

Н. Г. ИСАБЕКЯН

БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК, ИЗГОТОВЛЕННЫХ
 ИЗ АНИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО
 МАТЕРИАЛА

1. Рассмотрим тонкостенную оболочку постоянной толщины h , отнесенную к криволинейной ортогональной системе координат x, y, z . Пусть координатные линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ совпадают с линиями кривизны, а ось z — с внешней нормалью срединной поверхности оболочки.

Как обычно в безмоментной теории оболочек, считается, что отличные от нуля напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ равномерно распределены по толщине оболочки, т. е.

$$\sigma_x = \frac{T_x}{h}, \quad \sigma_y = \frac{T_y}{h}, \quad \tau_{xy} = \frac{S}{h} \quad (1.1)$$

где T_x, T_y, S — внутренние тангенциальные силы на единицу длины соответствующей координатной линии. Считается также, что все искомые величины являются функциями лишь координат x и y и не зависят от z .

Оболочка изготовлена из анизотропного материала, в каждой точке которого имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки. Кроме того, принимается, что в указанных плоскостях симметрии в рассматриваемом направлении материал является разносопротивляющимся растяжению и сжатию [1].

Полагаем, что рассматриваемый материал оболочки при любом напряженном состоянии претерпевает лишь малые упругие деформации и подчиняется общим закономерностям сплошной упругой среды.

При плоском напряженном состоянии обобщенный закон упругости для анизотропного разномодульного материала в главных* с точки зрения напряжений направлениях α и β приводится в работе [1] и имеет вид

$$\begin{array}{ll} \text{при } \sigma_\alpha > 0, \quad \sigma_\beta < 0 & \text{при } \sigma_\alpha < 0, \quad \sigma_\beta > 0 \\ e_\alpha = b_{11}^- \sigma_\alpha + b_{12}^- \sigma_\beta & e_\alpha = b_{11}^- \sigma_\alpha + b_{12}^+ \sigma_\beta \\ e_\beta = b_{21}^+ \sigma_\alpha + b_{22}^- \sigma_\beta & e_\beta = b_{21}^- \sigma_\alpha + b_{22}^+ \sigma_\beta \\ e_{\alpha\beta} = b_{01}^- \sigma_\alpha + b_{02}^- \sigma_\beta & e_{\alpha\beta} = b_{01}^- \sigma_\alpha + b_{02}^+ \sigma_\beta \end{array} \quad (1.2)$$

* В последующем, при употреблении без оговорок термина „главное направление“ будем понимать главное с точки зрения напряжений направление.

Очевидно, главные направления α и β с точки зрения деформаций не являются главными и поэтому $e_{\alpha\beta} \neq 0$.

Закон упругости записан, как видно, для так называемых точек второго рода [2], т. е. точек, в которых главные напряжения σ_α и σ_β — разного знака. Для точек же первого рода, т. е. когда σ_α и σ_β — одинакового знака, соотношения (1.2) совпадают с законом упругости для обыкновенного (одномодульного) анизотропного материала. При этом в (1.2) коэффициенты b_{ik} нужно брать все с индексами „+“, если $\sigma_\alpha > 0$, $\sigma_\beta > 0$, или все — с индексами „—“, если $\sigma_\alpha < 0$, $\sigma_\beta < 0$.

В (1.2) принято, что b_{11}^+ , b_{21}^- , b_{61}^+ или b_{11}^- , b_{21}^+ , b_{61}^- — это коэффициенты деформации при чистом растяжении или сжатии в плоскости упругой симметрии по направлению α ; а b_{22}^+ , b_{12}^+ , b_{62}^+ или b_{22}^- , b_{12}^- , b_{62}^- — коэффициенты деформации при чистом растяжении или сжатии в рассматриваемой плоскости по направлению β , перпендикулярному к направлению α .

Очевидно, что коэффициенты деформации b_{ik}^\pm в каждой точке оболочки зависят от напряженного состояния данной точки, т. е. являются функциями от некоторого угла ψ , характеризующего главные направления α и β в данной точке.

Поэтому, чтобы пользоваться соотношениями упругости (1.2) во всем диапазоне изменения напряженного состояния оболочки, необходимо знать значения коэффициентов деформации b_{ik}^\pm по всем направлениям в плоскостях, параллельных в каждой точке срединной поверхности оболочки.

Пусть экспериментами на чистое растяжение и сжатие найдены следующие коэффициенты деформации: a_{11}^+ , a_{22}^+ , $a_{12}^+ = a_{21}^+$, $a_{12}^- = a_{21}^-$, $a_{16}^+ = a_{61}^+$, $a_{16}^- = a_{61}^-$, $a_{26}^+ = a_{62}^+$, $a_{26}^- = a_{62}^-$ для произвольно выбранных двух взаимно перпендикулярных направлений (1—1, 2—2) и a_{11}^* — для направления, которое составляет с направлением 1—1 угол $\vartheta = 45^\circ$.

