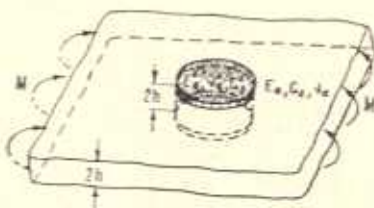


Б. А. ПЕЛЕХ, С. А. ПЕЛЕХ

### ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С ВПАЯННОЙ УПРУГОЙ ШАЙБОЙ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

В рамках уравнений обобщенной теории пластинок С. А. Амбарцумяна [1] получено точное решение задачи об изгибе и кручении бесконечной трансверсально-изотропной плиты с цилиндрическим включением из другого материала.

1. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной трансверсально-изотропной плиты с впаиной круговой упругой шайбой, геометрические и физические характеристики которой отличны от характеристик плиты (фиг. 1); плита деформируется „на бесконечности“ равномерно-распределенными изгибающими  $M$ , либо крутящими  $H$  моментами.



Фиг. 1.

В рамках обобщенной теории изгиба трансверсально-изотропных пластинок С. А. Амбарцумяна [1] задача заключается в нахождении решения уравнений

$$\Delta \Delta w = 0, \quad \Delta \Phi - \zeta^2 \Phi = 0, \quad \left( \zeta^2 = \frac{5G_a}{2G_a} h^{-2} \right) \quad (1.1)$$

удовлетворяющего условиям непрерывности напряжений и деформаций на контуре спая плиты и включения

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu} &= \frac{\partial w_0}{\partial \nu}, & \gamma_{rz} &= \gamma_{rz}^0, & \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \\ M_r &= M_r^0, & H_{\theta z} &= H_{\theta z}^0, & N_\theta &= N_\theta^0 \end{aligned} \quad \text{на } L \quad (1.2)$$

а также условиям „на бесконечности“ и „в центре“ плиты. Здесь и в дальнейшем индексом (0) отмечены величины, относящиеся ко включению; индексами (a) и (z) обозначены упругие характеристики мате-

риалов плиты и включения в плоскостях, параллельных и нормальных к срединной соответственно;  $\rho$ ,  $\theta$  — полярные координаты.

Выполнение шести (вместо четырех в случае решения задачи по классической теории [2, 3]) условий (1.2) приводит в итоге к решению в более высокой степени взаимосвязи на границе раздела двух сред.

2. Запишем решение уравнений (1.1), соответствующее рассматриваемой проблеме\*

для внешней среды ( $\rho > a$ )

$$w = -\frac{M_0^2}{2D(1-\nu_a^2)} [(1-\nu_a) + (1+\nu_a)\cos 2\theta] + c_1 \ln \rho + (c_2 \rho^{-2} + c_3) \cos 2\theta$$

$$\Phi = c_4 K_0(\delta_0 \rho) + c_5 K_2(\delta_0 \rho) \sin 2\theta \quad (2.1)$$

для включения ( $\rho \leq a$ )

$$w_0 = c_1^0 \rho^2 + (c_2^0 \rho^2 + c_3^0) \cos 2\theta$$

$$\Phi_0 = c_4^0 J_0(\delta_0 \rho) + c_5^0 J_2(\delta_0 \rho) \sin 2\theta \quad (2.2)$$

Здесь  $J_j(\delta_0 \rho)$  и  $K_j(\delta_0 \rho)$  — модифицированные функции Бесселя I и II рода от аргумента  $\delta_0 \rho$  и  $\delta_0$ ;  $c_j$ ,  $c_j^0$  — произвольные постоянные.

