

В. Н. МОСКАЛЕНКО

К ТЕОРИИ СИЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

На основе модели сильно изотропного микронеоднородного тела [1, 2], обобщенной на обратные тензоры, вычисляются макроскопические постоянные композитных материалов. Рассматриваются механические смеси из произвольного числа, вообще говоря, анизотропных компонентов. Вычисляются макроскопические постоянные в задачах теплопроводности, упругости и термоупругости. В отличие от работ [1, 2] в качестве основных используются уравнения совместности потоков тепла или напряжений.

1. Принципиальные трудности, возникающие при построении полной системы многоточечных корреляционных функций вынуждают исследователей применять приближенные методы [3—6] или ограничиваться низшими приближениями в различных модификациях метода возмущений [7, 8]. Определенные перспективы открывают введение моделей микронеоднородных сред [1, 2, 9—11], для которых возможно суммирование бесконечных рядов метода возмущений.

Введенная в работах [1, 2] модель сильно изотропного материала связана с видом исходного уравнения. Ниже показано, что в общем случае окончательные результаты меняются, если в качестве исходных принять уравнения совместности. Вопрос о дальнейшем изучении связи различных способов ввода понятия сильной изотропии оставляем открытым. Можно ожидать, что оба способа приводят к точным решениям для некоторых не пересекающихся классов структур. Как будет показано, в частном случае, когда макроскопические постоянные не зависят от структуры (задача Хилла), оба способа приводят к одинаковым результатам. В частном случае упругих постоянных для смеси из двух изотропных компонентов оба способа приводят к выражениям для постоянных, удовлетворяющих оценкам Хашина-Штрикмана.

Рассмотрим неограниченную среду с микронеоднородной структурой. Пусть вектор или тензор σ , характеризующий состояние среды, удовлетворяет системе уравнений

$$L\sigma = 0, \quad M\sigma = 0 \quad (1.1)$$

Оператор L может быть представлен в виде произведения $L = N\kappa$ детерминированного дифференциального оператора N и оператора умножения на тензор κ и свертки по индексам. Компоненты тензора κ по

предположению образуют случайное однородное поле. Дифференциальный тензор M детерминирован.

В задаче теплопроводности уравнения $L\sigma = 0$ являются системой уравнений совместности тепловых потоков, а $M\sigma = 0$ выражает уравнение теплопроводности. В линейной теории упругости уравнения $L\sigma = 0$ совпадают с уравнениями совместности напряжений, а $M\sigma = 0$ — с уравнениями равновесия при отсутствии объемных сил. В задаче термоупругости вместо уравнений (1.1) получаем

$$N(\alpha\sigma + \alpha^b) = 0, \quad M\sigma = 0 \quad (1.2)$$

Здесь α — случайный тензор постоянных линейного температурного расширения, θ — приращение температуры относительно некоторого начального состояния. В связи с тем, что уравнения (1.1) являются частным случаем (1.2), будем исходить из уравнений (1.2). Задача состоит в вычислении макроскопических характеристик α_* , α_* при заданных постоянных в пространстве математических ожидания $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \theta \rangle$ из условия

$$\langle \alpha\sigma + \alpha^b \rangle = \alpha_* \langle \sigma \rangle + \alpha_* \langle \theta \rangle \quad (1.3)$$

и из условия $\theta \equiv \langle \theta \rangle$.

Разобьем тензор α и вместе с ним оператор L на сумму математического ожидания и флуктуационной составляющей

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad L = L' + L'', \quad \alpha' = \langle \alpha \rangle, \quad L' = N \langle \alpha \rangle$$

Решение уравнений (1.2) будет

$$\sigma = \langle \sigma \rangle - KN(\alpha''\sigma + \alpha''\theta)$$

Здесь K — оператор, обратный оператору $-L'$ и подобранный из условия, что соответствующая функция Грина удовлетворяет дополнительному уравнению типа $M\sigma = 0$. Полагая $\sigma = \sigma' + \sigma''$, находим для флуктуационной составляющей уравнение

$$\sigma'' + KN(\alpha''\sigma' + \alpha''\sigma'' + \alpha''\theta) = 0 \quad (1.4)$$

Отсюда вытекает, что существуют тензоры A и B с математическими ожиданиями, равными нулю, такие, что

$$\sigma'' = A \langle \sigma \rangle + B \langle \theta \rangle$$

Введем обозначения

$$\alpha_{**} = \alpha''A, \quad \alpha_{**} = \alpha''B$$

С учетом (1.3) находим

$$\alpha_* = \alpha' + \langle \alpha_{**} \rangle, \quad \alpha_* = \alpha' + \langle \alpha_{**} \rangle \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.4) с учетом независимости величин $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \theta \rangle$ получаем уравнения

$$\alpha_{**} + \alpha'' KN (\alpha'' + \alpha_{**}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha_{**} + \alpha'' KN (\alpha'' + \alpha_{**}) = 0 \quad (1.7)$$