Тогда, если главное направление α составляет с направлением 1—1 некоторый угол φ , то для определения коэффициентов деформации b_{ik}^\pm имеем формулы [1, 3, 4, 7]:

$$b_{11}^\pm = a_{11}^\pm \cos^4 \varphi + a_{22}^\pm \sin^4 \varphi + (a_{16}^\pm \cos^2 \varphi + a_{26}^\pm \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi + \\ + \frac{1}{4} [4a_{11}^* - (a_{11}^\pm + a_{22}^\pm) - 2(a_{16}^\pm + a_{26}^\pm)] \sin^2 2\varphi$$

$$b_{22}^\pm = a_{11}^\pm \sin^4 \varphi + a_{22}^\pm \cos^4 \varphi - (a_{16}^\pm \sin^2 \varphi + a_{26}^\pm \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi + \\ + \frac{1}{4} [4a_{11}^* - (a_{11}^\pm + a_{22}^\pm) - 2(a_{16}^\pm + a_{26}^\pm)] \sin^2 2\varphi$$

$$b_{12}^\pm = \frac{1}{2} [(a_{11}^\pm + a_{22}^\pm - 2a_{11}^*) + (a_{16}^\pm + a_{26}^\pm)] \sin^2 2\varphi +$$

$$+ a_{12} + \frac{1}{4} (a_{26} - a_{16}^+) \sin 4\varphi \quad (1.3)$$

$$b_{16}^+ = \frac{1}{2} (a_{22}^- - a_{11}^+) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{16}^+ + a_{26}^-) \cos 2\varphi - \\ - \frac{1}{2} (a_{26}^- - a_{16}^+) \cos 4\varphi - \frac{1}{2} [(a_{11}^+ + a_{22}^- - 2a_{11}^+) + (a_{16}^+ + a_{26}^-)] \sin 4\varphi$$

$$b_{26}^- = \frac{1}{2} (a_{22}^- - a_{11}^+) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{16}^+ + a_{26}^-) \cos 2\varphi + \\ + \frac{1}{2} (a_{26}^- - a_{16}^+) \cos 4\varphi + \frac{1}{2} [(a_{11}^+ + a_{22}^- - 2a_{11}^+) + (a_{16}^+ + a_{26}^-)] \sin 4\varphi$$

Здесь вместо коэффициента a_{11}^+ из эксперимента можно было взять a_{22}^- или a_{12}^+ и получить соответствующие формулы для определения коэффициентов b_{ik}^- .

Как видно из (1.2) и (1.3), первоначально предполагалось [1], что для установления зависимостей между напряжениями и деформациями необходимы 12 независимых, экспериментально определяемых коэффициентов a_{ik}^+ .

Однако в дальнейшем, исходя из условия существования упругого потенциала, получены следующие зависимости между коэффициентами b_{ik}^- [7]:

$$b_{ik}^+ = b_{ik}^- \quad (i \neq k) \quad (1.4)$$

и, соответственно, между коэффициентами a_{ik}^+

$$a_{ik}^+ = a_{ik}^- \quad (i \neq k) \quad (1.5)$$

Кроме того, получено, что для рассматриваемого материала разность $(b_{ik}^+ - b_{ik}^-)$ ($i = k$) есть инвариант относительно угла φ , т. е.

$$b_{11}^+ - b_{11}^- = b_{22}^+ - b_{22}^- = a_{11}^+ - a_{11}^- = a_{22}^+ - a_{22}^- \quad (1.6)$$

Поэтому число независимых упругих постоянных a_{ik}^+ , характеризующих материал в законе упругости, сократится с 12 до 7, т. е. достаточно, например, определить из опытов следующие 7 коэффициентов:

$$a_{11}^-, a_{22}^+, a_{12}^+, a_{11}^+, a_{12}^-, a_{16}^-, a_{26}^-.$$

С учетом приведенных зависимостей закон упругости в главных направлениях (1.2) примет вид

при $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0$

$$e_x = b_{11}^+ \sigma_x + b_{12}^- \sigma_y$$

$$e_y = b_{12}^+ \sigma_x + b_{22}^- \sigma_y$$

$$e_{xy} = b_{61} \sigma_x + b_{62} \sigma_y$$

при $\sigma_x < 0, \sigma_y > 0$

$$e_x = b_{11}^- \sigma_x + b_{12}^+ \sigma_y$$

$$e_y = b_{12}^- \sigma_x + b_{22}^+ \sigma_y \quad (1.7)$$

$$e_{xy} = b_{61} \sigma_x + b_{62} \sigma_y$$

Для определения коэффициентов деформации b_{ik}^{\pm} вместо (1.3) получим

$$b_{11}^+ = a_{11}^- \cos^4 \varphi + a_{22}^+ \sin^4 \varphi + (a_{16}^- \cos^2 \varphi + a_{26}^+ \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi + \\ + \frac{1}{4} [4a_{11}^+ - (a_{11}^- + a_{22}^+) - 2(a_{16}^- + a_{26}^+)] \sin^2 2\varphi$$

$$b_{22}^+ = a_{11}^+ \sin^4 \varphi + a_{22}^- \cos^4 \varphi - (a_{16}^+ \sin^2 \varphi + a_{26}^- \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi + \\ + \frac{1}{4} [4a_{11}^+ - (a_{11}^- + a_{22}^+) - 2(a_{16}^- + a_{26}^+)] \sin^2 2\varphi$$

