ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

Ж. Г. АПИКЯН

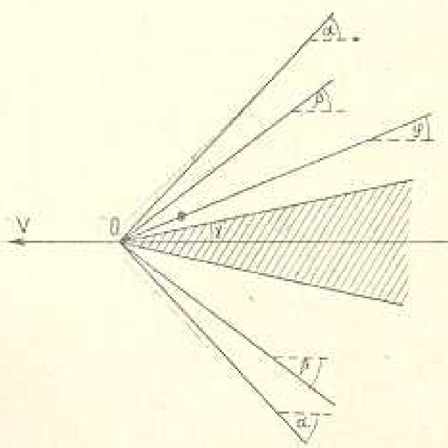
ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО КОНУСА В УПРУГОЙ СРЕДЕ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Безвихревое сверхзвуковое обтекание жесткого конуса и клина рассматривалось в работах [1] и [2]. В этих работах было принято, что на поверхности конуса и клина удовлетворяется только одно условие — нормальная составляющая скорости частиц среды равна нулю.

В настоящей работе рассмотрена задача о движении конуса в упругой среде со сверхзвуковой скоростью, когда на поверхности конуса выполняются два условия: 1) скорости частиц параллельны образующим конуса и 2) задан коэффициент трения между средой и поверхностью конуса.

Найдены два частных решения уравнений движения, первое из которых потенциальное и совпадает с решением, приведенным в работе [1], второе — равнообъемное (объемнопостоянное). Решение рассматриваемой задачи получено комбинированием этих решений.

1. Пусть жесткий конус движется в направлении отрицательной оси z со сверхзвуковой скоростью V. Ось конуса совпадает с осью Oz (фиг. 1). Задача осесимметричная и потому воспользуемся цилиндрической системой координат z, r, φ. Окружные перемещения равны нулю, и все искомые функции не зависят от координаты φ. Дифференциальные уравнения движения среды по классической теории упругости будут



Фиг. 1.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\varphi)=\rho\frac{\partial u_r}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial u_z}{\partial t}$$

где σ_r, σ_z, σ_φ — нормальные, а σ_{rz} — касательное напряжения, ρ — плотность упругой среды, u_r и u_z — компоненты скорости частиц, t — время.

Присоединив к системе (1) еще 4 уравнения, получающихся из уравнений, связывающих компоненты деформаций с перемещениями и используя зависимости закона Гука, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{\partial \sigma}{\partial r}+\frac{\partial \tau}{\partial z}+\frac{2s_r+s_z}{r}=\rho\frac{\partial u_r}{\partial t}\\
&\frac{\partial \tau}{\partial r}+\frac{\partial s_z}{\partial z}+\frac{\partial \sigma}{\partial z}+\frac{\tau}{r}=\rho\frac{\partial u_z}{\partial t}\\
&2\mu\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}-\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=3\frac{\partial s_r}{\partial t}\\
&2\mu\left(2\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}\right)=3\frac{\partial s_z}{\partial t}\\
&\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=\frac{\partial \tau}{\partial t}\\
&K\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_r}{r}\right)=\frac{\partial \sigma}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

здесь введены обозначения: μ и K — упругие постоянные, σ — среднее напряжение, $\tau=\sigma_{rz}$, $s_r=\sigma_r-\sigma$, $s_z=\sigma_z-\sigma$, $s_\varphi=\sigma_\varphi-\sigma$ — компоненты девиатора напряжений.

Для стационарной задачи об обтекании конуса упругой средой все искомые функции u_r, u_z, s_r, s_z, τ, σ являются функциями аргумента $\xi=z+Vt$. Уравнения (2) могут быть сведены к системе дифференциальных уравнений в частных производных от двух независимых переменных ξ и r:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{\partial \sigma}{\partial r}+\frac{\partial \tau}{\partial \xi}+\frac{2s_r+s_z}{r}=\rho V\frac{\partial u_r}{\partial \xi}\\
&\frac{\partial \tau}{\partial r}+\frac{\partial s_z}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}+\frac{\tau}{r}=\rho V\frac{\partial u_z}{\partial \xi}\\
&2\mu\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}-\frac{\partial u_z}{\partial \xi}\right)=3V\frac{\partial s_r}{\partial \xi}\\
&2\mu\left(2\frac{\partial u_z}{\partial \xi}-\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}\right)=3V\frac{\partial s_z}{\partial \xi}\\
&\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial \xi}\right)=V\frac{\partial \tau}{\partial \xi}\\
&K\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial \xi}+\frac{u_r}{r}\right)=V\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Из соображений размерностей искомые функции зависят только от отношения $\eta = \frac{r}{\xi} = \operatorname{tg}\varphi$. Используя новую переменную η, находим выражения для производных, входящих в уравнения (3)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\eta}{\xi}\frac{d}{d\eta} \tag{4}$$