2. Введем условия сильной изотропии среды. Будем считать, что двухточечные корреляционные функции вида

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(r) \cdots \alpha''(r) \alpha''(r + \rho) \rangle &= \varphi(\rho) \\ \langle \alpha''(r) \cdots \alpha''(r) \alpha_{**}(r + \rho) \rangle &= \psi(\rho) \\ \langle \alpha''(r) \cdots \alpha''(r) \alpha''(r + \rho) \rangle &= \xi(\rho) \\ \langle \alpha''(r) \cdots \alpha''(r) \alpha_{**}(r + \rho) \rangle &= \eta(\rho) \end{aligned} \quad (2.1)$$

являются изотропными и, кроме того, зависят только от расстояния между точками и не зависят от направляющих косинусов. Применим операцию математического ожидания к уравнению (1.6)

$$\langle \alpha_{**}(r) \rangle + KN [\langle \alpha''(r) \alpha''(r + \rho) \rangle + \langle \alpha''(r) \alpha_{**}(r + \rho) \rangle] = 0$$

Интегрируя полученное уравнение с учетом условий сильной изотропии (2.1), получаем

$$\langle \alpha_{**} \rangle + \langle \alpha'' P \alpha'' \rangle + \langle \alpha'' P \alpha_{**} \rangle = 0 \quad (2.2)$$

Здесь P — оператор умножения на изотропный числовой тензор и свертывания по индексам. Входящий в (2.2) комплекс $\langle \alpha'' P \alpha_{**} \rangle$ может быть вычислен из уравнения (1.6) и условий сильной изотропии

$$\langle \alpha'' P \alpha_{**} \rangle + \langle (\alpha'' P)^2 \alpha'' \rangle + \langle (\alpha'' P)^2 \alpha_{**} \rangle - \langle (\alpha'' P)^2 \rangle \langle \alpha_{**} \rangle = 0$$

Повторяя процесс, находим

$$\langle (\alpha'' P)^{n-1} \alpha_{**} \rangle + \langle (\alpha'' P)^n \alpha'' \rangle + \langle (\alpha'' P)^n \alpha_{**} \rangle - \langle (\alpha'' P)^n \rangle \langle \alpha_{**} \rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Отсюда для математического ожидания тензора α_{**} находим уравнение

$$\langle \alpha_{**} \rangle - CP \langle \alpha_{**} \rangle = C \quad (2.3)$$

Здесь C выражается формулой

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \langle (\alpha'' P)^n \alpha'' \rangle$$

Аналогичным образом из уравнения (1.7) и условий сильной изотропии (2.1) получаем уравнение для математического ожидания тензора α_{**}

$$\langle \alpha_{**} \rangle - DP \langle \alpha_{**} \rangle = D \quad (2.4)$$

Оператор D является суммой бесконечного ряда

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \langle (\alpha'' P)^n \alpha'' \rangle$$

3. Полученные результаты применим в задаче теплопроводности механической смеси произвольного числа N анизотропных компонентов. Уравнения (1.2) будут

$$e_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_{km} q_m) = 0, \quad \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0$$

Последнее уравнение является уравнением теплопроводности. Уравнения (1.6) принимают вид

$$x_{jk}^{**}(\mathbf{r}) + x_{ja}^*(\mathbf{r}) \int G_{ab}(\rho) e_{bcl} \frac{\partial}{\partial \xi_l} [x_{ck}^*(\mathbf{r} + \rho) + x_{ck}^{**}(\mathbf{r} + \rho)] d\rho = 0$$

Функция Грина $G_{jk}(\mathbf{r})$ дается формулой

$$G_{jk}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi x_0} e_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{r} \right), \quad x_0 = \frac{1}{3} \langle x_a \rangle$$

Вычисления показывают, что оператор P в задаче теплопроводности задается в виде $aPb = c$, если для компонентов справедливо $c_{jk} = a_{ja} p_{as} b_{sk}$, где p_{jk} — составляющие тензора

$$p_{jk} = \frac{2}{3x_0} \delta_{jk}$$

Вычислим составляющие тензора C , учитывая связь компонентов тензора x в лабораторной и кристаллографической системах координат

$$C_{jk} = -c \delta_{jk}, \quad c = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \sum_{\beta=1}^3 \frac{2c_n x_{\beta(n)}^2}{3x_0 + 2x_{\beta(n)}}$$

