ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

Ю. Д. КОЛЫБИХИН, Г. Я. ПОПОВ

К ЗАДАЧЕ О КОЛЬЦЕВОМ ШТАМПЕ

Целью настоящей работы является упростить формулу, приведенную в работе [1] для приближенного решения интегрального уравнения контактной задачи для кольцевого штампа и показать, что к такому же интегральному уравнению приводятся следующие задачи: о неосесимметричном давлении на упругое трансверсально-изотропное полупространство кольцевого штампа; о кручении кольцевым штампом трансверсально-изотропного, либо ортотропного, полупространства; о кручении кольцевым штампом неоднородного упругого полупространства с модулем упругости, изменяющимся с глубиной по степенному закону.

§ 1. В работе [1] рассмотрена задача о вдавливании жесткого штампа кольцевого очертания в плане с поверхностью $z = g(r, \varphi)$ в упругое полупространство с переменным по степенному закону модулем упругости ($E = E_\nu z^\nu$).

Предполагая функцию $g(r, \varphi)$ представимой в виде

$$g(r, \varphi) = g_0(r) + \sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu(r) \cos \mu\varphi \tag{1.1}$$

а, стало быть, контактное напряжение в виде

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + \sum_{\mu=1}^{\infty} p_\mu(r) \cos \mu\varphi, \tag{1.2}$$

проблема отыскания контактных напряжений сформулирована в виде интегрального уравнения, которое является общим как для пространственной задачи о кольцевом штампе, так и для плоской контактной задачи с двумя участками контакта.

Это интегральное уравнение имеет вид

$$\int_b^a W_\mu^\nu(x, y)\, \varphi(y)\, dy = g(x), \quad (b \leqslant x \leqslant a) \tag{1.3}$$

где

$$W_\mu^\nu(x, y) = \int_0^\infty t^\nu J_\mu(tx)\, J_\mu(ty)\, dt$$

$J_\mu(z)$ — функция Бесселя.

При этом в случае кольцевого штампа следует положить

$$g(x) = g_\mu(r)\,\theta_\nu^{-1}, \quad p_\mu(r) = r^{-1}\varphi(r), \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{1.4}$$

Очевидно, случай $\mu = 0$ соответствует осесимметричному случаю. Если же штамп с плоским основанием находится под действием произвольной вертикальной нагрузки, то для отыскания контактного напряжения достаточно решить уравнения (1.3) при $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

В случае плоской симметричной задачи (вдавливание системы двух одинаковых штампов, расположенных симметрично относительно оси системы)

$$\begin{gathered} \mu = -\frac{1}{2}, \quad g(x) = x^{-\frac{1}{2}}(\theta_\nu^*)^{-1}v_+(x) \\ p_+(x) = x^{-\frac{1}{2}}\varphi(x) \end{gathered} \tag{1.5}$$

а при наличии косой симметрии

$$\begin{gathered} \mu = \frac{1}{2}, \quad g(x) = x^{-\frac{1}{2}}(\theta_\nu^*)^{-1}v_-(x) \\ p_-(x) = x^{-\frac{1}{2}}\varphi(x) \end{gathered} \tag{1.6}$$

θ_ν и θ_ν^* — константы, характеризующие упругие свойства неоднородного основания. Значения их приведены в работе [1].

В этой же работе предлагается приближенный способ решения интегрального уравнения (1.3), которое применительно к плоским основаниям штапов имеет вид:

$$\varphi_\mu(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^\mu \frac{x}{(a^2 - x^2)^w} + \sum_{k=0}^{n}\left\{E_{0k}^{n+}\left(\frac{x}{a}\right)^\mu \frac{P_k^\mu\left(\frac{x}{a}\right)x}{(a^2 - x^2)^w} + \right.$$

$$\left. + (a_{k0} + E_{0k}^{n-})\,\beta^w a\left(\frac{b}{x}\right)^{1+\mu} \frac{P_k^\mu\left(\frac{b}{x}\right)}{(x^2 - b^2)^w}\right\} \tag{1.7}$$

