ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

А. А. БАБЛОЯН, В. Г. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Действие штампов на круговое кольцо исследовали многие авторы [1—4, 6].

В настоящей работе приводится решение задачи о плоской деформации кругового кольца, когда по внешнему и внутреннему контурам приложены $m>1$ одинаковых симметрично расположенных жестких штампов, причем размеры их на каждом из контуров одинаковы. Размеры же штампов на внутреннем и внешнем контурах в общем случае различны.

Рассмотрены два случая взаимного расположения внутренних и внешних штампов: 1) друг против друга и 2) в шахматном порядке.

Задача сводится к решению системы двух парных рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции, которая, в свою очередь, сводится к системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Показывается, что каждая из получающихся систем не только квази-вполне регулярна, но и сумма модулей коэффициентов при неизвестных стремится к нулю. Свободные члены этих систем также стремятся к нулю при возрастании индекса.

Получены удобные для вычислений формулы (с выделенными особенностями) для контактных напряжений и радиальных перемещений.

Как известно [1], плоская задача теории упругости в полярных координатах (r, φ) сводится к определению бигармонической функции Эйри $\Phi(r, \varphi)$ при заданных граничных условиях. Произведя замену переменной $r=ae^t$ и введя новую функцию $F(t, \varphi)=ar^{-1}\Phi(r, \varphi)$, как это сделано в [5, 7], бигармоническое уравнение приводим к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, допускающему разделение переменных.

Решение последнего уравнения для кругового кольца $(a\leqslant r\leqslant b$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ ищем в виде ряда Фурье

$$F(t, \varphi)=b(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(t)\cos\alpha_k\varphi$$

$$\Psi_k(t)=C_k\operatorname{sh}\alpha_k(t_1-t)\operatorname{sh}(t_1-t)+A_k\operatorname{sh}\alpha_k(t_1-t)\operatorname{sh}t+$$
$$+B_k\operatorname{sh}\alpha_k t\operatorname{sh}(t_1-t)+D_k\operatorname{sh}\alpha_k t_1\operatorname{sh}t \tag{0.1}$$

$$b(t) = b_0 e^t + b_1 t e^{-t}, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1} = km, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{m}$$

$$t = \ln\frac{r}{a} \; (0 \leqslant t \leqslant t_1), \qquad t_1 = \ln\frac{b}{a}$$

где m — число штампов, a и b — радиусы кругового кольца.

Формулы для определения напряжений и перемещений через новую функцию $F(t, \varphi)$ приведены в работах [6, 7].

В силу симметрии области и граничных условий относительно осей $\varphi = k\varphi_1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1)$, функцию $F(t, \varphi)$ разыскиваем только в $^1/_{2m}$-ой части области. При этом на осях симметрии удовлетворяются условия

$$v(t, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t, \varphi) = 0 \qquad \varphi = k\varphi_1 \; (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1) \tag{0.2}$$

Легко видеть, что при выборе $F(t, \varphi)$ в виде (0.1) условия симметрии (0.2) удовлетворяются тождественно.

1. Рассмотрим случай, когда штампы расположены друг против друга. Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\tau_{r\varphi}(0, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) = 0 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$$

$$u(0, \varphi) = f_1(\varphi) \;\; (0 \leqslant \varphi \leqslant \overline{\varphi}_0), \quad \sigma_r(0, \varphi) = f_2(\varphi) \;\; (\overline{\varphi}_0 < \varphi \leqslant \varphi_1) \tag{1.1}$$

$$u(t_1, \varphi) = f_3(\varphi) \;\; (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0), \quad \sigma_r(t_1, \varphi) = f_4(\varphi) \;\; (\varphi_0 < \varphi \leqslant \varphi_1)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), для неизвестных коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k, а также для $b(t)$ получим следующие значения:

$$A_k = k\frac{X_k \operatorname{sh}\alpha_k t_1 - Y_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}, \qquad B_k = k\frac{X_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - Y_k \operatorname{sh}\alpha_k t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \tag{1.2}$$

$$b(t) = \frac{1}{4\operatorname{sh} t_1}\left[X_0\left(2te^{t_1 - t} - e^{-(t_1 - t)}\right) + Y_0\left(e^t - 2te^{-t}\right)\right], \; C_k = D_k = 0$$