Здесь $x_0 + x_{\beta(n)}$ — главные значения тензора x в компоненте материала с номером n , c_n — коэффициент концентрации. Для макроскопического тензора получаем $x_{jk}^* = x_{*} \delta_{jk}$, где

$$x_{*} = x_0 \left(1 - \frac{3c}{3x_0 + 2c} \right) \quad (3.1)$$

Выражение для тензора макроскопических коэффициентов теплопроводности будет $\lambda_{jk}^* = \lambda_{*} \delta_{jk}$, где

$$\lambda_{*} = \frac{1}{x_{*}} = x_0^{-1} \left(1 - \frac{3c}{3x_0 + 2c} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

В работе [2] вместо формулы (3.2) получено

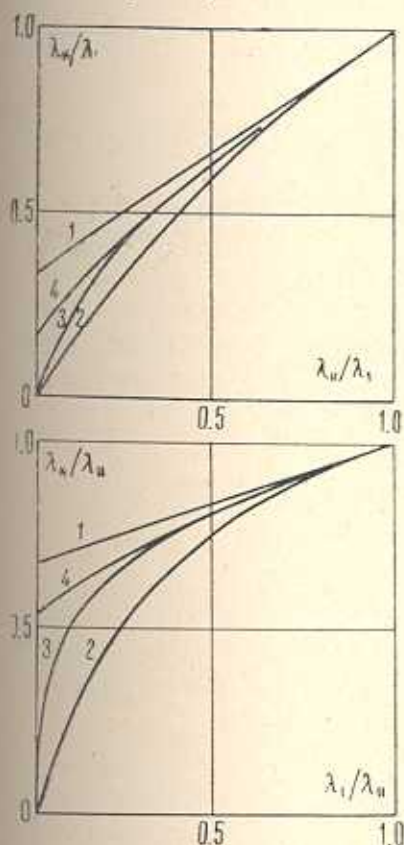
$$\lambda_{*} = \lambda_0 \left(1 - \frac{3b}{3\lambda_0 + b} \right) \quad (3.3)$$

$$b = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \sum_{\beta=1}^3 \frac{c_n x_{\beta(n)}^2}{3\lambda_0 + x_{\beta(n)}}$$

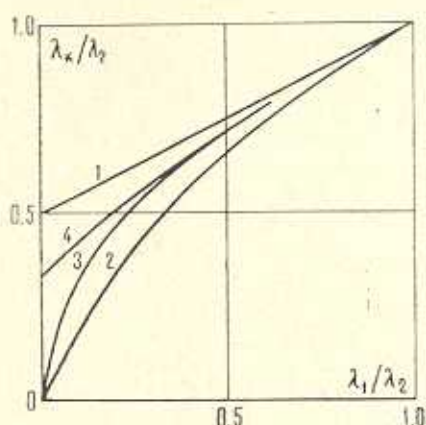
Здесь $\lambda_0 + x_{\beta(n)}$ — главные значения тензора λ в компоненте с номером n .

В общем случае формулы (3.2) и (3.3) приводят к различным результатам. Это означает, что не существует материала, сильно изотропного в смысле одновременно статьи [2] и настоящей работы. На фиг. 1 приведены результаты вычисления макроскопического коэффициента λ_* для поликристалла при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_1$, $\lambda_3 = \lambda_2$. Кривая 1 соответствует приближению Фойхта, кривая 2 — приближению Рейса;

кривая 3 вычислена по формуле (3.2), вычислениям по формуле (3.3) соответствует кривая 4. На фиг. 2 приведены результаты вычислений для смеси из двух изотропных компонентов при равных коэффициентах концентрации ($c_1 = c_2$). Интуитивные соображения подсказывают, что кривая 3 должна хорошо описывать смесь, в которой первый компонент является матрицей, а второй представляет собой вклю-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

чения. В общем же случае при $1/3 \leq \lambda_1 / \lambda_2 \leq 3$ кривые 3 и 4 практически совпадают, и различие формул (3.2) и (3.3) можно пренебречь.