Подставляя (2.1) и (2.2) в формулы для углов поворота, усилий и моментов, получим (выписываем лишь интересующие нас в дальнейшем величины)

для внешней среды ( $\rho > a$ )

$$M_\rho = -\frac{M}{2}(1 + \cos 2\theta) + D [c_1 \rho^{-2}(1 - \nu_a) + [4\nu_a c_3 \rho^{-2} -$$

$$- 6c_2 \rho^{-4}(1 - \nu_a)] \cos 2\theta + [24\varepsilon_0(1 - \nu_a) c_3 \rho^{-4} +$$

$$+ 2c_5 \rho^{-2}(1 - \nu_a) Q_2(\delta_0 \rho)] \cos 2\theta$$

$$M_\theta + M_\varphi = -M + 4D(1 + \nu_a) c_3 \rho^{-2} \cos 2\theta \quad (2.3)$$

$$N_\theta = -D[8c_3 \rho^{-3} + \delta_0^{-1} c_5 K_2'(\delta_0 \rho)] \sin 2\theta$$

для включения ( $\rho \leq a$ )

$$M_\rho^0 = D_0 \{ -2c_1^0(1 + \nu_a^0) + [4\nu_a^0 c_3^0 \rho^{-2} + 2c_5^0(1 - \nu_a^0)] \cos 2\theta +$$

$$+ [24\varepsilon_0(1 - \nu_a^0) c_3^0 \rho^{-4} + 2c_5^0 \rho^{-2}(1 - \nu_a^0) Q_2(\delta_0 \rho)] \cos 2\theta \} \quad (2.4)$$

$$M_\theta^0 + M_\varphi^0 = 4D^0(1 + \nu_a^0) (-c_1^0 + c_3^0 \rho^{-2} \cos 2\theta)$$

где

\* Выписывается решение для изгиба ( $M_x^\infty = M$ ;  $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = N_x^\infty = N_y^\infty = 0$ )  
Случай кручения плиты ( $H_{xy}^\infty = H$ ;  $M_x^\infty = \dots = N_x^\infty = 0$ ) получается суперпозицией.

$$\varepsilon = \frac{2h^2}{5(1-\nu_a)} \left( 2 \frac{G_a^*}{G_z} - \nu_z \frac{E_a}{E_z} \right), \quad \varepsilon_0 = \frac{2h^2}{5(1-\nu_a^0)} \left( 2 \frac{G_a^0}{G_z^0} - \nu_z^0 \frac{E_a^0}{E_z^0} \right)$$

$$Q_j(\delta\varphi) = \delta\varphi K_j(\delta\varphi) - K_j(\delta\varphi), \quad Q_j^0(\delta_0\varphi) = \delta_0\varphi J_j(\delta\varphi) - J_j(\delta\varphi) \quad (2.5)$$

В (2.3)–(2.5) и далее штрихом обозначены производные от функций Бесселя по аргументу  $\delta\varphi$ .

С учетом (2.1)–(2.4) условия (1.2) приводят к системе алгебраических уравнений относительно постоянных  $c_i$ ,  $c_i^0$ , из которых

$$c_1 = -\frac{Ma^2}{2D(1-\nu_a)} \frac{1 + \nu_1 \nu_2 \tilde{E}}{1 + \tilde{E} \nu_3}, \quad c_1^0 = \frac{M_a^2}{D(1 + \nu_a^0)(1 + \tilde{E} \nu_3)}, \quad c_4 = c_4^0 = 0$$

$$c_2 = \frac{M(\tilde{E} - 1)}{2DF(1 - \nu_a)} [F_4(1 - \nu_a) - F_2], \quad C_3 = \frac{M(\tilde{E} - 1)}{2DF(1 - \nu_a)} [F_1 + (1 - \nu_a)F_3] \quad (2.6)$$

$$c_2^0 = -\frac{M}{4D(1 - \nu_a)} \left\{ 1 + \frac{2(\tilde{E} - 1)}{Q_{+(1)}F} [Q_{(1)}^0(F_4(1 - \nu_a) - F_2) + \right.$$

$$\left. + (Q_{(1)} - Q_{+(1)}^0)(F_1 + (1 - \nu_a)F_3)] \right\}$$

$$c_3^0 = \frac{M(\tilde{E} - 1)}{2DFQ_{(1)}(1 - \nu_a)} \left\{ \frac{2}{a^2} [(1 - \nu_a)F_4 - F_2] + Q_{(1)} [F_1 + (1 - \nu_a)F_3] \right\}$$