где X_k и Y_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются из системы парных рядов-уравнений

$$\begin{cases} \lambda X_0 - \mu Y_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(1 - N_k^{+}) X_k - M_k Y_k\right]\cos\alpha_k\varphi = f_1^*(\varphi) & (0 \leqslant \varphi \leqslant \overline{\varphi}_0) \\ X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k X_k \cos\alpha_k\varphi = f_2^*(\varphi) & (\overline{\varphi}_0 < \varphi \leqslant \varphi_1) \end{cases}$$

$$\tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \lambda Y_0 - \mu X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(1 - N_k^{-}) Y_k - M_k X_k\right]\cos\alpha_k\varphi = f_3^*(\varphi) & (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0) \\ Y_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k Y_k \cos\alpha_k\varphi = f_4^*(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi \leqslant \varphi_1) \end{cases}$$

где введены обозначения

$$f_{1,3}^*(\varphi) = \mp \frac{maE}{2(1-\sigma^2)} f_{1,3}(\varphi), \quad f_2^*(\varphi) = a^2 f_2(\varphi), \quad f_4^*(\varphi) = a^2 e^{t_1} f_4(\varphi)$$

$$N_k^{\pm} = 1 \mp \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\sigma_0 (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1) \pm 2^{-1} \alpha_k (\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}$$

$$M_k = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 + \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}, \quad \sigma_0 = \frac{1 - 2\sigma}{2(1-\sigma)} \tag{1.4}$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{-t_1}}{2(1-\sigma) m \operatorname{sh} t_1}, \quad \mu = \frac{1}{2m \operatorname{sh} t_1}$$

σ — коэффициент Пуассона.

Введем обозначения

$$g_i(x) = f_i^*(\varphi), \quad x = \frac{\pi\varphi}{\varphi_1} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \quad \gamma = \frac{\pi\overline{\varphi}_0}{\varphi_1}, \quad \beta = \frac{\pi\varphi_0}{\varphi_1} \tag{1.5}$$

Пользуясь известными решениями парных рядов-уравнений по косинусам [8, 9], уравнения (1.3) сводим к следующей системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} X_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{+} X_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{+} Y_k + c_n \\ Y_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{-} Y_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{-} X_k + c_n^* \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

где

$$a_{nk}^{\pm} = \frac{1}{2} k N_k^{\pm} I_{nk} \left[\frac{(\gamma+\beta) \pm (\gamma-\beta)}{2} \right]$$

$$b_{nk}^{\pm} = \frac{1}{2} k M_k I_{nk} \left[\frac{(\gamma+\beta) \pm (\gamma-\beta)}{2} \right]$$

$$c_n = X_0 \frac{y_n(\cos\gamma)}{n} + \frac{1}{2} \int_0^{\gamma} F_1(\theta) z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta + $$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\pi} F_2(\theta) z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta$$

$$c_n^* = Y_0 \frac{y_n(\cos\beta)}{n} + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} F_3(\theta) z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta + \tag{1.7}$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\pi} F_4(\theta) z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta$$

$$I_{nk}(\alpha)=\int_0^{\alpha} z_k(\cos\theta)\, z_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\, d\theta \tag{1.7}$$

$$y_n(x)=P_{n-1}(x)+P_n(x),\quad z_n(x)=P_{n-1}(x)-P_n(x)$$

$$F_{1,3}(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{tg}\theta/2\,\frac{d}{d\theta}\int_0^{\theta}\frac{g_{1,3}(x)\cos x/2\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$F_{2,4}(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{g_{2,4}(x)\sin x/2\,dx}{(\cos\theta-\cos x)^{1/2}}$$

$P_n(x)$ — полином Лежандра.

Постоянные X_0 и Y_0 будем определять из следующих уравнений:

$$(\lambda-2\ln\sin\gamma/2)\,X_0-\mu Y_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(N_k^{+}X_k+M_kY_k)\,y_k(\cos\gamma)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\gamma}F_1(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\pi}F_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta+g_1(0)$$

$$\tag{1.8}$$

$$(\lambda-2\ln\sin\beta/2)\,Y_0-\mu X_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(N_k^{-}Y_k+M_kX_k)\,y_k(\cos\beta)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\beta}F_3(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\pi}F_4(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta+g_3(0)$$

которые получаются из первого и третьего уравнений системы (1.3).

Неизвестные X_k и Y_k, определенные из бесконечных систем (1.6), выражаются через X_0 и Y_0. Подставляя найденные из (1.6) значения X_k и Y_k в (1.8) и разрешая полученную систему относительно X_0 и Y_0, находим их значения.

