{b}_{33}(n, p) = -\frac{D(1-\nu_a)\delta^2 n J_n(\delta)}{2\rho_0^3 K_n(\delta)} [K_{p+n}(\delta R) - K_{p-n}(\delta R)]$$

$$\widetilde{b}_1(n) = M_\rho^{(n)} - \frac{n-1}{R^n} M_\rho^{(0)}, \quad \widetilde{b}_2(n) = H_{\rho\theta}^{(n)} + \frac{n-1}{R^n} M_\rho^{(0)}$$

$$\widetilde{b}_3(n) = N_\rho^{(n)}, \quad (\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon / r_0^2)$$

Легко показать, что при больших n

$$|\widetilde{B}_n| \sim \lambda_1 n^3, \quad \lambda_i - \text{постоянные}. \tag{3.6}$$

Умножая (3.3) на $\widetilde{B}_n^{-1}$, получаем бесконечную систему в канонической форме

$$X_n + \sum_{p=1}^{\infty} A_{n,p} X_p = B_n, \quad A_{n,p} = \widetilde{B}_n^{-1} B_{n,p} = \| a_{ij}(n, p) \|, \quad B_n = \widetilde{B}_n^{-1} \widetilde{\widetilde{B}}_n \tag{3.7}$$

Используя (2.10), (3.5), (3.6) и (3.7), выводим оценку

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{ij}(n, p)| < \lambda_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n-3)!(p-1)!} \frac{1}{R^{p+n}} \tag{3.8}$$

Полагая в (2.3') $z=1$, $\alpha = R$ и сравнивая с (3.7), имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{ij}(n, p)| < \lambda_3 \frac{n(n^2-1)(n-2)}{(R-1)^{n+2}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.9}$$

В случае несоприкасающихся отверстий $R > 2$ из (3.9) следует, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{ij}(n, p)| \underset{n \to \infty}{\to} 0 \tag{3.10}$$

Если считать далее, что $M_{\rho_1}\big|_{\rho_1=1}$ и $H_{\rho_1\theta_1}\big|_{\rho_1=1}$ — непрерывные функции, первые производные от которых удовлетворяют условию Дирихле, $N_{\rho_1}\big|_{\rho_1=1}$ — непрерывная вместе с первой производной функция, вторая производная от которой удовлетворяет условию Дирихле, то из (3.5), (3.6) и (3.7) и работы [5] находим оценку

$$|b_j(n)| < \frac{\lambda_4}{n} \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) следует, что найдутся такие n° и λ, при которых

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{ij}(n, p)| < 1 \quad n = n^0 + 1, \ldots, \infty \tag{3.12}$$

$$|b_j(n)| < \lambda \left(1 - \sum_{n=n^0+1}^{\infty} |a_{ij}(n, p)|\right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

Неравенства (3.12) показывают, что бесконечная система является квазирегулярной и ее решение находится методом редукции [5].

Так как в данной задаче выполняются условия применения теоремы Гильберта [5], то решение бесконечной системы (3.7) единственно.

4. Используя метод, изложенный в работах [6, 7], проведенные рассуждения легко обобщить на случай некруговых отверстий.

Львовский
политехнический институт

Поступила 25 II 1969

Բ. Լ. ՊԵԼԵԽ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ, ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ս. Ա. Համբարձումյանի ընդհանրացված տեսության սահմաններում շարադրվում է մեթոդ, որի օգնությամբ կարելի է լուծել վերջավոր թվով կլոր անցքերով թուլացված, տրանսվերսալ-իզոտրոպ սալերի ծռման խնդիրները։

Բավականին լայն դասի եզրային պայմանների դեպքում ապացուցվում է ստացված անվերջ հանրահաշվական սիստեմների քվազի-ռեգուլյարությունը և լուծումների միակությունը։

ON THE BENDING OF AN INFINITE TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE WITH A FINITE NUMBER OF CIRCULAR HOLES

B. L. PELEKH

Summary

In this paper a method of solving a problem of the bending of a transversal-isotropic plate weakened by a finite number of circular holes is proposed. The investigation is carried out on the basis of S. A. Ambartsumian's theory.

The quasi-regularity and uniqness of the solution for infinite systems of algebraic equations under boundary conditions of sufficiently broad classes are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1967.
2. *Пелех Б. Л.* К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями. Прикл. механика, т. 1, в. 7, 1965.
3. *Гузь О. М.* Про застосування теореми додавання циліндричних функцій до розвъязування лінійних задач механіки у випадку скінчених багатозвъязних областей. Доповіді АН УРСР, А, № 8, 1966.
4. *Гузь О. М.* Про напружено-деформований стан в оболонках, послаблених рядом отворів. ДАН УРСР, № 4, 1965.
5. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1952.
6. *Гузь О. М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках. Прикл. механіка, т. VIII, в. 4, 1962.
7. *Савин Г. Н.* и *Гузь А. Н.* О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1964.