$$b_{12}^+ = \frac{1}{2} [(a_{11}^- + a_{22}^+ - 2a_{11}^+) + (a_{16}^- + a_{26}^+)] \sin^2 2\varphi + \\ + a_{12}^+ + \frac{1}{4} (a_{26}^- - a_{16}^-) \sin 4\varphi \quad (1.8)$$

$$b_{10} = \frac{1}{2} (a_{22}^- - a_{11}^-) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{16}^- + a_{26}^-) \cos 2\varphi - \frac{1}{2} (a_{26}^- - a_{16}^-) \cos 4\varphi - \\ - \frac{1}{2} [(a_{11}^- + a_{22}^- - 2a_{11}^-) + (a_{16}^- + a_{26}^-)] \sin 4\varphi$$

$$b_{20} = \frac{1}{2} (a_{22}^- - a_{11}^-) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{16}^- + a_{26}^-) \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{26}^- - a_{16}^-) \cos 4\varphi + \\ + \frac{1}{2} [(a_{11}^- + a_{22}^- - 2a_{11}^-) + (a_{16}^- + a_{26}^-)] \sin 4\varphi$$

В случае, если оболочка изготовлена из разномодульного ортотропного материала, за указанные выше произвольно выбранные направления, в которых экспериментально определяются коэффициенты a_{ik}^{\pm} , удобно выбрать главные направления упругости. Тогда в формулах (1.8) нужно принять: $a_{16}^- = a_{26}^- = 0$ и $a_{11}^+ = a_{22}^+ = a^+$.

Как известно, напряженное состояние в безмоментной теории оболочек является плоским. Напряжениям $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, возникающим в оболочке, соответствуют внутренние тангенциальные силы T_x, T_y, S по формулам (1.1). В связи с этим уравнения и соотношения, имеющие место при плоском напряженном состоянии, приведенные выше, остаются в силе и для рассматриваемой безмоментной теории оболочек.

Запишем теперь закон упругости для безмоментной оболочки, изготовленной из анизотропного разномодульного материала, в исходной системе координат x, y . Положение главной системы координат α, β рассматриваемой точки оболочки относительно исходной системы x, y определяется с помощью четырех направляющих косинусов (см. схему), которые удовлетворяют известным соотношениям следующих типов:

	α	β
x	l_1	m_1
y	l_2	m_2

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 &= 1, & l_1 l_2 + m_1 m_2 &= 0 \\ l_1^2 + m_1^2 &= 1, & l_1 m_1 + l_2 m_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя уравнения (1.7) и формулы преобразования компонентов деформации от главной системы α, β к исходной x, y , с учетом (1.1) можно получить следующие соотношения упругости:

$$\begin{aligned} \text{при } T_\alpha > 0, \quad T_\beta < 0 & \qquad \qquad \qquad \text{при } T_\alpha < 0, \quad T_\beta > 0 \\ e_x &= \frac{1}{h} (A_{11}^+ T_\alpha + A_{12}^- T_\beta) & e_x &= \frac{1}{h} (A_{11}^- T_\alpha + A_{12}^+ T_\beta) \\ e_y &= \frac{1}{h} (A_{21}^+ T_\alpha + A_{22}^- T_\beta) & e_y &= \frac{1}{h} (A_{21}^- T_\alpha + A_{22}^+ T_\beta) \\ e_{xy} &= \frac{1}{h} (A_{61}^+ T_\alpha + A_{62}^- T_\beta) & e_{xy} &= \frac{1}{h} (A_{61}^- T_\alpha + A_{62}^+ T_\beta) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $T_\alpha = h\sigma_\alpha$ и $T_\beta = h\sigma_\beta$ — внутренние тангенциальные силы в главных направлениях α и β .

Для коэффициентов A_{ik} имеем

$$\begin{aligned} A_{11}^+ &= b_{11}^+ l_1^2 + b_{12}^+ m_1^2 + b_{16}^+ l_1 m_1 \\ A_{22}^- &= b_{22}^- m_2^2 + b_{12}^- l_2^2 + b_{26}^- l_2 m_2 \\ A_{12}^- &= b_{22}^- m_1^2 + b_{12}^- l_1^2 + b_{26}^- l_1 m_1 \\ A_{21}^+ &= b_{11}^+ l_2^2 + b_{12}^+ m_2^2 + b_{16}^+ l_2 m_2 \\ A_{61}^+ &= 2(b_{11}^+ l_1 l_2 + b_{12}^+ m_1 m_2) + b_{16}^+ (l_1 m_2 + m_1 l_2) \\ A_{62}^- &= 2(b_{22}^- m_1 m_2 + b_{12}^- l_1 l_2) + b_{26}^- (l_1 m_2 + m_1 l_2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя теперь формулы преобразования компонентов напряжения от главной системы координат α, β к исходной x, y , из (1.10) получим соотношения упругости в таком виде

