ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

А. Е. ДАНИЕЛЯН

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ

Задача о неустановившемся движении реального газа в длинном газопроводе имеет большое практическое значение. В работах [1], [2], [3] и др. рассматривалась эта задача с различными ограничениями и давались приближенные решения отдельных вопросов.

В настоящей работе при помощи числовых методов исследуется движение реального газа в длинном газопроводе в точной постановке этой задачи. Определяются законы распределений давления и скорости, а также изменение расхода газа в газопроводе в зависимости от заданного закона расхода газа в конце газопровода.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения. Начальные и граничные условия

Рассмотрим нестационарное, одномерное, изотермическое движение реального газа в длинном газопроводе с учетом силы тяжести.

В данном случае движение газа будет описываться следующей системой уравнений [1]:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda \rho u^2}{8\delta} + \gamma \sin\alpha \\
-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \qquad (1.1) \\
p = \rho g R T
\end{gathered}
$$

где p, u и ρ — соответственно средние по сечению давление, скорость и плотность газа,

λ — безразмерный коэффициент сопротивления,

δ — гидравлический радиус сечения трубы,

γ — удельный вес газа,

α — угол наклона газопровода,

R — газовая постоянная,

T — абсолютная температура,

g — ускорение силы тяжести.

Требуется определить давление и скорость газа в любом сечении газопровода и произвести количественное и качественное исследование вышеупомянутых величин в зависимости от угла наклона газопровода.

Исключив из системы (1.1) $u(x, t)$, $\rho(x, t)$ и обозначив $p^2(x, t)$ через $P(x, t)$, получаем следующее уравнение относительно $P(x, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\sqrt{P}}{2b}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + a\frac{\partial P}{\partial x} \tag{1.2}$$

где
$$b = \left(\frac{\lambda \rho u}{8\delta}\right)_{\text{ср}} = \text{const}, \quad a = \frac{\gamma \sin\alpha}{2b}$$

Исходя из постановки задачи, зададим следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \quad P = P_{\text{н}} = \text{const} \\ &\text{при } x = L \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\lambda RT}{4gs\delta}G^2(t) \\ &\text{при } t = 0 \quad P = P_0(x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь s—площадь поперечного сечения трубопровода,
$G(t)$—заданная функция, характеризующая закон изменения расхода в конце трубопровода,
$P_0(x)$—функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме, которая берется в виде [2]

$$P_0(x) = P_{\text{н}} - (P_{\text{н}} - P_{\text{к}})\frac{x}{L} \tag{1.4}$$

где $P_{\text{н}}$ и $P_{\text{к}}$—значения квадратов давления в начале и конце трубопровода, L—длина трубопровода.

§ 2. Вычисление скорости и расхода газа

После определения давления из уравнения (1.2) можно вычислить скорость и расход газа в любом сечении газопровода в любой момент времени по формулам

$$u^2 = \frac{A}{P}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{B}{P} \tag{2.1}$$

$$G(x, t) = Cp(x, t)\,u(x, t) \tag{2.2}$$

где
$$A = -\frac{8gRT\delta}{\lambda}, \quad B = A\gamma\sin\alpha$$

$$C = \frac{s}{RT}$$

При вычислении длины газопровода для положительных значений угла наклона α необходимо учитывать условие

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \geqslant \gamma \sin\alpha \tag{2.3}$$

которое получается из уравнения (2.1).