4. В качестве другого примера рассмотрим задачу об определении упругих постоянных механической смеси из произвольного числа N анизотропных компонентов. Уравнения (1.2) в рассматриваемом случае имеют вид

$$e_{jlp} e_{kmg} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} (\chi_{pqrs} \tau_{rs}) = 0, \quad \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} = 0$$

Последняя группа уравнений представляет собой уравнения равновесия при отсутствии объемных сил. Тензор χ является тензором упругих податливостей. Уравнения (1.6) приводятся к виду

$$x_{jk(m)}^{**}(\mathbf{r}) + x_{jka\delta}^*(\mathbf{r}) \int G_{abcd}(\rho) e_{csp} e_{dtq} \frac{\partial^2}{\partial \xi_s \partial \xi_t} [x_{pqlm}^*(\mathbf{r} + \rho) + x_{pqlm}^{**}(\mathbf{r} + \rho)] d\rho = 0$$

Функция Грина $G_{ijklm}(\mathbf{r})$ будет

$$G_{ijklm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{32\pi q_0} \left[-\frac{s_0}{s_0 + q_0} \left(\delta_{jk} \delta_{lm} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_n^2} - \delta_{jk} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_l \partial x_m} - \delta_{lm} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_k} \right) + (e_{jlp} e_{kmq} + e_{klp} e_{jmq}) \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_p \partial x_q} - \frac{s_0}{12(s_0 + q_0)} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l \partial x_m} \right]$$

Здесь s_0, q_0 — величины, связанные с математическим ожиданием тензора податливостей

$$\langle x_{ijklm} \rangle = s_0 \delta_{jk} \delta_{lm} + q_0 (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})$$

В задаче теории упругости, как показывают вычисления, оператор P определен следующим образом: $c = aPh$, или в компонентах $c_{ijklm} = a_{jks\delta} p_{s\delta\gamma\tau} b_{\gamma\delta lmn}$. Тензор P дается формулой

$$p_{ijklm} = -\frac{1}{30 q_0} [(6g - 2) \delta_{jk} \delta_{lm} + (3 + g) (\delta_{jm} \delta_{kl} + \delta_{jl} \delta_{km})]$$

$$g = \frac{1}{2} \frac{q_0}{s_0 + q_0}$$

Обозначим через $\mathbf{x}_n = x_{ijklm(n)}$ тензоры упругих податливостей компонентов смеси, отнесенные к кристаллографическим осям. Для тензора C вычисления приводят к следующим формулам:

$$C_{ijklm} = -F \delta_{jk} \delta_{lm} - G (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})$$

$$F = \frac{1}{15} \sum_{n=1}^N c_n (2l_{jjkk(n)} - l_{jjkk(n)})$$

$$G = \frac{1}{30} \sum_{n=1}^N c_n (3l_{jjkk(n)} - l_{jjkk(n)})$$

$$\mathbf{X}_n + \mathbf{v}_n P \mathbf{X}_n = \mathbf{v}_n P \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{x}_n - \langle \mathbf{x} \rangle$$

Тензор макроскопических податливостей дается формулой

$$x_{ijklm}^* = s_* \delta_{jk} \delta_{lm} + q_* (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})$$

Макроскопические постоянные s_*, q_* имеют вид

$$s_* = s_0 - s_{**}, \quad q_* = q_0 - q_{**}$$

$$q_{**} = \frac{15 q_0 G}{15 q_0 + 2(3 + g) G} \quad (4.1)$$

$$s_{**} = \frac{q_0 \left(F + \frac{2}{3} G \right)}{q_0 + 2g \left(F + \frac{2}{3} G \right)} = \frac{2}{3} q_{**}$$

Применение формул (4.1) в случае композитного материала из двух изотропных компонентов с равными модулями $q_1 = q_2 = q$ дает

$$s_* = s_0 - \frac{c_1 c_2 (s_1 - s_2)^2}{c_1 s_2 + c_2 s_1 + q}, \quad q_* = q \quad (4.2)$$

Формулы (4.2), как легко проверить, совпадают с точным решением Хилла. В этом примере подход статьи [2] и подход данной работы приводят к совпадающим результатам. Это будет не так в общем случае, когда будет важна форма микронеоднородностей.

Например, для композитного материала из двух изотропных компонентов формулы (4.1) приводят к следующим выражениям для объемного модуля и модуля сдвига:

$$\frac{\kappa_*}{\kappa_R} = \frac{3\kappa_1 \kappa_2 + 4\kappa_1 \mu_R}{3\kappa_1 \kappa_2 + 4\kappa_R \mu_R}$$

$$\frac{\mu_*}{\mu_R} = \frac{(9 - 2g) \mu_1 \mu_2 + 2(3 + g) \mu_1 \mu_R}{(9 - 2g) \mu_1 \mu_2 + 2(3 + g) \mu_R^2}$$

Нетрудно убедиться, что полученные выражения удовлетворяют оценкам Хашина-Штрикмана [5]. Формулы работы [2] приводят к другим выражениям, которые также удовлетворяют оценкам Хашина-Штрикмана.