Исследуем первую бесконечную систему из (1.6). Учитывая, что $N_k^{\pm}=O(k^{-1})$ и $M_k=o(N_k^{-})$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}^{+}|<4\sigma_0\frac{1+\ln 4n}{mn},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|b_{nk}^{+}|\leqslant 8\,me^{-mt_1}\operatorname{sh}t_1\frac{1+\ln n}{n^{3/2}} \tag{1.9}$$

Каждая из полученных оценок при $n\to\infty$ стремится к нулю. Аналогичные оценки получаются и для второй системы (1.6). Следовательно, система (1.6) квази-вполне регулярна. Из (1.7) видно, что свободные члены систем (1.6) при возрастании индекса стремятся к нулю, как $c_n,\ c_n^{*}=o(n^{-3/2})$.

Выведем теперь удобные формулы для вычисления контактных напряжений σ_r и σ_φ. Пользуясь бесконечной системой (1.6) и значением ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k(\cos\theta)\sin kx = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin x/2}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} & (x<\theta) \\ 0 & (x>\theta) \end{cases} \tag{1.10}$$

для этих напряжений получим следующие окончательные выражения:

$$a^2\sigma_r(0,\ \varphi) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} kX_k\cos\alpha_k\varphi = \frac{\sqrt{2}\cos x/2}{2}\left[\int_x^{\gamma}\frac{F_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}} + \right.$$

$$+\int_{\gamma}^{\pi}\frac{F_2'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}} - \frac{H_1\sqrt{2}}{\sqrt{\cos x-\cos\gamma}} + \tag{1.11}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} k^2(N_k^+X_k + M_kY_k)\int_x^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}\right] \quad \begin{pmatrix} 0<\varphi<\overline{\varphi}_0 \\ 0<x<\gamma \end{pmatrix}$$

$$a^2\sigma_\varphi(0,\ \varphi) = a^2\sigma_r(0,\ \varphi) + \chi_1(\varphi) \quad (0<\varphi<\overline{\varphi}_0) \tag{1.12}$$

где

$$\chi_1(\varphi) = \frac{Y_0}{\operatorname{sh} t_1} - (1+\operatorname{cth} t_1)X_0 +$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\alpha_k\operatorname{sh} t_1(X_k\alpha_k\operatorname{sh} t_1 - Y_k\operatorname{sh}\alpha_k t_1)}{\operatorname{sh}^2\alpha_k t_1 - \alpha_k^2\operatorname{sh}^2 t_1}\cos\alpha_k\varphi \tag{1.13}$$

и представляет собой ограниченную и непрерывную функцию. Совершенно аналогично для контактных напряжений σ_r и σ_φ на внешнем контуре получим

$$a^2e^{t_1}\sigma_r(t_1,\ \varphi) = \frac{\sqrt{2}\cos x/2}{2}\left[\int_x^{\beta}\frac{F_3'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}} + \int_{\beta}^{\pi}\frac{F_4'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}} - \right.$$

$$\left. -\frac{H_2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos x-\cos\beta}} + \sum_{k=1}^{\infty}k^2(N_k^-Y_k + M_kX_k)\int_x^{\beta}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}\right] \tag{1.14}$$

$$\begin{pmatrix} 0<\varphi<\varphi_0 \\ 0<x<\beta \end{pmatrix}$$

$$a^2e^{t_1}\sigma_\varphi(t_1,\ \varphi) = a^2e^{t_1}\sigma_r(t_1,\ \varphi) + \chi_2(\varphi) \quad (0<\varphi<\varphi_0) \tag{1.15}$$

где

$$\chi_2(\varphi)=-\frac{X_0}{\operatorname{sh} t_1}+(\operatorname{cth} t_1-1)\,Y_0+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\alpha_k\operatorname{sh} t_1\,(Y_k\alpha_k\operatorname{sh} t_1-X_k\operatorname{sh}\alpha_k t_1)}{\operatorname{sh}^2\alpha_k t_1-\alpha_k^2\operatorname{sh}^2 t_1}\cos\alpha_k\varphi \tag{1.16}$$

В формулах (1.11) и (1.14) коэффициенты при особенностях имеют вид

$$H_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k\,(N_k^+X_k+M_kY_k)\,z_k(\cos\gamma)+F_1(\gamma)-F_2(\gamma)-2X_0\right]$$

$$\tag{1.17}$$

$$H_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k\,(N_k^-\,Y_k+M_kX_k)\,z_k(\cos\beta)+F_3(\beta)-F_4(\beta)-2Y_0\right]$$

Напряжения σ_r и σ_φ сначала выражаются медленно (условно) сходящимися тригонометрическими рядами. После выделения особенностей в этих выражениях появляются новые ряды по функциям $z_k(x)$, которые сходятся уже намного быстрее (абсолютно).