§ 3. Решение задачи (1.2) — (1.3)

Уравнение (1.2) решаем методом конечных разностей. Возьмем сетку узлов:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h; \quad t_j = jk$$
$$\left(i = -1,\ 0,\ 1,\ 2, \cdots, N;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots;\ h = \frac{1}{N}\right) \tag{3.1}$$

и для внутреннего узла (i, j) запишем разностное уравнение

$$\frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{k} = \frac{\sqrt{P_{i,j-1}}}{2b}\,\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{h^2} + a\,\frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h}$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots, N-1;\quad j = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \tag{3.2}$$

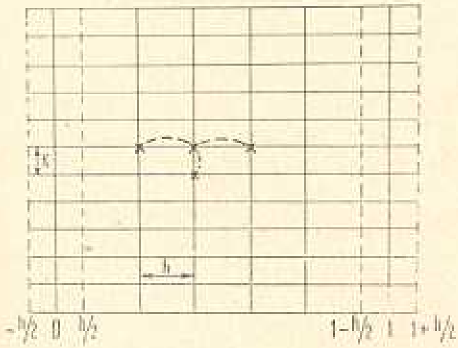
аппроксимирующее уравнение (1.2) в узле (i, j) с точностью до $O(k + h^2)$.

Здесь h—шаг по переменной x, а k—шаг по переменной t.

Для хорошей аппроксимации граничных условий область изменения по переменной x расширена по полшага влево и вправо.

Схема разбиения показана на фиг. 1.

Выбор шага по времени k производится в зависимости от шага по переменной x, сохраняя условие устойчивости конечно-разностной схемы.



Фиг. 1

Как показано на фиг. 1, для решения данной задачи применена устойчивая, неявная разностная схема [4].

Отметим, что уравнение (1.2) написано в виде (3.2) потому, что выведенное из (1.2) уравнение (3.2) в конечных разностях наиболее удобно для программирования на ЭВМ [5].

Аппроксимации начальных и граничных условий будут:

$$P_{i,0}=P_0(x_i),\quad (i=-1,\,0,\,1,\,2,\cdots,\,N)$$

$$\frac{P_{-1,j}-P_{0,j}}{2}=P_{\text{н}}\quad \text{или}\quad P_{-1,j}=P_{0,j}+2P_{\text{н}}\,(j=1,\,2,\,3,\cdots)\tag{3.3}$$

$$\frac{P_{N,j}-P_{N-1,j}}{h}=f(t_j),\quad \text{где}\ f(t_j)=-\frac{RT\lambda}{4gs\delta}G^2(t_j)$$

$$(j=1,\,2,\,3,\cdots)$$

Итак, задача сводится к решению уравнения (3.2) с начальными и граничными условиями (3.3).

Решение производится методом прогонки (6).

Видоизменив уравнение (3.2), получим

$$P_{i+1,j}-\left(2+\frac{2bh^2}{k\sqrt{P_{i,j-1}}}-\frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}}\right)P_{i,j}+$$

$$+\left(1-\frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}}\right)P_{i-1,j}+\frac{2bh^2}{k}\sqrt{P_{i,j-1}}=0\tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) и граничные условия (3.3) при $j=m$ принимают вид:

$$P_{i+1,j}-A_{i,m}P_{i,m}+B_{i,m}P_{i-1,m}+C_{i,m}=0\tag{3.5}$$

$$P_{-1,m}=D_{0,m}P_{0,m}+E_{0,m}\tag{3.6}$$

$$P_{N-1,m}=F_mF_{N,m}+R_m\tag{3.7}$$

$$\text{где}\ A_{i,m}=2+\frac{2bh^2}{k\sqrt{P_{i,j-1}}}-\frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}}$$

$$B_{i,m}=1-\frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}};\quad C_{i,m}=\frac{2bh^2}{k}\sqrt{P_{i,j-1}}$$

$$D_{0,m}=-1;\quad E_{0,m}=2P_{\text{н}}$$

$$F_m=1;\quad R_m=-hf_m\ (m=1,\,2,\,3,\cdots)$$

Будем перегонять левое граничное условие (3.6) в правый граничный узел, т. е. будем находить такие $D_{i,m}$ и $E_{i,m}$, чтобы при всех $i=0,\,1,\,2,\cdots,\,N$