$$c_5 = \frac{4}{\Delta} [(t_0 J_2 - 2\tilde{E} J_2) \tilde{t}^{-1} c_3 - \tilde{E} (t_0 J_2 - 2J_2) \tilde{\varepsilon}_0^{-1} c_3^0] \quad (2.7)$$

$$c_5^0 = \frac{4}{\Delta} [(tK_2^* + 2K_2) \tilde{\varepsilon} c_3 - (\tilde{E}tK_2^* + 2K_2) \tilde{\varepsilon}_0 c_3^0]$$

где

$$a^2 F_1 = -6(1 - \nu_a) + \frac{2\tilde{E}(1 - \nu_a)}{Q_{(1)}^0} \left| Q_{(1)}^0 - \frac{4(\nu_a^0 - 2h^* Q_{(2)}^0)}{1 - \nu_a^0} \right|$$

$$a^2 F_2 = 4(\nu_a + 8h^* Q_{(2)}^0) - 2\tilde{E}(1 - \nu_a) \frac{Q_{(1)} - Q_{(1)}^0}{Q_{(1)}} -$$

$$- \frac{2\tilde{E}\nu_3}{Q_{(1)}^0} Q_{(1)} (\nu_a^0 + 2h_0^* Q_{(2)}) \quad (2.8)$$

$$a^4 F_3 = -6 - 2\tilde{E} \frac{Q_{(1)}^0}{Q_{(1)}^0} + 4\tilde{E} \frac{Q_{(3)}^0}{Q_{(1)}^0}$$

$$a^2 F_4 = -2Q_{(3)} - 8\tilde{E} \frac{Q_{(1)} - Q_{(1)}^0}{Q_{(1)}^0} - 2\tilde{E} Q_{(3)} \frac{Q_{(1)}}{Q_{(1)}^0}$$

$$F = F_2 F_3 + F_1 F_4$$



и

$$Q_{-(1)} = 1 \pm \frac{4\bar{\varepsilon}}{\Delta} (\bar{E} - 1) \left( J_0 K_1 - \frac{2}{t} K_1 J_1 \right)$$

$$Q_{-(1)}^0 = 1 \pm \frac{4\varepsilon_0}{\Delta} (\bar{E} - 1) \left( J_1 K_0 + \frac{2}{t_0} J_1 K_1 \right)$$

$$Q_{-(2)} = \frac{\bar{E} - 1}{\Delta} \left[ \pm \frac{2}{t} J_0 K_1 - \left( 1 + \frac{4}{t^2} \right) J_1 K_1 \right]$$

$$Q_{-(2)}^0 = \frac{\bar{E} - 1}{\Delta} \left[ -J_1 K_1 \left( 1 + \frac{4}{t_0^2} \right) \pm \frac{2}{t_0} J_1 K_0 \right]$$

$$Q_{-(3)} = 1 \pm \frac{4\bar{\varepsilon}}{\Delta} \left\{ 4t (\bar{E} - 1) \left( 1 - \frac{3}{t^2} \right) \left( 1 + \frac{4}{t^2} \right) J_1 K_1 + [4(1 + \bar{E}) + \right. \\ \left. + t^2] J_1 K_0 + [8(1 - \bar{E}) - t^2 \bar{E}] J_0 K_1 - 2t(1 + \bar{E}) J_0 K_0 \right\} \quad (2.9)$$

$$Q_{-(3)}^0 = 1 \pm \frac{4\varepsilon_0}{\Delta} \left\{ 4t_0 (\bar{E} - 1) \left( 1 - \frac{3}{t_0^2} \right) \left( 1 + \frac{4}{t_0^2} \right) J_1 K_1 + (6\bar{E} + t_0^2 + 2) J_1 K_0 + \right. \\ \left. + [6(1 - \bar{E}) + t_0^2] J_0 K_1 - 2t_0(1 + \bar{E}) J_0 K_0 \right\}$$