Аналогично, для радиальных перемещений вне области контакта к окчательно получим

$$-\frac{maE}{2(1-\sigma^2)}\,u(0,\ \varphi)=\lambda X_0-\mu Y_0+\sum_{k=1}^{\infty}[(1-N_k^+)\,X_k-M_kY_k]\cos kx=$$

$$=g_1(0)-2X_0\ln\frac{\sqrt{2}\sin x/2+\sqrt{\cos\gamma-\cos x}}{\sqrt{2}\sin\gamma/2}-$$

$$-\frac{\sqrt{2}\sin x/2}{2}\left[\int_0^{\gamma}\frac{F_1(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}+\int_{\gamma}^{x}\frac{F_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}k\,(N_k^+X_k+M_kY_k)\int_{\gamma}^{x}\frac{z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}\right]\quad\begin{pmatrix}\varphi_0<\varphi<\varphi_1\\ \gamma<x<\pi\end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$\frac{maE}{2(1-\sigma^2)}\,u(t_1,\ \varphi)=\lambda Y_0-\mu X_0+\sum_{k=1}^{\infty}[(1-N_k^-)\,Y_k-M_kX_k]\cos kx=$$

$$=g_2(0)-2Y_0\ln\frac{\sqrt{2}\sin x/2+\sqrt{\cos\beta-\cos x}}{\sqrt{2}\sin\beta/2}-$$

$$-\frac{\sqrt{2}\sin x/2}{2}\left[\int_0^{\beta}\frac{F_3(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}+\int_{\beta}^{x}\frac{F_4(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}-\right.$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k^- Y_k + M_k X_k) \int_{\beta}^{x} \frac{z_k (\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} \Bigg] \quad \begin{pmatrix} \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \\ \beta < x < \pi \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Расчеты, производимые по преобразованным формулам (1.11), (1.14), (1.18), (1.19), дают большую точность ввиду хорошей сходимости рядов и того, что интегралы, входящие в них, легко вычисляются для каждого фиксированного k.

2. Рассмотрим теперь вторую задачу для кругового кольца, когда штампы внутреннего и внешнего контуров расположены в шахматном порядке.

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\tau_{r\varphi}(0, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) = 0 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$$

$$u(0, \varphi) = f_1(\varphi) \ (\bar{\varphi}_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1), \ \sigma_r(0, \varphi) = f_2(\varphi) \ (0 \leqslant \varphi < \bar{\varphi}_0) \tag{2.1}$$

$$u(t_1, \varphi) = f_3(\varphi) \ (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0), \quad \sigma_r(t_1, \varphi) = f_4(\varphi) \ (\varphi_0 < \varphi \leqslant \varphi_1)$$

Функцию Эйри ищем в виде (0.1). Тогда коэффициенты $A_k - D_k$ и функция $b(t)$ будут определяться по формулам (1.2), где неизвестные X_k и Y_k должны определяться из бесконечных систем (1.6), причем в (1.6) коэффициенты a_{nk}^-, b_{nk}^- и c_n^* определяются по формулам (1.7), а коэффициенты a_{nk}^+, b_{nk}^+ и c_n будем определять уже по следующим формулам:

$$a_{nk}^+ = \frac{1}{2} k N_k^+ I_{n'}(\gamma), \qquad b_{nk}^+ = \frac{1}{2} k M_k I_{nk}^*(\gamma)$$

$$c_n = - X_0 \frac{z_n(\cos\gamma)}{n} + \frac{1}{2} \int_0^{\gamma} F_2(\theta) \, y_n(\cos\theta) \operatorname{tg} \theta/2 \, d\theta + \tag{2.2}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\pi} F_1(\theta) \, y_n(\cos\theta) \operatorname{tg} \theta/2 \, d\theta$$

где

$$I_{nk}^*(\gamma) = \int_{\gamma}^{\pi} y_k(\cos\theta) \, y_n(\cos\theta) \operatorname{tg} \theta/2 \, d\theta$$

$$F_1(\theta) = - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{ctg} \theta/2 \, \frac{d}{d\theta} \int_{\theta}^{\pi} \frac{g_1(x) \sin x/2 \, dx}{(\cos\theta - \cos x)^{1/2}} \tag{2.3}$$

$$F_2(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{g_2(x) \cos x/2 \, dx}{(\cos x - \cos\theta)^{1/2}}$$

Для определения постоянных X_0 и Y_0 получается система (1.8), где вместо первого уравнения будем иметь

$$(\lambda - 2\ln\cos\gamma/2)\,X_0 - \mu Y_0 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(N_k^+ X_k + M_k Y_k)\,z_k(\cos\gamma) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\gamma}F_2(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\pi}F_1(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta + g_1(\pi) \tag{2.4}$$