$$P_{i-1,m}=D_{i,m}P_{i,m}+E_{i,m}\tag{3.8}$$

Подставляя $P_{i-1,m}$ из (3.8) в (3.5), будем иметь

$$P_{i+1,m}-A_{i,m}P_{i,m}+B_{i,m}D_{i,m}P_{i,m}+C_{i,m}+B_{i,m}E_{i,m}=0$$

или, разрешая относительно $P_{i,m}$

$$P_{i,m} = D_{i+1,m} P_{i+1,m} + E_{i+1,m}$$

где

$$D_{i+1,m} = \frac{1}{A_{i,m} - B_{i,m} D_{i,m}} \tag{3.9}$$

$$E_{i+1,m} = \frac{C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m}}{A_{i,m} - B_{i,m} D_{i,m}} = (C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m}) D_{i+1,m} \tag{3.10}$$

Зная $A_{i,m}$, $B_{i,m}$, $C_{i,m}$, $D_{0,m}$, $E_{0,m}$, находим с помощью рекуррентных соотношений (3.9) и (3.10) $D_{i,m}$, $E_{i,m}$ и, далее, с помошью (3.8) обратной прогонкой находим последовательно $P_{i-1,m} (i = N-1, N-2, \cdots, 0)$.

Для решения задачи (3.2) — (3.3) на основе формул (3.5) — (3.10) была составлена программа на ЭВМ „Раздан-2", реализующая метод прогонки. В этой программе выбор шагов h и k по переменным x и t осуществляется автоматически. После выбора шагов применяется алгоритм прогонки по слоям t. Ввиду того, что шаг k намного меньше, чем h, вывод результатов производится пропуском нескольких слоев по t, определяемых заранее заданным числом. Последнее обстоятельство позволяет, во-первых, иметь, как можно меньше выходной информации и, во-вторых, разумным способом осуществить выбор шагов h и k.

В составленной программе содержится 223 команды. Из них:

а) 40 команд для перевода полученных результатов,

б) 19 команд для подпрограммы квадратичного корня,

в) 63 команды для метода прогонки (с автоматическим выбором шагов h и k),

г) 17 команд для вычисления функции $G(t)$,

д) 58 команд для вычисления скорости и расхода газа (вместе с их выводом),

е) 26 команд для вычисления констант.

§ 4. Численный пример

Следуя данным работы [2] и учитывая условие (2.3), была решена следующая конкретная задача:

$$L = 17\,км \qquad T = 280^\circ K$$

$$P_н = 36\,атм \qquad d = 0.625\,м$$

$$P_к = 14\,атм \qquad \lambda = 0.0119$$

$$R = 50\,м/град \qquad b = 0.08\,кг/сек$$

$$\gamma = 0.733\,кг/м^3$$

$$G(t) = G(0)\,[a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4]$$

где $G(0)$ — среднечасовой расход газа;

t — время

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.03217, \quad a_2 = -0.07794, \quad a_3 = 0.01530,$$

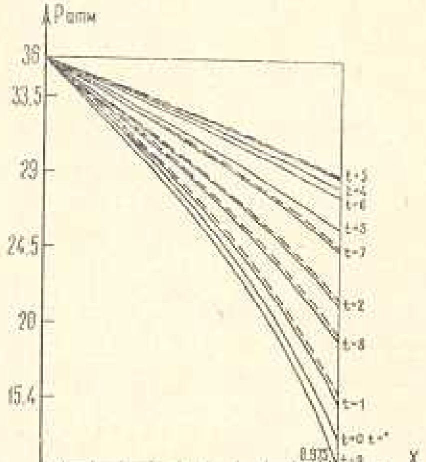
$$a_4 = -0.00078, \quad G(0) = 31.5\ \text{кг/сек}$$

В данном случае длина газопровода разбивается на 20 участков, т. е. $h = 0.05$, а $k = 0.01$. Начало трубы соответствует точке $x = 0.025$, конец—точке $x = 1.025$.