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{1}{h} (B_{11}T_x + B_{12}T_y + B_{10}S) \\
 e_y &= \frac{1}{h} (B_{21}T_x + B_{22}T_y + B_{20}S) \\
 e_{xy} &= \frac{1}{h} (B_{61}T_x + B_{62}T_y + B_{60}S)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь для определения коэффициентов B_{ik} имеются следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= A_{11}l_1^2 + A_{12}m_1^2, & B_{22} &= A_{22}m_2^2 + A_{21}l_2^2 \\
 B_{12} &= A_{11}l_2^2 + A_{12}m_2^2, & B_{21} &= A_{22}m_1^2 + A_{21}l_1^2 \\
 B_{10} &= 2l_1l_2(A_{11} - A_{12}), & B_{20} &= 2m_1m_2(A_{22} - A_{21}) \\
 B_{61} &= A_{61}l_1^2 + A_{62}m_1^2, & B_{62} &= A_{61}l_2^2 + A_{62}m_2^2 \\
 B_{60} &= 2(A_{61}l_1l_2 + A_{62}m_1m_2)
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

В формулах (1.13) коэффициенты A_{ik} записаны без верхних индексов ("+" или "-"). При пользовании ими нужно учесть, что

$$\begin{aligned}
 \text{при } T_x > 0, T_y < 0: & \quad A_{11}^+, A_{22}^-, A_{12}^-, A_{21}^+, A_{61}^+, A_{62}^- \\
 \text{при } T_x < 0, T_y > 0: & \quad A_{11}^-, A_{22}^+, A_{12}^+, A_{21}^-, A_{61}^-, A_{62}^+
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Приведенные соотношения упругости могут быть разрешены относительно усилий.

После ряда преобразований обобщенный закон упругости для безмоментной оболочки, изготовленной из анизотропного разномодульного материала, получим в таком виде

$$\begin{aligned}
 T_x &= h(D_{11}e_x + D_{12}e_y + D_{10}e_{xy}) \\
 T_y &= h(D_{21}e_x + D_{22}e_y + D_{20}e_{xy}) \\
 S &= h(D_{61}e_x + D_{62}e_y + D_{60}e_{xy})
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Для коэффициентов D_{ik} , которые являются функциями от напряженного состояния данной точки, имеем

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= c_{11}l_1^4 + 2c_{12}m_1^2l_1^2 + c_{22}m_1^4 \\
 D_{12} &= c_{11}l_1^2l_2^2 + c_{12}(l_1^2m_2^2 + l_2^2m_1^2) + c_{22}m_1^2m_2^2 \\
 D_{10} &= c_{11}l_1^3l_2 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)m_1l_1 + c_{22}m_1^3m_2 \\
 D_{22} &= c_{22}m_2^4 + 2c_{12}m_2^2l_2^2 + c_{11}l_2^4 \\
 D_{21} &= c_{22}m_1^2m_2^2 + c_{12}(l_1^2m_2^2 + l_2^2m_1^2) + c_{11}l_1^2l_2^2
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$D_{33} = c_{22}m_1m_2^3 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)m_2l_2 + c_{11}l_1l_2^3$$

$$D_{61} = c_{22}m_1^3m_2 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)m_1l_1 + c_{11}l_1^3l_2$$

$$D_{62} = c_{11}l_1l_2^3 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)m_2l_2 + c_{22}m_1m_2^3$$

$$D_{66} = (c_{11} + c_{22} - 2c_{12})m_1^2m_2^2$$

где

$$c_{11} = \frac{b_{22}}{\omega}, \quad c_{22} = \frac{b_{11}}{\omega}, \quad c_{12} = -\frac{b_{12}}{\omega} \quad (1.17)$$

$$\omega = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$$

В (1.17) коэффициенты b_{ik} приведены без верхних индексов („+“ или „-“). При пользовании формулами (1.15) необходимо учесть, что

$$\begin{aligned} \text{при } T_x > 0, \quad T_y < 0: & \quad b_{11}^+, \quad b_{22}^- \\ \text{при } T_x < 0, \quad T_y > 0: & \quad b_{11}^-, \quad b_{22}^+ \end{aligned} \quad (1.18)$$

Очевидно, что в соотношениях упругости (1.10), (1.12) и (1.15) коэффициенты при усилиях и деформациях соответственно выражаются в конечном итоге через экспериментально определяемые коэффициенты a_{ik} по формулам (1.8).

Приведенные соотношения упругости достаточно сложны. Входящие в них коэффициенты A_{ik} , B_{ik} , D_{ik} , как видно из (1.11), (1.13), (1.16), являются функциями от самого напряженного состояния рассматриваемой точки оболочки. Иными словами, здесь имеют место сложные нелинейные соотношения упругости, которые отличаются от аналогичных соотношений классической теории.

В последующем, будут необходимы также некоторые соотношения, которые имеют место в плоской задаче теории упругости. Приведем эти соотношения [2, 5, 6].