$$w = \frac{1-\nu}{2}, \quad \beta = \frac{b}{a}$$

$$P_k^\mu(x) = P_k^{\mu,\,-w}(1 - 2x^2) \text{ — полиномы Якоби}$$

$$a_{k0} = \beta^{1+\mu+w}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(w)_m}{m!}J_{mk}\,\beta^{2m}$$

$$J_{mk} = \frac{1 - w + \mu + 2k}{\Gamma(1 - w + k)}\left\{\frac{k!\,\Gamma(1 + \mu + k + m)\,\Gamma(w - k + m)}{(-1)^{k+1}\,\Gamma(1 + w + m)\,\Gamma(1 + w + \mu + m)} + \right.$$

$$+\sum_{n=0}^{k}\frac{(-k)_n\Gamma(1-w+\mu+k+n)}{n!\,\Gamma(1+\mu+n)(w+m-n)}\Bigg\}$$

$E_{0k}^{n\pm}$ — коэффициенты, которые вычисляются по рекуррентным формулам, приведенным в [1].

Интегралы от контактных напряжений имеют вид

$$J_0(\mu, w) = a^{1+\mu+\nu}\left\{b_0+\sum_{k=0}^{n}\left[E_{0k}^{n+}b_k+\beta^{w}\left(a_{k0}+E_{0k}^{n-}\right)c_k\right]\right\} \tag{1.8}$$

Коэффициенты b_k и c_k вычисляются по формулам [1].

Конкретизируем эти формулы для всех вышеупомянутых случаев.

а) Вдавливание внецентренно приложенной силой (эксцентриситет e) кольцевого штампа в упругое неоднородное полупространство.

Обозначим угол наклона штампа через ψ_ν, а осадку его — через δ_ν. Тогда вместо (1.1) будем иметь

$$g(r, \varphi) = \delta_\nu + \psi_\nu x = \delta_\nu + r\psi_\nu\cos\varphi \tag{1.9}$$

и, соответственно, контактное напряжение будет определяться согласно (1.2) формулой

$$p(r, \varphi) = p_0^\nu(r) + p_1^\nu(r)\cos\varphi \tag{1.10}$$

при этом согласно (1.4), (1.7) и (1.8)

$$p_0^\nu(r) = \frac{\delta_\nu 2^{1-\nu}}{\theta_\nu\Gamma^2(1-w)}\left.\frac{\varphi_n(r)}{r}\right|_{\mu=0,\ \nu}$$

$$p_1^\nu(r) = \frac{\psi_\nu 2^{1-\nu}}{\theta_\nu a\Gamma(2-w)\Gamma(1-w)}\left.\frac{\varphi_n(r)}{r}\right|_{\mu=1,\ \nu}$$

Используя условия равновесия штампа, определим осадку и угол поворота штампа при заданных P и e

$$\delta_\nu = \frac{P\Gamma^2(1-w)\theta_\nu}{2^{2-\nu}\pi J_0(0, w)}, \qquad \psi_\nu = \frac{Pea\theta_\nu\Gamma(2-w)\Gamma(1-w)}{2^{1-\nu}J_0(1, w)\pi} \tag{1.11}$$

Устремив в этих формулах $\nu\to 0$, получим аналогичные результаты для случая однородного упругого полупространства

$$\begin{aligned} p_0(r) &= \frac{\delta}{\theta_0}\frac{2}{\pi}\left.\frac{\varphi_n(r)}{r}\right|_{\mu=0,\ \nu=0}\\ p_1(r) &= \frac{\psi}{\theta_0}\frac{4}{\pi a}\left.\frac{\varphi_n(r)}{r}\right|_{\mu=1,\ \nu=0}\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\delta = \frac{P\theta_0}{4J_0\left(0, \frac{1}{2}\right)}, \qquad \psi = \frac{Pe\theta_0 a}{4J_0\left(1, \frac{1}{2}\right)} \tag{1.13}$$