5. В заключение рассмотрим задачу о макроскопических коэффициентах линейного температурного расширения механической смеси из N анизотропных компонентов. В данной задаче уравнения (1.2) в компонентах записываются следующим образом:

$$e_{jlp} e_{kmq} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (\alpha_{pqrs} \tau_{rs} + \alpha_{pq} \delta) = 0, \quad \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} = 0$$

Здесь α — тензор постоянных линейного температурного расширения. Уравнения (1.6) выписаны в предыдущем параграфе. Уравнение (1.7) имеет вид

$$x_{jk}^{**}(\mathbf{r}) + x_{jkab}^*(\mathbf{r}) \int G_{abcd}(\boldsymbol{\rho}) e_{csp} e_{dtq} \frac{\partial^2}{\partial z_s \partial z_t} [x_{pq}^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) + x_{pq}^{**}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})] d\boldsymbol{\rho} = 0$$

Как показывают вычисления, тензор D имеет вид

$$D_{jk} = -b \delta_{jk}, \quad b = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N c_n \psi_{jj(n)}$$

$$\psi_n + \nu_n P \psi_n = \nu_n P \gamma_n, \quad \gamma_n = \alpha_n - \langle \alpha \rangle$$

Здесь $\alpha_n = \alpha_{jk(n)}$ — тензор постоянных температурного расширения, отнесенный к кристаллографическим координатам.

Для макроскопических постоянных находим $\alpha_{jk}^* = (\alpha_0 - \alpha_{**}) \delta_{jk}$

$$\alpha_{**} = \frac{bq_0}{q_0 + 2g \left(F + \frac{2}{3} G \right)}$$

Из полученных формул в простейшем случае вытекает интуитивно ясный результат. Если исходный тензор α изотропен и для всех компонентов смеси совпадает, то он будет совпадать и с макроскопическим.

Московский ордена Ленина
Энергетический институт

Поступила 16 IV 1969

Վ. Ն. ՄՈՍԿԱԼԵՆԿՈ

ՈՒՓԵՂ ԻԳՆՏՐՈՊԻԿԱՅԻՆ ՕԹՏՎԱՄ ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ
ՏՆՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ընդհանրացված է ստեղծվել իզոտրոպիայով օժտված բազմաբյուրեղի մոդելը ավելի լայն դասի կոմպոզիցիոն նյութերի հակադարձ տենզորների համար: Դիտարկված են մեխանիկական խառնուրդների՝ բաղկացած կամայական թվով անիզոտրոպ բաղադրիչներից: Հաշվված են մակրոսկոպիկ հաստատունները ջերմահաղորդականության և զիջուկիայի, առաձգականության և ջերմաառաձգականության խնդիրներում: Որպես հիմնական հավասարումներ, օգտագործվում են ջերմության կամ չարումների հոսքերի անխզելիության հավասարումները: Երկու իզոտրոպ բաղադրիչներից կազմված մեխանիկական խառնուրդի համար, ցույց է տրվում, որ մակրոսկոպիկ առաձգական հաստատունների համար ստացված բանաձևերը բավարարում են Պաշին-Նարիկյանի գնահատականներին:

V. N. MOSKALENKO

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF STRONG ISOTROPIC COMPOSITE MATERIALS

S u m m a r y

The model of a strong isotropic polycrystal is generalized for inverse tensors for a large class of composite materials. Mechanical mixtures of arbitrary quantity of anisotropic components are considered. Macroscopic constants are calculated in problem of heat conductivity, diffusion, elasticity, and thermoelasticity. The equations of compatibility

of heat streams or stresses are used. It is shown that in case of mechanical mixture of two isotropic components the obtained formulae for macroscopic elastic constants answer Hashin-Shtrikman's estimates.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Макроскопические характеристики микroneоднородных твердых тел. Докл. АН СССР, т. 178, № 3, 1968.
2. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Инж. ж., МТТ, № 3, 1969.
3. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Teubner-Verlag, 1910.
4. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. ZAMM, Bd 9, H. 1, 1929.
5. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach on the elastic behaviour of multi-phase materials. J. Mech. Phys. Solids, v. 11, № 2, 1963.
6. *Hill R.* A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, v. 13, № 4, 1965.
7. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов. Ж. эксперим. и теор. физ., т. 16, № 11, 1946.
8. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* К вычислению упругих модулей гетерогенных сред. АМТФ, № 3, 1968.
9. *Ставров В. П., Долих В. Я., Волков С. Д.* Об упругих постоянных хаотически армированных стеклопластиков. Мех. полим., № 2, 1967.
10. *Kröner E.* Elastic module of perfectly disordered composite materials. J. Mech. Phys. Solids, v. 15, № 5, 1967.
11. *Хорошун А. П.* К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. мех., т. 3, № 9, 1967.