Главные напряжения τ_x и τ_y или соответствующие им главные усилия $T_x = h\tau_x$ и $T_y = h\tau_y$ определяются формулами

$$\begin{aligned} T_x &= l_1^2 T_x + l_2^2 T_y + 2l_1 l_2 S \\ T_y &= m_1^2 T_x + m_2^2 T_y + 2m_1 m_2 S \end{aligned} \quad (1.19)$$

Исходя из условия, что на главных площадках $\tau_{xy} = 0$, имеем также

$$l_1 m_1 T_x + l_2 m_2 T_y + (l_1 m_2 + l_2 m_1) S = 0 \quad (1.20)$$

После некоторых преобразований из (1.20) с учетом (1.9) можно получить

$$k = \frac{m_2}{m_1} = -\frac{l_1}{l_2} = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}; \quad 2t = \frac{T_x - T_y}{S} \quad (1.21)$$

для главных усилий

$$\begin{aligned} T_x &= T_x - \frac{1}{k} S = T_y - kS \\ T_y &= T_x + kS = T_y + \frac{1}{k} S \end{aligned} \quad (1.22)$$

и, наконец, для направляющих косинусов

$$\begin{aligned} m_1^2 = \bar{l}_2^2 &= \frac{1}{1+k^2}, & m_2^2 = \bar{l}_1^2 &= \frac{k^2}{1+k^2} \\ m_1 m_2 &= -l_1 l_2 = \frac{k}{1+k^2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

В дальнейшем за направление α будем принимать то из главных направлений, которое составляет с координатными осями x и y острые углы. При таком выборе направления α параметр k всегда будет отрицательным, т. е.

$$k = -t - \sqrt{t^2 + 1} < 0 \quad (1.24)$$

Тогда из (1.22) нетрудно заметить, что, в зависимости от знака тангенциального усилия S , получаются следующие два варианта:

а) при $S > 0$ имеем $T_x > 0$, $T_y < 0$, т. е.

$$T_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \left[(T_x + T_y) \pm \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right] \quad (1.25)$$

и для параметра k

$$k = -\frac{1}{2S} \left[(T_x - T_y) + \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right] \quad (1.26)$$

б) при $S < 0$ имеем $T_x < 0$, $T_y > 0$, т. е.

$$T_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \left[(T_x + T_y) \mp \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right] \quad (1.27)$$

и для параметра k

$$k = -\frac{1}{2S} \left[(T_x - T_y) - \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right] \quad (1.28)$$

Отметим, что при выполнении в данной точке неравенства

$$S^2 - T_x T_y > 0 \quad (1.29)$$

мы имеем дело с точкой второго рода. В противном случае рассматриваемая точка является точкой первого рода.

Как известно [2, 5], в разномодульной теории упругости чисто геометрические и чисто статические уравнения и соотношения совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями классической теории упругости. Приведем здесь те уравнения и соотношения

классической безмоментной теории оболочек, которые будут использованы в последующем [3].

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial B T_x}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} T_x + \frac{\partial A S}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} S &= -ABX \\ \frac{\partial A T_y}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} T_y + \frac{\partial B S}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} S &= -ABY \\ k_1 T_x + k_2 T_y &= Z \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ — компоненты внешней поверхностной нагрузки; $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$ — главные кривизны и R_1 , R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности; A , B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки.

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} + k_1 w \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} + k_2 w \\ w &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{B} \right) \end{aligned} \quad (1.31)$$

где ε_1 , ε_2 , w — компоненты тангенциальной деформации; $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ — тангенциальные и нормальное перемещения.

Приведенные выше уравнения и соотношения при соответствующих граничных условиях достаточны для решения различных задач безмоментной теории оболочек, изготовленных из анизотропного разномодульного материала.

2. Рассмотрим задачу свободного кручения замкнутой круговой цилиндрической оболочки (радиус кривизны — R , длина — L), изготовленной из анизотропного разномодульного материала, в каждой точке которого имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки.

Пусть оболочка одним из торцов ($x = 0$) закреплена полностью, а на другом торцевом сечении ε_2 ($x = L$) действует равномерно сдвигающее усилие S^* (фиг. 1).

Для срединной поверхности рассматриваемой оболочки имеем

$$A = 1, \quad B = R, \quad k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R} \quad (2.1)$$

Граничные условия таковы

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \quad u = 0, \quad v = 0 \\ \text{при } x = L & \quad T_x = 0, \quad S = S^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

Очевидно, что рассматриваемая задача обладает осевой симметрией.

В силу (2.1), уравнения равновесия (1.30) примут вид

$$\frac{dT_x}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dx} = 0, \quad \frac{1}{R} T_y = 0 \quad (2.3)$$

Из (2.3), с учетом (2.2), для внутренних усилий получим

$$T_x = 0, \quad T_y = 0, \quad S = S^* \quad (2.4)$$

Заметим, что в силу (2.4) неравенство (1.29) выполняется для всех точек оболочки, т. е. вся оболочка является областью второго рода. Поэтому здесь должны быть использованы обобщенные уравнения упругости в одном из приведенных выше видов (1.7), (1.10), (1.12) или (1.15).

Так как $S > 0$, то из (1.26) получим $k = -1$ и для главных усилий из (1.22) или (1.25)

$$T_\alpha = h\sigma_\alpha = S^*, \quad T_\beta = h\sigma_\beta = -S^* \quad (2.5)$$

Для направляющих косинусов из (1.23) получим

$$l_1 = l_2 = -m_1 = m_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.6)$$

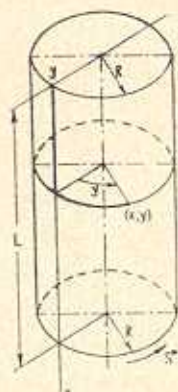
т. е. главное направление α составляет с осью x угол в 45° .