б) Плоская симметричная задача с двумя участками контакта для неоднородного упругого полупространства

$$p^{\nu}_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\delta^{\nu}_{-\frac{1}{2}}\sqrt{a}\,2^{1-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-w\right)\Gamma(1-w)}\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{x}}\Bigg|_{\mu=-\frac{1}{2},\,\nu} \tag{1.14}$$

$\delta^{\nu}_{-\frac{1}{2}}$ — осадка штампов

$$\delta^{\nu}_{-\frac{1}{2}} = \frac{P\theta^{*}_{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-w\right)\Gamma(1-w)}{\sqrt{a}\,2^{2-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)J_0\left(-\frac{1}{2},\,w\right)}$$

P — прижимающая сила

в) Несимметричная задача с двумя участками контакта для неоднородного упругого полупространства.

$$p^{\nu}_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\theta^{*}_{\nu}2^{1-\nu}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\psi^{\nu}_{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}-w\right)\Gamma(1-w)}\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{x}}\Bigg|_{\mu=\frac{1}{2},\,\nu} \tag{1.15}$$

$\psi^{\nu}_{\frac{1}{2}}$ — угол наклона системы двух штампов.

$$\psi^{\nu}_{\frac{1}{2}} = \frac{L\Gamma\left(\frac{3}{2}-w\right)\Gamma(1-w)\theta^{*}_{\nu}}{2^{2-\nu}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)J_0\left(\frac{1}{2},\,w\right)}$$

$L = Pe$, P — внецентренно приложенная (эксцентриситет e) сила.

§ 2. Покажем, что к частным случаям интегрального уравнения (1.3) можно свести целый ряд других задач.

а) Сначала рассмотрим задачу о кручении нагрузкой $t(r)$ упругого полупространства с модулем упругости, изменяющимся с глубиной по степенному закону.

В этом случае будем иметь следующее дифференциальное уравнение для радиального перемещения v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\nu}{z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

Краевые условия задачи примем такими:

1) $\tau_{z\varphi}|_{z=0} = -t(r)$, $(0 \leqslant r < \infty)$, где $t(r)$ — осесимметричная радиальная нагрузка.

2) Компоненты смещений и напряжений остаются убывающими при $z \to \infty$ (из физических соображений).

Применяя преобразование Ханкеля по переменной r, получим решение краевой задачи

$$v(r, z) = \frac{2^{\frac{1+\nu}{2}}\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)z^{\frac{1-\nu}{2}}}{\mu^* \sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu)}\int_0^\infty Q(\xi)\,\xi^{\frac{1+\nu}{2}} J_1(\xi r) K_{\frac{1-\nu}{2}}(\xi z)\,d\xi \qquad (2.2)$$

$K_\nu(z)$ — функция Макдональда,
μ^* — постоянная Ламе,

$$Q(\xi) = \int_0^\infty t(r)\, r J_1(\xi r)\, dr$$

От нагрузки единичной интенсивности, распределенной вдоль окружности радиуса ρ по касательным в каждой точке окружности, которая описывается функцией Дирака $\delta(r-\rho)$, перемещения точек упругого неоднородного полупространства будут иметь вид

$$v^*(r, \rho, z) = \frac{2^{\frac{1+\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\mu^* \sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu)}\rho z^{\frac{1-\nu}{2}}\int_0^\infty \xi^{\frac{1+\nu}{2}} J_1(\xi r) J_1(\xi\rho) K_{\frac{1-\nu}{2}}(\xi z)\,d\xi \qquad (2.3)$$

Устремив в этой формуле $z \to 0$ и учитывая обозначения, получим поверхностные перемещения точек упругого неоднородного полупространства

$$v^*(r, \rho) = \frac{\Gamma(1-\nu)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\rho}{\Gamma(1+\nu)\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)2^\nu \mu^*} W_1^\nu(r, \rho) \qquad (2.4)$$

Воспользовавшись формулой (2.4), можно задачу о кручении кольцевым штампом с наружным радиусом a и внутренним b упругого неоднородного полупространства записать в виде такого интегрального уравнения:

$$\int_b^a W_1^\nu(r, \rho)\,\rho t(\rho)\, d\rho = \frac{r\varphi_1^*}{\theta_\nu^{(1)}} \qquad (2.5)$$

$$\theta_\nu^{(1)} = \frac{\Gamma(1-\nu)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)2^\nu \mu^*}$$

$t(r)$ — искомые контактные напряжения;
φ_1^* — угол поворота штампа.