Для проверки точности вычислений задачу решаем, уменьшая шаги h и k вдвое, и сравниваем полученные результаты. Совпадение с достаточной степенью точности говорит о практической сходимости метода.

Машинное время решения задачи при $h=0.05$, $k=0.01$ и $0 \leqslant t \leqslant 10$ с выводом каждого десятого слоя, составляет примерно 12 *мин*. Скорость машины „Раздан-2“ — 5000 — 8000 операций в минуту. Вычисления произведены для случаев $\alpha = 0°$, $\pm 15°$ и $\pm 30°$.

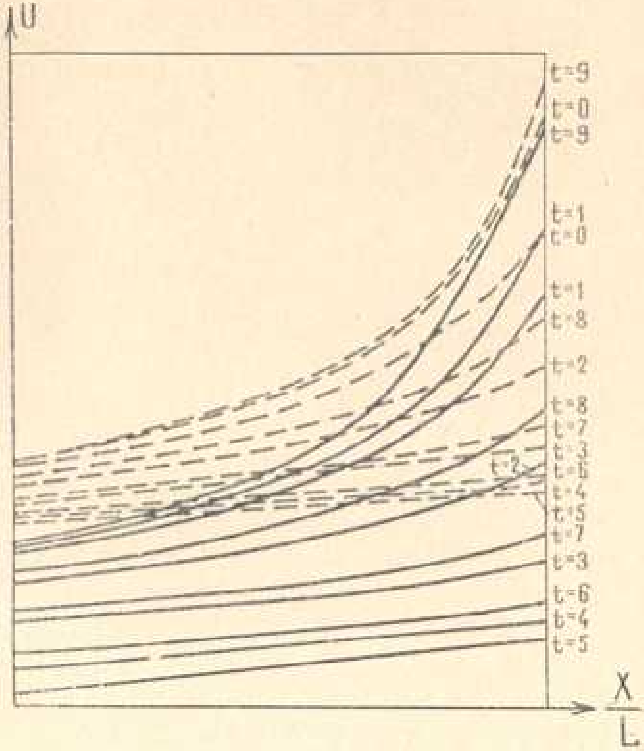
Распределения давления и скорости, а также изменение расхода по длине газопровода в любой момент времени приведены на фиг. 2, 3, 4 для случая $\alpha = \pm 30°$.



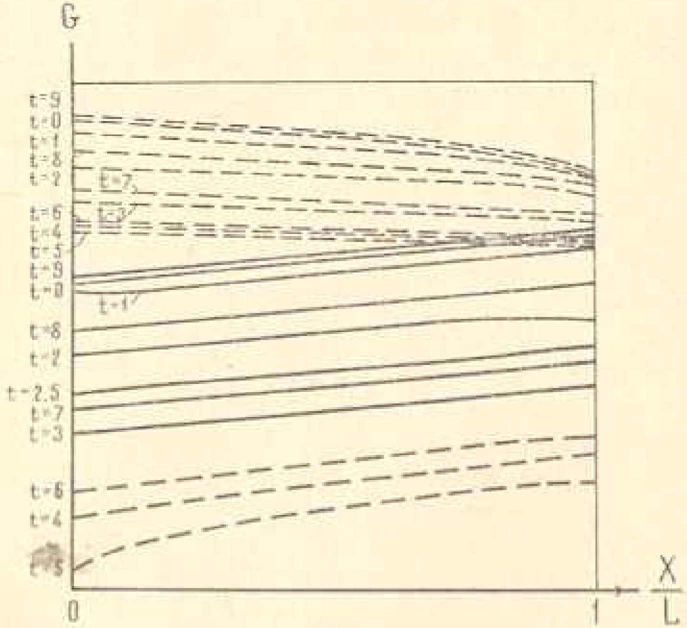
Фиг. 2.

Сплошные линии изображают графики функций $p(x, t)$, $u(x, t)$ и $G(x, t)$ при $\alpha = 30°$, а пунктирные линии—при $\alpha = -30°$.