Аналогично тому, как это сделано в первой задаче, получены формулы для контактных напряжений и радиальных перемещений вне штампов, причем на внешнем контуре эти формулы остаются прежними (1.14) и (1.19), а на внутреннем контуре имеем

$$a^2\sigma_r(0,\ \varphi) = \frac{\sqrt{2}\sin x/2}{2}\Bigg[\int_{\gamma}^{x}\frac{F_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} + \int_0^{\gamma}\frac{F_2'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} +$$

$$+\frac{H_1^*\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\gamma - \cos x}} - \sum_{k=1}^{\infty}k^2(N_k^+X_k + M_kY_k)\int_{\gamma}^{x}\frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}}\Bigg] \tag{2.5}$$

$$\begin{pmatrix}\overline{\varphi}_0 < \varphi < \varphi_1\\ \gamma < x < \pi\end{pmatrix}$$

$$-\frac{maE}{2(1-\sigma^2)}\,u(0,\ \varphi) = g_1(\pi) - 2X_0\ln\frac{\sqrt{2}\cos x/2 + \sqrt{\cos x - \cos\gamma}}{\sqrt{2}\cos\gamma/2} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}\cos x/2}{2}\Bigg[\int_{\gamma}^{\pi}\frac{F_1(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \int_x^{\gamma}\frac{F_2(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k(N_k^+X_k + M_kY_k)\int_x^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}\Bigg] \qquad \begin{pmatrix}0 < \varphi < \overline{\varphi}_0\\ 0 < x < \gamma\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

где

$$H_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty}k(N_k^+X_k + M_kY_k)\,y_k(\cos\gamma) + F_1(\gamma) - F_2(\gamma) + 2X_0\Bigg] \tag{2.7}$$

Напряжения $\sigma_\varphi(t,\ \varphi)$ определяются по формулам, приведенным в первой задаче.

Силы, действующие на внутренний (P_1) и внешний (P_2) штампы, вычисляются по формулам

Таблица 1 (I вариант)

φ	$\frac{1}{c_1} u_1(0, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{Ec_1} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2} \sigma_r^{(2)}(0, \varphi)$
0°	−0.042	−0.916	50°	0; −∞	0; −∞
5°	−0.034	−0.903	50°15′	−3.344	−0.404
10°	−0.009	−0.860	50°30′	−2.324	−0.224
15°	0.036	−0.787	50°45′	−1.866	−0.133
20°	0.103	−0.686	51°	−1.589	−0.072
25°	0.193	−0.563	52°	−1.049	−0.067
30°	0.303	−0.428	53°	−0.802	0.145
35°	0.430	−0.295	54°	−0.652	0.199
40°	0.569	−0.175	55°	−0.552	0.239
45°	0.723	−0.078	56°	−0.481	0.269
46°	0.757	−0.062	57°	−0.432	0.290
47°	0.794	−0.047	58°	−0.400	0.305
48°	0.836	−0.033	59°	−0.381	0.314
49°	0.886	−0.020	60°	−0.375	0.316
50°	1.000	0.000			

Таблица 2 (I вариант)

φ	$\frac{a}{Ec_1} \sigma_r^{(1)}(t_1, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2} \sigma_r^{(2)}(t_1, \varphi)$	φ	$\frac{2}{c_1} u_1(t_1, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(t_1, \varphi)$
0°	0.200	−0.074	20°	0.000	−1.000
5°	0.182	−0.104	21°	0.053	−0.860
10°	0.125	−0.202	22°	0.079	−0.799
15°	−0.001	−0.424	23°	0.103	−0.750
16°	−0.045	−0.507	24°	0.126	−0.707
17°	−0.103	−0.623	25°	0.149	−0.668
18°	−0.191	−0.809	30°	0.265	−0.503
19°	−0.363	−1.208	35°	0.388	−0.365
19°15′	−0.446	−1.414	40°	0.512	−0.251
19°30′	−0.580	−1.754	45°	0.628	−0.160
19°45′	−0.867	−2.512	50°	0.722	−0.095
20°	−∞; 0	−∞; 0	55°	0.784	−0.057
			60°	0.805	−0.044

Талица 3 (II вариант)