Как видно, уравнение (2.5) является частным случаем уравнения (1.3), если в последнем положить

$$\mu = 1, \qquad g(x) = \frac{x\varphi_1^{\nu}}{\theta_{\nu}^{(1)}}, \quad \varphi(r) = rt(r) \tag{2.6}$$

Конкретизируем формулы для контактных напряжений и углов поворота для рассматриваемого случая

$$p_1^{\nu}(r) = \frac{\varphi_1^{\nu}}{\theta_{\nu}^{(1)}} \frac{2^{1-\nu}}{a\Gamma(2-w)\Gamma(1-w)} \frac{\varphi_n(r)}{r}\bigg|_{n=1,\nu} \tag{2.7}$$

$$\varphi_1^{\nu} = \frac{Ma\,\theta_{\nu}^{(1)}\Gamma(2-w)\Gamma(1-w)}{2^{1-\nu}J_0(1, w)\pi} \tag{2.8}$$

M — заданный крутящий момент.

Для кругового штампа ($b = 0$) уравнение (2.5) имеет точное решение. Используя для получения такового результата из [2], найдем

$$t(x) = \frac{2^{1-\nu}x}{\Gamma^2\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}\left\{\frac{\Phi(a)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\nu}}} - \int_x^a \frac{\Phi'(u)\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{1-\nu}}}\right\}$$

$$\Phi(a) = a^{-2-\nu}\frac{\varphi_1^{\nu}}{\theta_{\nu}^{(1)}}\frac{d}{da}\int_0^a \frac{s^3 ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{1-\nu}}} \tag{2.9}$$

Проделав вычисления, будем иметь

$$t(x) = \frac{3+\nu}{\theta_{\nu}^{(1)}2^{\nu}\Gamma\left(\frac{5+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}\frac{x\varphi_1^{\nu}}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\nu}}} \tag{2.10}$$

Из условий равновесия штампа определим угол φ_1^{ν} при заданном моменте M, после чего выражение для φ_1^{ν} подставим в (2.10).

Окончательно получим

$$t(x) = \frac{M(1+\nu)(3+\nu)}{4\pi a^{3+\nu}}\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\nu}}} \tag{2.11}$$

что совпадает с результатом, полученным в работе [3] иным путем.

б) Рассмотрим также неосесимметричную задачу о вдавливании кольцевого штампа с поверхностью $z = g(r, \varphi)$ в трансверсально-изотропное полупространство.

Для трансверсально-изотропного полупространства в случае осевой симметрии имеем [7]

$$w = \frac{\partial}{\partial z}(k_1\Phi_1 + k_2\Phi_2)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(k_1 c_{33} - \nu_1^2 c_{13})\,\Phi_1 + (k_2 c_{33} - \nu_2^2 c_{13})\,\Phi_2\right]$$

$$\tau_{rz} = c_{44}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left[(1 + k_1)\,\Phi_1 + (1 + k_2)\,\Phi_2\right]$$

где Φ_1 и Φ_2 — функции перемещений, которые находятся из уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \nu_i^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_i = 0, \quad (i = 1,\ 2)$$

k_1 и k_2 — значения, получающиеся из

$$\frac{c_{44} + k\,(c_{44} + c_{13})}{c_{11}} = \frac{k c_{33}}{(c_{44} + c_{13}) + k c_{44}} = \nu^2$$

соответственно значениям ν_1^2 и ν_2^2, которые в свою очередь вычисляются из уравнения

$$c_{11}c_{44}\nu^4 + \left[c_{13}\,(2c_{44} + c_{13}) - c_{11}c_{33}\right]\nu^2 + c_{33}c_{44} = 0$$

c_{kj} — коэффициенты анизотропии для трансверсально-изотропного тела (см. известную монографию [6]).