$$\Delta = t \left\{ \frac{2}{t} \left( 1 + \frac{4}{t^2} \right) (1 - \bar{E}) J_1 K_1 - \left[ \frac{4}{t^2} (1 - \bar{E}) + \bar{E} \right] J_0 K_1 + \right. \\ \left. + (1 - \bar{E}) \left( 1 + \frac{4}{t^2} \right) J_1 K_0 - \frac{2}{t} (1 - \bar{E}) J_0 K_0 \right\}$$

В формулах (2.7)–(2.9) все  $J_j$  и  $K_j$  суть  $J_j(t_0)$  и  $K_j(t)$ . Кроме того, здесь введены следующие безразмерные величины:

$$h^* = \frac{2h^2}{5a^2} \left( 2 \frac{G_a}{G_z} - \nu_z \frac{E_a}{E_z} \right), \quad h_0 = \frac{2h_0^2}{5a^2} \left( 2 \frac{G_a^0}{G_z^0} - \nu_z^0 \frac{E_z^0}{E_a^0} \right)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a^2}, \quad \bar{\varepsilon}_0 = \frac{\varepsilon_0}{a^2}, \quad \bar{\nu}_1 = \frac{1 + \nu_a^0}{1 + \nu_a}, \quad \bar{\nu}_2 = \frac{1 - \nu_a^0}{1 - \nu_a}, \quad \bar{\nu}_3 = \frac{1 + \nu_a}{1 + \nu_a^0}$$

$$\bar{E} = \frac{E_a^0}{E_a} \frac{1 + \nu_a}{1 + \nu_a^0}, \quad t = \delta a, \quad t_0 = \delta_0 a$$

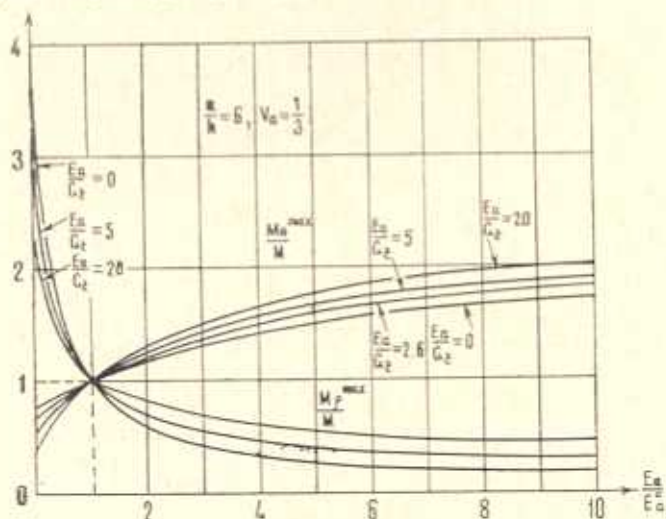
Подставляя (2.6)–(2.7) в (2.3) или (2.4) можем вычислить усилия и моменты в любой точке плиты и включения, в том числе и на границе раздела двух сред. В общем, как следует из (2.6)–(2.9), все характеристики напряженно-деформированного состояния являются сложными функциями упругих постоянных материала плиты и включения.

Рассмотрим ряд предельных вариантов найденных зависимостей.