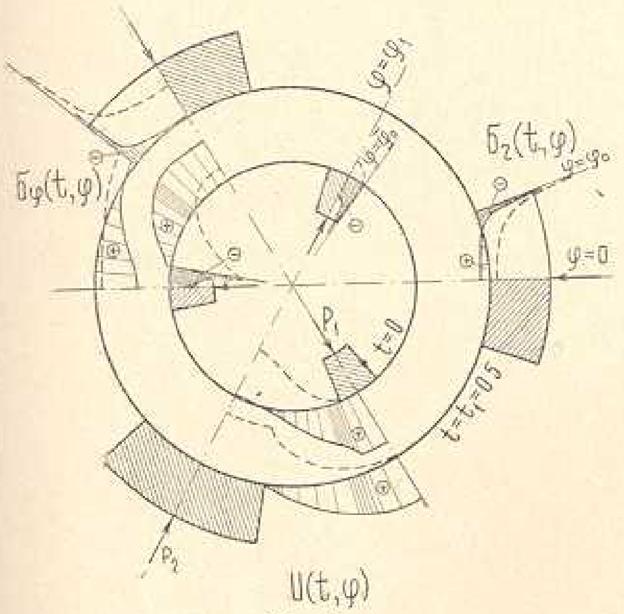
φ	$\frac{1}{c_1}u_1(0,\varphi)$	$\frac{1}{c_2}u_2(0,\varphi)$	φ	$\frac{a}{Ec_1}\sigma_r^{(1)}(0,\varphi)$	$\frac{a}{Ec_2}\sigma_r^{(2)}(0,\varphi)$
0°	0.803	−0.184	8°	−1.608	−1.451
1°	0.809	−0.178	9°	−1.515	−1.352
2°	0.830	−0.159	10°	−1.439	−1.268
3°	0.870	−0.120	15°	−1.140	−0.914
4°	1.000	0.000	20°	−0.888	−0.596
φ	$\frac{a}{Ec_1}\sigma_r^{(1)}(0,\varphi)$	$\frac{a}{Ec_2}\sigma_r^{(2)}(0,\varphi)$	25°	−0.680	−0.328
4°	0; −∞	0; −∞	30°	−0.529	−0.129
4°15′	−4.422	−4.103	35°	−0.433	−0.001
4°30′	−3.251	−3.012	40°	−0.382	0.071
4°45′	−2.752	−2.545	45°	−0.361	0.103
5°	−2.464	−2.277	50°	−0.357	0.114
6°	−1.950	−1.790	55°	−0.359	0.117
7°	−1.740	−1.581	60°	−0.361	0.117

Таблица 4 (II вариант)

φ	$\frac{a}{Ec_1}\sigma_r^{(1)}(t_1,\varphi)$	$\frac{a}{Ec_2}\sigma_r^{(2)}(t_1,\varphi)$	φ	$\frac{1}{c_1}u_1(t_1,\varphi)$	$\frac{1}{c_2}u_2(t_1,\varphi)$
0°	−0.726	−0.964	12°	0.000	−1.000
5°	−0.784	−1.037	13°	0.168	−0.781
6°	−0.816	−1.078	14°	0.235	−0.694
7°	−0.861	−1.135	15°	0.283	−0.631
8°	−0.927	−1.220	20°	0.430	−0.443
9°	−1.030	−1.353	25°	0.506	−0.344
10°	−1.212	−1.589	30°	0.550	−0.287
11°	−1.647	−2.154	35°	0.575	−0.254
11°15′	−1.882	−2.460	40°	0.588	−0.237
11°30′	−2.281	−2.980	45°	0.594	−0.228
11°45′	−3.192	−4.168	50°	0.595	−0.226
12°	−∞; 0	−∞; 0	55°	0.595	−0.226
			60°	0.594	−0.226

Таблица 5 (I вариант)