Используя интегральное преобразование Ханкеля, построим следующую формулу для определения вертикальных перемещений $w_1(r)$ поверхностных точек упругого трансверсально-изотропного полупространства от воздействия единичной вертикальной силы, приложенной в начале координат ($r = 0$, $z = 0$)

$$w_1(r) = \frac{k_2 - k_1}{(1 + k_2)\,\nu_1}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty J_0(rt)\,dt \tag{2.12}$$

В случае однородного упругого основания аналогичная формула имеет вид

$$w\ (r) = \frac{\theta}{2\pi}\int\limits_0^\infty J_0(rt)\,dt \tag{2.13}$$

Как видим, формулы совпадают с точностью до констант.

Используя тот факт, что трансверсально-изотропное полупространство в плоскостях, перпендикулярных оси z, является изотропным, составим по аналогии, как это сделано в работе [1], интегральное уравнение

$$\int\limits_b^a \rho W_\mu(r,\ \rho)\,p_\mu(\rho)\,d\rho = \frac{g_\mu(r)}{\theta_1}$$

$$\theta_1 = \frac{k_2 - k_1}{(1 + k_2)\,\nu_1}$$

которое, с одной стороны, является частным случаем интегрального уравнения (1.3), если в последнем положить

$$g(x) = g_{\mu}(r)\,\theta_1^{-1}, \quad p_{\mu}(r) = r^{-1}\varphi(r), \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{2.14}$$

а с другой стороны, совпадает с интегральным уравнением для упругого однородного полупространства с точностью до константы. Поэтому все формулы, ранее упоминавшиеся и те, которые будут рассматриваться в дальнейшем для упругого изотропного однородного полупространства, будут с точностью до константы совпадать с формулами для трансверсально-изотропного полупространства.

Получим, например, формулу для вычисления контактных напряжений при неосесимметричном вдавливании кругового штампа в трансверсально-изотропное полупространство.

Таковую можно получить следующими путями: либо решить интегральные уравнения (1.3) при $\mu = 0$ и $\mu = 1$, с учетом (2.14) и использованием для решения результата из работы [2], а затем использовать условия равновесия штампа для определения осадки и угла поворота штампа, либо использовать формулы (1.12), (1.13), положив в них вместо $\theta_0 \to \theta_1$ и устремив $b \to 0$.

Нами проделаны оба эти вычисления и получен результат

$$p^*(r, \varphi) = \frac{\delta^* 2}{\theta_1 \pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{\Psi^*}{\theta_1} \frac{4}{\pi a^2} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cos\varphi \tag{2.15}$$

$$\delta^* = \frac{P\theta_1}{4a}, \qquad \Psi^* = \frac{3Pe\theta_1}{8a} \tag{2.16}$$

который совпадает с результатом работы [5], полученным другим путем.

в) Наконец, рассмотрим случай кручения трансверсально-изотропного, либо ортотропного, полупространства кольцевым штампом.

Уравнение равновесия в перемещениях будет иметь вид

$$c_{55} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_{66}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) = 0$$

Используя аппарат интегральных преобразований Ханкеля, по аналогии, как это сделано в пункте „a“ настоящего параграфа, построим формулу для определения перемещений поверхностных точек упругого трансверсально-изотропного полупространства от нагрузки $\delta(r - \rho)$

$$v(r, \rho) = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{55}}}\, W_1(r, \rho)$$

Используя последнюю формулу, составим следующее интегральное уравнение для определения контактных напряжений $t(r)$:

$$\int\limits_b^a w_1(r,\rho)\,\rho t(\rho)\,d\rho = \frac{r\varphi_1}{\theta_1^{(1)}}$$

$$\theta_1^{(1)} = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{55}}} \tag{2.17}$$

которое также является частным случаем интегрального уравнения (1.3) при

$$\mu = 1,\ g(x) = \frac{x\varphi_1}{\theta_1^{(1)}},\quad \varphi(r) = rt(r) \tag{2.18}$$