Для рассматриваемой цилиндрической оболочки имеем

$$e_x = \varepsilon_1 = \frac{du}{dx}, \quad e_y = \varepsilon_2 = \frac{w}{R}, \quad e_{xy} = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.7)$$

Учитывая (2.5), (2.6) и (2.7), для определения перемещений получим из (1.10) (при $T_\alpha > 0$, $T_\beta < 0$) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{S^*}{2h} [(b_{11}^+ - b_{22}^-) - (b_{16} - b_{26})] \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{S^*}{h} [(b_{11}^+ + b_{22}^-) - 2b_{12}] \\ \frac{w}{R} &= \frac{S^*}{2h} [(b_{11}^+ - b_{22}^-) + (b_{16} - b_{26})] \end{aligned} \quad (2.8)$$



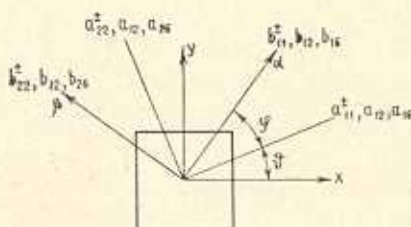
Фиг. 1.

Как видно из (2.4), напряженное состояние оболочки является однородным. Поэтому, решая уравнения (2.8) с учетом граничных условий (2.2), для перемещений получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^*x}{2h} [(b_{11}^- - b_{22}^-) - (b_{18} - b_{26})] \\ v &= \frac{S^*x}{h} [(b_{11}^+ + b_{22}^-) - 2b_{12}] \\ w &= \frac{S^*R}{2h} [(b_{11}^+ - b_{22}^-) + (b_{18} - b_{26})] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты b_{ik}^- в формулах (2.9) могут быть выражены, как было указано выше, через экспериментально определяемые коэффициенты a_{ik}^- по формулам (1.8).

Пусть для материала рассматриваемой оболочки направление 1—1, в котором экспериментально определяются коэффициенты деформации a_{ik} , составляет с осью оболочки x произвольный угол ϑ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Тогда из (2.9), используя (1.8), для перемещений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^*x}{2h} \{ (a_{11}^+ - a_{11}^-) + (a_{18} + a_{26}) \sin 2\varphi - (a_{22}^+ - a_{11}^+) \cos 2\varphi + \\ &+ [(a_{11}^+ + a_{22}^- - 2a_{11_s}^-) + (a_{18} + a_{26})] \sin 4\varphi + (a_{26} - a_{18}) \cos 4\varphi \} \\ v &= \frac{S^*x}{h} \{ (a_{11_s}^+ + a_{11_s}^-) - (a_{18} + a_{26}) - 2a_{12} - (a_{26} - a_{18}) \sin 4\varphi + \\ &+ [(a_{11}^+ + a_{22}^- - 2a_{11_s}^-) + (a_{18} + a_{26})] \cos 4\varphi \} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{S^*R}{2h} \{ (a_{11}^+ - a_{11}^-) + (a_{18} + a_{26}) \sin 2\varphi - (a_{22}^+ - a_{11}^+) \cos 2\varphi - \\ &- [(a_{11}^+ + a_{22}^- - 2a_{11_s}^-) + (a_{18} + a_{26})] \sin 4\varphi - (a_{26} - a_{18}) \cos 4\varphi \} \\ &(\varphi = 45^\circ - \vartheta) \end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае, если оболочка изготовлена из ортотропного разномодульного материала, главное направление упругости 1—1 которого совпадает с осью оболочки x произвольный угол ψ , выражения для перемещений u, v, w можно получить из (2.10), положив в них $a_{10} = a_{20}$.

Отметим, что напряженное и деформированное состояния рассматриваемой оболочки из анизотропного разномодульного материала изменяются с изменением направления сдвигающего усилия S^* . Рассмотрим поэтому случай, когда сдвигающее усилие, действующее на оболочку, направлено в противоположную по сравнению с первым случаем сторону.

Тогда граничные условия будут

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \quad u = 0, \quad v = 0 \\ \text{при } x = L & \quad T_x = 0, \quad S = -S^* \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поступая так же, как в рассмотренном выше случае ($S > 0$), внутренних усилий получим

$$T_x = 0, \quad T_y = 0, \quad S = -S^* \quad (2.10)$$

Используя для определения k формулу (1.28) (т. к. $S < 0$), получим опять $k = -1$, а для главных усилий уже из (1.22) или

$$T_1 = h\sigma_1 = -S^*, \quad T_2 = h\sigma_2 = S^* \quad (2.11)$$

Как и в первом случае, направляющие косинусы определяются согласно (2.6).

Тогда для перемещений из (1.10) (при $T_x < 0, T_2 > 0$) с учетом граничных условий (2.12) получим

$$u = \frac{S^*x}{2h} [(b_{22}^+ - b_{11}^-) + (b_{10} - b_{20})]$$

$$v = \frac{S^*x}{h} [-(b_{21}^+ + b_{11}^-) + 2b_{12}]$$

$$w = \frac{S^*R}{2h} [(b_{22}^+ - b_{11}^-) - (b_{10} - b_{20})]$$

Совершенно аналогично первому случаю можно перейти от коэффициентов b_{ik}^- к коэффициентам a_{ik} , но здесь эти формулы не применяются. Отметим только, что в этом случае выражения для u и w существенно отличаются от соответствующих выражений первого случая, а выражение для v отличается только знаком, что, впрочем, можно уже заметить, сравнивая формулы (2.9) и (2.15) и учитывая при этом зависимость (1.6). Этого отличия в выражениях для u и w нет для оболочек, изготовленных из изотропного разномодульного материала или из анизотропного одномодульного материала. Таким образом, изменение значений перемещений u и w круговой цилиндрической

В случае, если оболочка изготовлена из ортотропного разномодульного материала, главное направление упругости 1—1 которого составляет с осью оболочки x произвольный угол θ , выражения для перемещений u , v , w можно получить из (2.10), положив в них $a_{10} = a_{20} = 0$.