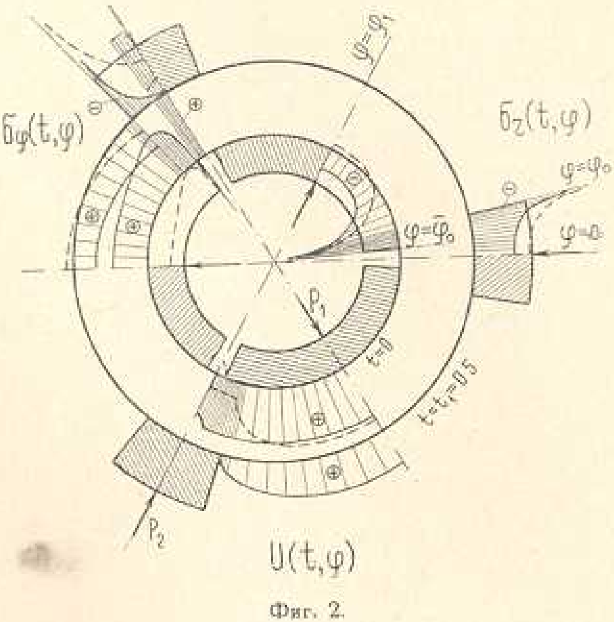
φ	$\frac{a}{Ec_1}\sigma_\varphi^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2}\sigma_\varphi^{(2)}(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{Ec_1}\sigma_\varphi^{(1)}(t_1, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2}\sigma_\varphi^{(2)}(t_1, \varphi)$
0°	0.803	0.241	0°	0.040	−0.578
5°	0.815	0.240	5°	0.025	−0.598
10°	0.840	0.221	10°	−0.017	−0.664
15°	0.855	0.149	15°	−0.115	−0.834
20°	0.834	−0.003	16°	−0.152	−0.904
25°	0.763	−0.227	17°	−0.202	−1.006
30°	0.646	−0.483	18°	−0.281	−1.178
35°	0.500	−0.726	19°	−0.444	−1.562
40°	0.345	−0.927	20°	$-\infty$; −0.070	$-\infty$; −0.339
45°	0.200	−1.077	21°	−0.059	−0.323
50°	0.081; $-\infty$	−1.180; $-\infty$	22°	−0.046	−0.307
51°	−1.527	−1.267	23°	−0.033	−0.290
52°	−1.005	−1.132	24°	−0.019	−0.272
53°	−0.773	−1.075	25°	−0.004	−0.255
54°	−0.637	−1.031	30°	0.088	−0.164
55°	−0.549	−1.000	35°	0.206	−0.076
56°	−0.488	−0.977	40°	0.347	0.001
57°	−0.446	−0.961	45°	0.497	0.059
58°	−0.420	−0.950	50°	0.632	0.096
59°	−0.404	−0.943	55°	0.724	0.115
60°	−0.399	−0.942	60°	0.757	0.120



Фиг. 1.

Таблица 6 (II вариант)

φ	$\frac{a}{Ec_1}\sigma_\varphi^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2}\sigma_\varphi^{(2)}(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{Ec_1}\sigma_\varphi^{(1)}(t_1, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2}\sigma_\varphi^{(2)}(t_1, \varphi)$
0°	2.617	1.660	0°	−0.042	−0.694
1°	2.614	1.656	5°	−0.097	−0.767
2°	2.605	1.645	6°	−0.128	−0.808
3°	2.590	1.625	7°	−0.172	−0.865
4°	2.569; $-\infty$	1.580; $-\infty$	8°	−0.238	−0.953
5°	0.078	−0.714	9°	−0.341	−1.088
6°	0.560	−0.269	10°	−0.523	−1.326
7°	0.737	−0.109	11°	−0.959	−1.894
8°	0.823	−0.034	12°	$-\infty$; 0.686	$-\infty$; 0.256
9°	0.869	0.003	13°	0.684	0.251
10°	0.883	0.020	14°	0.681	0.245
15°	0.889	−0.022	15°	0.677	0.239
20°	0.817	−0.127	20°	0.649	0.196
25°	0.747	−0.222	25°	0.607	0.140
30°	0.698	−0.284	30°	6.562	0.080
35°	0.671	−0.316	35°	0.517	0.023
40°	0.658	−0.329	40°	0.479	−0.026
45°	0.650	−0.334	45°	0.449	−0.064
50°	0.645	−0.336	50°	0.428	−0.092
55°	0.642	−0.335	55°	0.415	−0.108
60°	0.640	−0.334	60°	0.411	−0.113



Фиг. 2.

$$P_1 = 2a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sigma_r(0,\ \varphi)\cos(\varphi_1-\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{a}\Big\{X_0\left[\sin(\varphi_1-\overline{\varphi}_0)+\overline{\varphi}_0\cos(\varphi_1-\overline{\varphi})\right]-$$

$$-\frac{\varphi_1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}X_k\,\frac{\alpha_k\cos\alpha_k\overline{\varphi}_0\sin(\varphi_1-\overline{\varphi}_0)+\sin\alpha_k\overline{\varphi}_0\cos(\varphi_1-\overline{\varphi}_0)}{\alpha_k^2-1}\Big\}$$

$$P_2 = 2ae^{t_1}\int_0^{\varphi_2}\sigma_r(t_1,\ \varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{a}\Big\{Y_0\left[\sin\varphi_0+(\varphi_1-\varphi_0)\cos\varphi_0\right]+$$

$$+\frac{\varphi_1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\frac{\sin\alpha_k\varphi_0\cos\varphi_0-\alpha_k\cos\alpha_k\varphi_0\sin\varphi_0}{\alpha_k^2-1}\Big\}$$