В случае кручения рассматриваемого полупространства круговым штампом используем результат работы [2] и условия равновесия штампа, при этом получим

$$t(x) = \frac{3}{\theta_1^{(1)}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\frac{x\varphi_1}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{2.19}$$

Угол поворота равен

$$\varphi_1 = \frac{M\Gamma^2\left(\frac{5}{2}\right)\theta_1^{(1)}}{3a^3\pi} \tag{2.20}$$

§ 3. Рассмотрим несколько примеров для случая, когда $\nu \to 0$, что соответствует упругому однородному, либо трансверсально-изотропному, полупространству:

а) $\mu = 0$; $\beta = 0.6$ (осесимметричное вдавливание штампа),

б) $\mu = 1$; $\beta = 0.5$ (поворот штампа моментом при вдавливании, либо кручение штампа моментом).

Формулы для вычисления контактных напряжений и осадок запишем в таком виде:

$$p_\mu(t) = A_\mu \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-\beta^2)}}\Bigg\{t^\mu\sqrt{t^2-\beta^2}\times$$

$$\times\left[1+\sum_{k=0}^{n} E_{0k}^{n+} P_k^{\mu,-\frac{1}{2}}(1-2t^2)\right]+$$

$$+\frac{\beta^{\frac{1}{2}+\mu}}{t^{2+\mu}}\sqrt{1-t^2}\sum_{k=0}^{n}(a_{k0}+E_{0k}^{n-})P_k^{\mu,-\frac{1}{2}}\left(1-2\frac{\beta^2}{t^2}\right)\Bigg\} \tag{3.1}$$

$$A_0 = \frac{2\delta}{\delta_0\pi a},\quad A_1 = \frac{4\varphi_1}{\theta_0^{(1)}\pi a^2}$$

$$\delta = \frac{P\theta_0}{4J_0\left(0, \frac{1}{2}\right)}, \quad \varphi_1 = \frac{Ma\theta_0^{(1)}}{4J_0\left(1, \frac{1}{2}\right)}, \quad t = \frac{x}{a}$$

$$J_0\left(\mu, \frac{1}{2}\right) = a^{1+\mu}\left\{b_0 + \sum_{k=0}^{n} E_{0k}^{n+} b_k + \sqrt{\beta} \sum_{k=0}^{n} (a_{k0} + E_{0k}^{n-}) c_k\right\} \qquad (3.2)$$

$$\mu = 0.1$$

В случае трансверсально-изотропного полупространства вместо θ_0 следует положить θ_1.

Как показывают вычисления, для достаточно широких штампов решение интегрального уравнения (1.3) существенно упрощается, так как в этих случаях можно пренебречь в формулах (3.1), (3.2) наиболее трудно вычисляемыми членами, содержащими коэффициенты $E_{0k}^{n\pm}$, а это значит, что при вычислении контактных напряжений и осадок (либо углов поворота) нет необходимости в решении систем алгебраических уравнений, следует лишь вычислить коэффициенты первого столбца системы a_{k0}.

Сравнение результатов вычислений по формулам (3.1), (3.2), содержащим члены с $E_{0k}^{n\pm}$ и без них, показывают расхождения результатов для случая $\mu = 0$, $\beta = 0.6$ не более 3%, а для случая $\mu = 1$, $\beta = 0.5$ не более 0.5%. Еще меньше расхождение наблюдается при вычислении осадок и углов поворота для этих случаев.

Что касается степени точности формул (3.1), (3.2) для рассматриваемых нами примеров, то при вычислении можно ограничиться 2—3 приближениями. Расхождение результатов составит не более 5%. При вычислении же осадок и углов поворота уже первое приближение практически не отличается от нулевого, т. е. расхождеие равно $1-2\%$.

Следует отметить, что с ростом отношения β влияние коэффициентов $E_{0k}^{n\pm}$ постепенно возрастает.