Отметим, что напряженное и деформированное состояния рассматриваемой оболочки из анизотропного разномодульного материала изменяются с изменением направления сдвигающего усилия S^* . Рассмотрим поэтому случай, когда сдвигающее усилие, действующее на оболочку, направлено в противоположную по сравнению с первым случаем сторону.

Тогда граничные условия будут

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \quad u = 0, \quad v = 0 \\ \text{при } x = L & \quad T_x = 0, \quad S = -S^* \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поступая так же, как в рассмотренном выше случае ($S > 0$), для внутренних усилий получим

$$T_x = 0, \quad T_y = 0, \quad S = -S^* \quad (2.13)$$

Используя для определения k формулу (1.28) (т. к. $S < 0$), получим опять $k = -1$, а для главных усилий уже из (1.22) или (1.27)

$$T_1 = h\sigma_1 = -S^*, \quad T_3 = h\tau_3 = S^* \quad (2.14)$$

Как и в первом случае, направляющие косинусы определяются согласно (2.6).

Тогда для перемещений из (1.10) (при $T_x < 0$, $T_y > 0$) с учетом граничных условий (2.12) получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^*x}{2h} [(b_{22}^- - b_{11}^-) + (b_{10} - b_{20})] \\ v &= \frac{S^*x}{h} [-(b_{22}^+ + b_{11}^-) + 2b_{12}] \\ w &= \frac{S^*R}{2h} [(b_{22}^- - b_{11}^-) - (b_{10} - b_{20})] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Совершенно аналогично первому случаю можно перейти от коэффициентов b_{ik}^\pm к коэффициентам a_{ik}^\pm , но здесь эти формулы не приведены. Отметим только, что в этом случае выражения для u и w существенно отличаются от соответствующих выражений первого случая, а выражение для v отличается только знаком, что, впрочем, можно уже заметить, сравнивая формулы (2.9) и (2.15) и учитывая при этом зависимость (1.6). Этого отличия в выражениях для u и w нет для оболочек, изготовленных из изотропного разномодульного материала или из анизотропного одномодульного материала. Таким образом, изменение значений перемещений u и w круговой цилиндри-

ческой оболочки при изменении направления сдвигающего ее усилия S^* на противоположное является характерным только для анизотропного разномодульного материала.

Рассмотрим теперь частные случаи задачи свободного кручения ортотропной оболочки при некоторых конкретных значениях упомянутого выше угла ϑ .

а) Пусть $\vartheta = 0$, т. е. главные направления упругости материала 1—1 и 2—2 совпадают с направлениями координатных осей оболочки x и y . Тогда $\varphi = 45^\circ$ и для перемещений получим в первом случае ($S > 0$) из (2.10)

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^*x}{2h} (a_{11}^+ - a_{11}^-) \\ v &= \frac{S^*x}{h} [(a^+ + a^-) - (a_{11}^+ + a_{22}^- - 2a^+) - a_{12}] \\ w &= \frac{S^*R}{2h} (a_{11}^+ - a_{11}^-) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Очевидно, что при данной ориентации ортотропии материала оболочки ($\vartheta = 0^\circ$) перемещения во втором случае ($S < 0$) отличаются от соответствующих перемещений в первом случае только знаками.

б) Пусть теперь $\vartheta = 45^\circ$, т. е. главное направление упругости материала 1—1 составляет с осями x и y углы в 45° . При этом $\varphi = 0$ и для перемещений получим:

в первом случае ($S > 0$)

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^*x}{2h} (a_{11}^+ - a_{22}^-) \\ v &= \frac{S^*x}{h} [(a_{11}^+ + a_{22}^-) - 2a_{12}] \\ w &= \frac{S^*R}{2h} (a_{11}^+ - a_{22}^-) \end{aligned} \quad (2.17)$$

во втором случае ($S < 0$)

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^*x}{2h} (a_{22}^- - a_{11}^+) \\ v &= \frac{S^*x}{h} [-(a_{22}^- + a_{11}^+) + 2a_{12}] \\ w &= \frac{S^*R}{2h} (a_{22}^- - a_{11}^+) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Как видно из (2.17) и (2.18), перемещения u и w во втором случае существенно изменяются по сравнению с соответствующими перемещениями в первом случае, а перемещение v меняет только знак.

Проследим на числовых примерах за изменениями перемещений u , v , w цилиндрической оболочки, изготовленной из ортотропного разномодульного материала, при кручении в зависимости от ориентации ортотропии материала (т. е. от угла θ).