Сравнивая полученные результаты с результатами работ [2] и [4], легко заметить, что между ними есть количественная разница. Эта разница выражается, в первую очередь, в характерном времени. Максимальное давление, в отличие от работы [2], достигается на час раньше, а графики, показывающие изменения давления, скорости и расхода, в


U
t=9
t=0
t=9
t=1
t=0
t=1
t=8
t=2
t=8
t=7
t=3
t=2
t=6
t=4
t=5
t=7
t=3
t=6
t=4
t=5
X
L

Фиг. 3.


G
t=9
t=0
t=1
t=8
t=2
t=7
t=6
t=3
t=4
t=5
t=9
t=0
t=1
t=6
t=2
t=-2.5
t=7
t=3
t=6
t=4
t=5
0
1
X
L

Фиг. 4.

отличие от работ [2] и [5], параллельно перенесены в сторону увеличения.

Из полученных результатов и из графиков, представленных на фиг. 2, 3, 4, видно, что при увеличении α в положительную сторону газодинамические элементы уменьшаются, а при увеличении α в отрицательную сторону, наоборот, увеличиваются. Для одних и тех же значений α по абсолютной величине графики, соответствующие отрицательному значению угла наклона, по сравнению с графиками, соответствующими положительному значению угла наклона α, как и предполагалось, параллельно перенесены в сторону увеличения газодинамических элементов. При $\alpha = 0^\circ$ из результатов этой работы получаются результаты работы [5].

В заключение, выражаю глубокую благодарность Г. А. Бабаджаняну за обсуждение работы и ценные советы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12 VI 1969

Լ. Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է իրական գազի ոչ-ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը երկար գազամուղում: Որոշվում է ճնշման, արագության և հոսքի բաշխման օրենքները՝ կախված գազամուղի թեքման անկյունից:

Խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը՝ խառը եզրային պայմաններով: Լուծվում է թվային եղանակով «Հրազդան-2» էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի օգնությամբ:

Որոշվում է գազի ճնշման, արագության և հոսքի բաշխման օրենքները՝ ժամանակի տարբեր ակնթարթների համար և կատարվում է վերոհիշյալ գազոդինամիկական էլեմենտների փոփոխությունների հետազոտություն, կախված գազամուղի թեքման անկյունից:

Լուծված է կոնկրետ թվային օրինակ: Կառուցված են ճնշման, արագության և հոսքի գրաֆիկները ժամանակի տասն ակնթարթների համար:

THE UNSTEADY REAL GAS FLOW IN A LONG PIPELINE

L. E. DANIELIAN

Summary

The unsteady, isothermal, one-dimensional real gas glow in a long, graded pipeline is considered.

The problem is reduced to the solution of the second-order nonlinear differential equation with the third kind boundary conditions. When solving this problem numerically the „Razdan-2" computer was used.

The distribution of pressure, velocity and gas flow rate is presented numerically for ten time instants, depending on the pipeline slope-angle.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. *Бабаджанян Г. А.* Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений „Нефть и Газ", № 1, 1961.
3. *Цатурян С. И.* К задаче о неустановившемся движении газа в длинных газопроводах при переменном расходе его на конце трубы. Вестник МГУ, математика, механика, № 1, 1969.
4. *Рихтмайер Р. Д.* Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.
5. *Даниелян Л. Е.* Численное решение задачи неустановившегося движения реального газа в длинном газопроводе. Ученые записки ЕГУ, № 3, 1969.
6. *Березин И. С.* и *Жидков Н. П.* Методы вычислений. Физматгиз, т. II, М., 1960.
7. *Смирнов А. С., Генкина Л. А., Хушпулян М. М., Чернов Д. А.* Транспорт и хранение газа. М., 1962.
8. *Douglas J.* On the numerical integration of quasi-linear parabolic differential equations. Pacif. J. Math., 6, № 1, 1956.