Дифференциальные уравнения (3) в частных производных по r и ξ становятся обыкновенными по переменной η

$$\begin{gathered}
\rho V\eta u_r' + s_r' - \eta\tau' + \sigma' = -\frac{2s_r + s_z}{\eta} \\
\rho V\eta u_z' - \eta s_z' + \tau' - \eta\sigma' = -\frac{\tau}{\eta} \\
2\mu\left(2u_r' + \eta u_z'\right) + 3V\eta s_r' = 2\mu\frac{u_r}{\eta} \\
2\mu\left(u_r' + 2\eta u_z'\right) - 3V\eta s_z' = -2\mu\frac{u_r}{\eta} \\
\mu(\eta u_r' - u_z') - V\eta\tau' = 0 \\
K(u_r' - \eta u_z') + V\eta\sigma' = -K\frac{u_r}{\eta}
\end{gathered} \tag{5}$$

2. Система (5) допускает два частных решения:

$$\begin{gathered}
u_r^{(1)} = c_1 g_1, \quad u_r^{(2)} = c_2\alpha_2 g_2 \\
u_z^{(1)} = V - c_1\alpha_1 f_1, \quad u_z^{(2)} = c_2 f_2 \\
s_r^{(1)} = -\frac{\mu c_1}{V}\left(\frac{1-2\alpha_1^2}{3\alpha_1}f_1 + \frac{g_1}{\eta}\right), \quad s_r^{(2)} = -\frac{\mu c_2}{V}\left(f_2 + \alpha_2\frac{g_2}{\eta}\right) \\
s_z^{(1)} = \frac{2\mu c_1}{V}\frac{1-2\alpha_1^2}{3\alpha_1}f_1, \quad s_z^{(2)} = \frac{2\mu c_2}{V}f_2 \\
\tau^{(1)} = \frac{2\mu c_1}{V}g_1, \quad \tau^{(2)} = \frac{\mu c_2}{V}\frac{\alpha_2^2-1}{\alpha_2}g_2 \\
\sigma^{(1)} = -\frac{K}{V}c_1\frac{1+\alpha_1^2}{\alpha_1}f_1, \quad \sigma^{(2)} = 0
\end{gathered} \tag{6}$$

здесь $a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ и $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде:

$$\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{V^2 - b^2}} = \operatorname{tg}\beta, \quad f_i = \operatorname{Arch}\frac{\alpha_i}{\eta},$$

$g_i = \sqrt{\left(\frac{\alpha_i}{\eta}\right)^2 - 1}$ $(i = 1,\ 2)$; c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Частные решения (6) обладают тем замечательным свойством, что первое из них—потенциальное, а второе—равнообъемное (т. к. $\sigma^{(2)} = 0$). Потенциал скорости $(u_r^{(1)},\ u_z^{(1)})$ получен в [1] в виде $\Phi^{(1)} = Vz + c_1 r\left(g_1 - \frac{\alpha_1}{\eta} f_1\right)$.

Так как $f_i(\alpha_i) = g_i(\alpha_i) = 0$, то имеем

$$\begin{array}{cc} \text{при } \eta = \alpha_1 & \text{при } \eta = \alpha_2 \\ u_r^{(1)} = \tau^{(1)} = s_r^{(1)} = s_z^{(1)} = \sigma^{(1)} = 0 & u_r^{(2)} = u_z^{(2)} = s_r^{(2)} = 0 \\ u_z^{(1)} = V & s_z^{(2)} = \tau^{(2)} = \sigma^{(2)} = 0 \end{array} \tag{7}$$

Из общей теории распространения волн известно, что вне конуса с осью Oz, вершиной в точке O и углом полураствора α течение—невозмущенное. Отметим, что детерминант системы (5) обращается в нуль при $\eta = \alpha_1$ и $\eta = \alpha_2$ или $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Поэтому на конусах $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ возможны особенности. Однако структура частных решений такова, что из них можно сконструировать непрерывное решение. Особенность решений проявляется тем, что производные всех искомых функций на конусах $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ обращаются в бесконечность.

3. В области $\alpha_2 \leqslant \eta \leqslant \alpha_1$ решение граничной задачи берется в виде:

$$\begin{array}{lll} u_{r1} = u_r^{(1)}, & u_{z1} = u_z^{(1)}, & s_{r1} = s_r^{(1)} \\ s_{z1} = s_z^{(1)}, & \tau_1 = \tau^{(1)}, & \sigma_1 = \sigma^{(1)} \end{array} \tag{8}$$

В области $\gamma \leqslant \eta \leqslant \alpha_2$ искомое решение имеет следующий вид:

$$\begin{array}{lll} u_{r2} = u_r^{(1)} + u_r^{(2)}, & u_{z2} = u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, & s_{r2} = s_r^{(1)} + s_r^{(2)} \\ s_{z2} = s_z^{(1)} + s_z^{(2)}, & \tau_2 = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}, & \sigma_2 = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \end{array} \tag{9}$$

Вследствие соотношений (7) решение рассматриваемой задачи непрерывно при $\eta = \alpha_1$ и $\eta = \alpha_2$.