Для значений упругих постоянных материала оболочки примем следующие три варианта:

$$1) \quad a_{11}^+ = \frac{1}{E_1^+} = a_{22}^+ = \frac{1}{E_2^+} = \frac{1}{E}, \quad a_{11}^- = \frac{1}{E_1^-} = a_{22}^- = \frac{1}{E_2^-} = \frac{1}{2E}$$

$$a^+ = \frac{1}{E^+} = \frac{3}{2E}, \quad a^- = \frac{1}{E^-} = \frac{1}{E}$$

$$a_{12}^- = -\frac{\nu_{12}^+}{E_2^+} = -\frac{\nu_{21}^+}{E_1^+} = -\frac{\nu_{12}^-}{E_2^-} = -\frac{\nu_{21}^-}{E_1^-} = -\frac{0.1}{E}$$

$$2) \quad a_{11}^+ = \frac{7}{5E}, \quad a_{11}^- = \frac{6}{5E}, \quad a_{22}^+ = \frac{1}{E}, \quad a_{22}^- = \frac{4}{5E}$$

$$a^+ = \frac{6}{5E}, \quad a^- = \frac{1}{E}, \quad a_{12}^- = -\frac{0.2}{E}$$

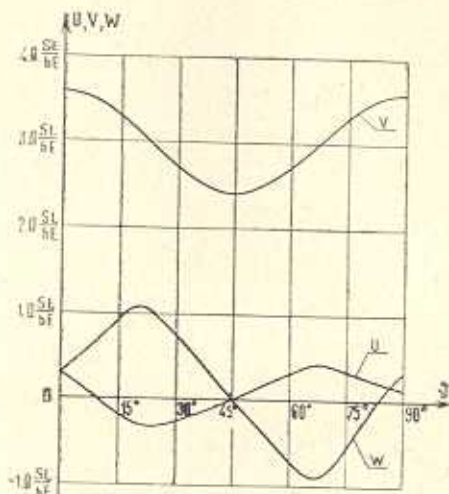
$$3) \quad a_{11}^+ = \frac{1}{E}, \quad a_{11}^- = \frac{4}{5E}, \quad a_{22}^+ = \frac{6}{5E}, \quad a_{22}^- = \frac{1}{E}$$

$$a^+ = \frac{7}{5E}, \quad a^- = \frac{6}{5E}, \quad a_{12}^- = -\frac{0.2}{E}$$

Результаты выполненного по формулам (2.10) подсчета значений перемещений u , v , w (при $x = L$) в зависимости от угла θ для принятых трех вариантов упругих постоянных приведены в таблице.

Таблица 1

	θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
I	$u \cdot hE/SL$	0.250	-0.182	-0.182	0.250	0.682	0.682	0.250
	$v \cdot hE/SL$	3.700	3.200	2.200	1.700	2.200	3.200	3.700
	$w \cdot hE/SR$	0.250	0.682	0.682	0.250	-0.182	-0.182	0.250
II	$u \cdot hE/SL$	0.100	0.200	0.273	0.300	0.273	0.200	0.100
	$v \cdot hE/SL$	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600
	$w \cdot hE/SR$	0.100	0.200	0.273	0.300	0.273	0.200	0.100
III	$u \cdot hE/SL$	0.100	-0.210	-0.246	0.000	0.273	0.310	0.100
	$v \cdot hE/SL$	3.600	3.300	2.700	2.400	2.700	3.300	3.600
	$w \cdot hE/SR$	0.100	0.310	0.273	0.000	-0.246	0.210	0.100



Փիգ. 3.

Для иллюстрации приведем (фиг. 3) график изменения перемещений u , v , w для третьего варианта при $L = 3R$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3 VI 1969

Ն. Հ. ԻՍԱԲԵԿՅԱՆ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱՄՈՒԴՈՒԷԼ ՆՅՈՒԹԻՅ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ
ԱՆՄՈՄԵՆՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հոդվածում արված են անիզոտրոպ տարամոդուլ նյութից պատրաստված թաղանթների անմոմենտային տեսության հիմնական հավասարումները:

Լուծված է անիզոտրոպ տարամոդուլ նյութից պատրաստված գլանային թաղանթի մաքուր ոլորման խնդիրը:

Բերված են u , v , w տեղափոխությունների առնչությունները՝ կախված թաղանթի նյութի օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղությունների և կորույթյան գլխավոր դժերի միջև կազմված անկյունից:

N. H. ISABEKIAN

MEMBRANE THEORY OF SHELLS, MADE FROM
ANISOTROPICALLY DIFFERENTMODUL MATERIAL

S u m m a r y

In this paper the basic equations of membrane theory of shells, made from anisotropically differentmodul material are given.

The problem of free torsion of circular cylindrical shell, made from anisotropically differentmodul material is solved.

The dependence of displacements u , v , w from the orientation of orthotropy axis of the shell material is determined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела. Инж. ж., МТТ, 3, 1969.
2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, 2, 1966.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Госиздат, М.-Л., 1950.
5. Амбарцумян С. А. Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XIX, 2, 1966.
6. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Некоторые задачи безмоментной теории оболочек, изготовленных из разномодульного материала. Докл. АН Арм.ССР, т. XIII, 4, 1966.
7. Исабекян Н. Г., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости анизотропного тела при плоском напряженном состоянии. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.