в) В заключение сравним результаты вычислений контактных напряжений для случая поворота системы двух плоских штампов, расположенных на упругой полуплоскости симметрично относительно друг друга и подверженных воздействию момента $L\left(\mu = \frac{1}{2}, \beta = 0.5, w = \frac{1}{2}\right)$ по точной формуле [4]

$$p(t) = \frac{2(E - K + Kt^2)L}{\pi a^2 \sqrt{(t^2 - \beta^2)(1 - t^2)}\,[2(E - K) + K(\beta^2 + 1)]}$$

K и E — эллиптические интегралы I и II рода соответственно и приближенной формуле

$$p(t) = \frac{L}{2a^2 J_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\sqrt{(t^2-\beta^2)(1-t^2)}}\left\{t\sqrt{t^2-\beta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta}{t}\sqrt{1-t^2}\sum_{k=0}^{n} a_{k0}\frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} T_{2k+1}\left(\frac{\beta}{t}\right)\right\}$$

$T_k(t)$ — нечетные полиномы Чебышева.

(Коэффициентами E''_{0k} пренебрегаем).

Вычисления показывают, что для этого случая $J_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Сравнение результатов вычислений с точностью до $\frac{2}{\pi a^2\sqrt{(t^2-\beta^2)(1-t^2)}}$ приведено в табл. 1.

Таблица 1

t	Приближенное решение			Точное решение
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	
0.5	0.062	0.071	0.074	0.077
0.6	0.149	0.147	0.148	0.148
0.8	0.329	0.324	0.326	0.328
1.0	0.552	0.552	0.552	0.559

Одесский инженерно-строительный
институт

Поступила 23 IV 1969

Յ. Դ. ԿՈԼԻԲԻԽԻՆ, Գ. Յ. ՊՈՊՈՎ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԴՐՈՇՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են հետևյալ խնդիրները՝ ա) առաձգական, տրանսվերսալ-իզոտրոպ կիսատարածության վրա, օղակային դրոշմի ոչ-առանցքասիմետրիկ ճնշման մասին; բ) տրանսվերսալ-իզոտրոպ, կամ օրթոտրոպ կիսատարածության ոլորումը օղակային դրոշմով; գ) անհամասեռ առաձգական կիսատարածության, որի առաձգականության մոդուլը ըստ խորության փոփոխվում է աստիճանային օրենքով, ոլորումը օղակային դրոշմով: Օգտագործվում է հեղինակներից մեկի կողմից առաջարկված մեթոդը (ՀՍՍՀ ԳԱ Տեղեկագիր, «Մեխանիկա», հ. 20, № 2, 1967) տրված է նշված մեթոդի պարզեցումը:

U. D. GOLIBIKHIN, G. J. POPOV

ON THE CONTACT PROBLEM FOR ANNULAR PUNCH

Summary

The following contact problems have been considered. They are non symmetric pressure upon transversely isotropic halfspace of annular punch, torsion with annular punch transversely isotropic or orthotropic half-space, torsion with annular punch non-homogeneous half-space with varying module of elasticity (power law of change). A method recommended by one of the authors is used. (Известия АН Армянской ССР, „Механика", т. XX, № 2, 1967). A simplified version of the method is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.
2. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, т. 27, вып. 5, 1963.
3. *Проценко В. С.* Кручение упругого полупространства, модуль упругости которого изменяется по степенному закону. Прикл. механ., т. 3, вып. 11, 1967.
4. *Бегиашвили А. И., Тогонидзе В. Р.* Некоторое обобщение задачи давления системы жестких профилей на прямолинейную границу упругой полуплоскости. Тр. Груз. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, № 1 (86), 1963.
5. *Сунчелеев Р. Я.* Об одной контактной задаче для трансверсально-изотропного полупространства. Инж. ж. МТТ, № 1, 1968.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М-Л., 1950.
7. *Das A. K.* Indentation of a transversely isotropic semiinfinite medium by a certain type of axially symmetric rigid punch. Rev. mec.appl. (RPR), v. 8, № 2, 1963.