4. На поверхности конуса $\varphi = \gamma$ (γ — половина угла раствора конуса) задаются два условия: 1) скорости частиц параллельны образующим конуса, 2) закон сухого трения.

Сила трения направлена против движения, а среда сжимается. Поэтому граничные условия имеют вид:

$$u_{r2} = u_{z2} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{при} \quad \varphi = \gamma \tag{10}$$

$$\sigma_{n\tau} - f \sigma_{nn} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \gamma \tag{11}$$

где $f = \operatorname{tg} \delta$ — коэффициент трения, δ — угол трения, $\sigma_{n\tau}$ и σ_{nn} — касательное и нормальное напряжения на конусе; τ — направление образующей, n — направление внутренней нормали конуса. Используя соотношения, связывающие компоненты напряжений в различных системах координат, на основании (6), (9), (10) и (11) получаем

$$\begin{gathered} c_1 (g_1 \operatorname{ctg} \gamma + \alpha_1 f_1) + c_2 (\alpha_2 g_2 \operatorname{ctg} \gamma - f_2) = V \\ Bc_1 + Ac_2 = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$A = f_2 [\sin (2\gamma + \delta) + \sin \gamma \cos (\gamma + \delta)] +$$

$$+ g_2 \left[\alpha_2 \cos \gamma \operatorname{ctg} \gamma \sin (\gamma + \delta) + \frac{1 - \alpha_2^2}{\alpha_2} \cos (2\gamma + \delta) \right]$$

$$B = g_1 [\cos \gamma \operatorname{ctg} \gamma \sin (\gamma + \delta) - 2 \cos (2\gamma + \delta)] +$$

$$+ f_1 \frac{1 - 2\alpha_1^2}{3\alpha_1} [\sin (2\gamma + \delta) + \sin \gamma \cos (\gamma + \delta)] +$$

$$+ f_1 \left(3 \frac{a^2}{b^2} - 4 \right) \frac{1 + \alpha_1^2}{3\alpha_1} \sin \delta$$

Из системы (12) определяются неизвестные коэффициенты c_1 и c_2. Рассмотрим численный пример. Принимая

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 35^\circ, \quad \gamma = \delta = 5^\circ$$

получаем

$$\sigma_{n\tau} = -0.09\,\mu, \quad \sigma_{nn} = -1.03\,\mu$$

Отметим, что решение имеет особенность в вершине конуса, так как разным лучам соответствуют разные значения искомых величин.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 VII 1969

Ժ. Գ. ԱՊԻԿՅԱՆ

ԿՈՇՏ ԿՈՆԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկված է՝ առաձգական միջավայրում, կոշտ կոնի, գերձայնային հաստատուն արագությամբ, իր առանցքի ուղղությամբ համընթաց շարժման խնդիրը: Կոնի մակերևույթի վրա բավարարված են լրիվ հպման և շփման պայմանները: Միջավայրի շարժման և դեֆորմացիաների համատեղության հավասարումների սիստեմը բերվել է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի, որի երկու անկախ լուծումներով կառուցվում է դիտարկվող

եզրային խնդրի լուծումը։ Այդ լուծումը կոնին հարող տիրույթում ունի ինչպես պոտենցիալ, այնպես էլ մրրկային մասեր, իսկ հեռավոր տիրույթում՝ միայն պոտենցիալ։ Հարվածային ալիքներ չեն առաջանում։

THE MOTION OF A RIGID CONE AT A SUPERSONIC SPEED IN AN ELASTIC MEDIUM

J. G. APIKIAN

Summary

The problem on the motion of a rigid cone at a constant supersonic speed along its axis in an elastic medium is considered.

The system of the motion and compatibility equations is reduced to a system of ordinary differential equations on whose two independent solutions the solution of the boundary problem in question is based. This solution near the cone has both potential and vortex parts, while at a distance from it, it has only a potential one.

No shock waves are generated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусукава К.* К теории ударных волн, возникающих при движении жесткого конуса со сверхзвуковой скоростью в упругой среде. Сб. переводов „Механика", вып. 4, 1952.
2. *Кусукава К.* К теории ударных волн, возникающих при движении жесткого клина со сверхзвуковой скоростью в упругой среде. Сб. переводов, „Механика", вып. 4, 1952.