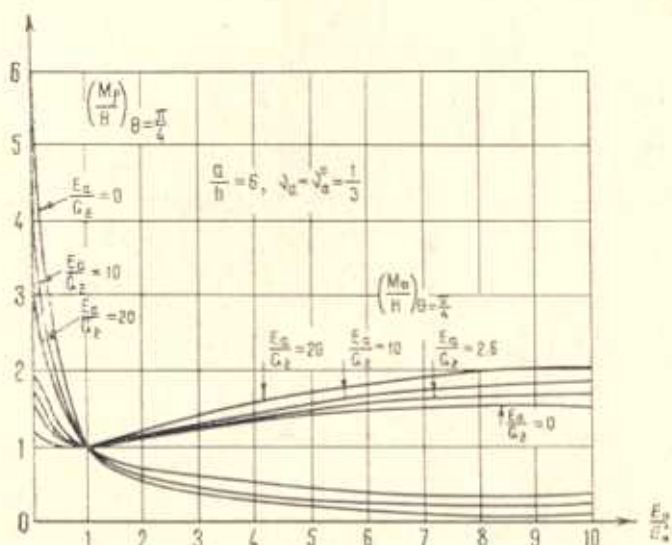
1. Случай  $\bar{E} \rightarrow 0$  и  $\bar{E} \rightarrow \infty$  соответствуют свободной круговой полости и полости с впаянным абсолютно-жестким ядром.

2. При  $E_a = E_a^0$ ,  $\nu_a = \nu_a^0$  поле плиты и включения остается невозмущенным и коэффициент концентрации равен единице.

3. Предельный переход  $\frac{E_a}{G_z} \rightarrow 0$ ,  $\frac{E_a^0}{G_z^0} \rightarrow 0$  соответствует классической теории Кирхгофа [2, 3].



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 2, 3 приведены графики изменения основных расчетных величин  $M_b^{\max}(a, \theta)$  и  $M_t^{\max}(a, \theta)$  для изгиба и кручения плиты в зависи-

мости от  $E_a^0/E_a$  для различных  $E_a/G_z$  при  $\nu_a^- = \nu_a^0 = 1/3$ ,  $h_0/h = 1.2$ ,  $G_z^0/G_z = 1.5$ ,  $a/h_0 = 6$ ,  $\nu_z = \nu_z^0 = 0$ .

Наибольшее отличие коэффициентов [концентрации  $k_p$  и  $k_b$  от данных классической теории [2, 3] ( $E_a/G_z = 0$ ) будет достигаться при абсолютно жестком включении и свободном отверстии.

Более подробные исследования убеждают в справедливости следующего утверждения: классическая теория Кирхгофа дает верхнюю границу коэффициентов концентрации напряжений при  $\frac{E_a^0}{E_a} > 1$ , т. е. когда материал включения жестче материала плиты, и нижнюю границу этих коэффициентов при  $\frac{E_a^0}{E_a} < 1$ , т. е. при относительно мягком включении.

Львовский политехнический  
институт

Поступила 25 II 1969

Բ. Լ. ՊԵԼԵԽ, Ս. Ա. ՊԵԼԵԽ

ԱՆՎԵՐՁ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ, ՈՐԻՆ ՆԵՐՉՈՒՎԱԾ Է  
ԱՌԱՋԳՎԱՍՆ ՏԱՓՈՂԱԿ ՈՒՐԻՇ ՆՅՈՒԹԻՅ, ԾՌՈՒՄՄԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հիմնվելով սալերի համար Ս. Ա. Համբարձումյանի տեսության վրա, ստացված են՝ գլանալին ներդրվածքով, արանալիբրաս-իզոտրոպ անվերջ սալի ծաման և ռլրման խնդիրների լուծումները:

B. L. PELEKH, S. A. PELEKH

BENDING OF INFINITE TRANSVERSAL-ISOTROPIC  
PLATE WITH ELASTIC INCLUSION FROM OTHER MATERIAL

S u m m a r y

An exact solution of the problem of bending and twisting of the infinite transversal-isotropic plate with a cylindrical inclusion from other material is obtained on the basis of the Ambartsumyan's theory.

It is proved that the classical Kirchgoff theory gives the higher value of the stress-concentration coefficients when the material of inclusion is tougher than that of the plate and the lower value of these coefficients when the inclusion is made out of relatively soft material.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1957.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
3. Goland J. Journ. Appl. Mech., v. 10, p. A-69, 1943.
4. Пелех Б. Л. К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями. Прикл. мех., т. 1, в. 7, 1965.