3. Для численной иллюстрации эффективности приведенного решения выбран случай шахматного расположения штампов (по три на каждом из контуров), причем произведены числовые расчеты для двух значений γ и β соответственно для внутреннего и внешнего штампов:

$$\text{I вариант} - \gamma = 150^\circ\ (\varphi_1-\overline{\varphi}_0 = 10^\circ),\quad \beta = 60^\circ\ (\varphi_0 = 20^\circ)$$

$$\text{II вариант} - \gamma = 12^\circ\ (\varphi_1-\overline{\varphi}_0 = 56^\circ),\quad \beta = 36^\circ\ (\varphi_0 = 12^\circ)$$

В обоих случаях коэффициент Пуассона $\sigma = 0.25$ ($\sigma_0 = 1/3$), $f_1(\varphi) = c_1$, $f_3(\varphi) = -c_2$, $f_2(\varphi) = f_4(\varphi) = 0$, $t_1 = 0.5$ ($R_{\text{внеш.}} = 1.65\,R_{\text{внутр.}}$). Все полученные числовые значения выражаются через произвольные постоянные c_1 и c_2 (например, $\sigma_r = \sigma_r^{(1)}(c_1)+\sigma_r^{(2)}(c_2)$).

Результаты вычислений контактных напряжений σ_r, напряжений σ_φ, а также радиальных перемещений вне штампов приведены в табл. 1—6, а также в виде графиков (фиг. 1, 2), причем сплошными линиями на фигурах 1 (I вариант) и 2 (II вариант) показаны графики для случая, когда $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а пунктирными — когда $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Коэффициенты при особенностях H_1^* и H_2, вычисленные по формулам (2.7) и второй из (1.17), будут соответственно равны для каждого из рассмотренных вариантов:

1) $H_1^* = -0.285\,c_1 - 0.041\,c_2,\quad H_2 = 0.185\,c_1 + 0.515\,c_2$

2) $H_1^* = -2.116\,c_1 - 1.966\,c_2,\quad H_2 = 0.480\,c_1 + 0.627\,c_2$

а силы, действующие на штампы (2.8), получаются равными соответственно

1) $P_1 = 0.360\,c_1 - 0.052\,c_2,\quad P_2 = -0.008\,c_1 + 0.132\,c_2$

2) $P_1 = 1.156\,c_1 + 0.546\,c_2,\quad P_2 = 0.428\,c_1 + 0.563\,c_2$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 12 V 196

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Վ. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵԿ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է շրջանային օղակի համար հարթ կոնտակտային խնդիրը, երբ օղակի արտաքին ու ներքին եզրագծերի վրա առանց շփման ազդում են $m > 1$ միատեսակ կոշտ դրոշմներ: Դիտարկված են երկու դեպք 1) արտաքին ու ներքին եզրագծերի վրա ազդող դրոշմները դասավորված են դեմ-դիմաց և 2) շախմատաձև:

Խնդիրը բերվում է զույգ շարք-հավասարումների սիստեմին, որը իր հերթին բերվում է լիովին ռեգուլյար գծային անվերջ հավասարումների:

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների և շառավղային տեղափոխումների համար:

ON A PLANE CONTACT PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR RING

A. H. BABLOYAN, V. G. SAHAKIAN

S u m m a r y

The paper presents a solution of a plane deformation problem for a circular ring in the case of $m > 1$ similar punches acting symmetrically on both internal and external boundaries of the ring.

Two cases of mutual juxtaposition are considered:

1) Where the internal and external punches are opposite each other,

2) Where they are arranged alternately.

The problem is reduced to the solution of a dual trigonometric series system, which subsequently is reduced to a quite-regular infinite system of linear algebraic equations.

Suitable formulas have been obtained to calculate contact stresses (with the singularity taken out) and radial displacement.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
2. *Тамата Осаму, Камада Такэси.* Некоторые смешанные граничные задачи для упругих круглых плит. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 30, № 217, 1964, 1220—1227.
3. *Тамата Осаму, Сугиура Кацуо.* О контактной задаче для упругого кругового кольца, ч. 1. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 32, № 233, 1966, 59—65.

4. *Тамато Осаму, Сугиура Кацуо.* О контактной задаче для упругого кругового кольца, ч. II. Нихон кикай гаккай ромбунсю, *Trans. Japan. Soc., Mech. Engrs.*, 32, № 243, 1966, 1668—1674.
5. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
6. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 5, 1967, 3—20.
7. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 15, № 1, 1962.
8. *Srivastav R. P.* Dual Relations involving Trigonometric Series. Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A), vol. 66, pt. III, 1964, 173—184.
9. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости, ПММ, т. 31, вып. 2, 1967.