

А. А. БАБЛОЯН, С. М. МХИТАРЯН

К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ „ТРОЙНЫХ“ УРАВНЕНИЙ
С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Многие краевые задачи математической физики, например, смешанные (контактные) задачи теории упругости, сводятся к решению парных или тройных интегральных уравнений и рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции.

Исследованию и эффективному решению парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений с различными функциями, в том числе уравнений с тригонометрическими функциями, посвящены многие работы.

Исследованию же „тройных“ уравнений посвящено лишь несколько работ.

Насколько нам известно, до сих пор были рассмотрены только тройные ряды-уравнения, содержащие полиномы Лежандра [1], Якоби [2] и тройные интегральные уравнения, содержащие бесселевы функции $J_\nu(z)$ [3—6]. В указанных работах тройные уравнения сведены к решению регулярных уравнений Фредгольма. В частности, когда индекс бесселевой функции $\nu = \pm 1/2$, решения соответствующих уравнений с тригонометрическими функциями получены в замкнутом виде.

Настоящая заметка посвящена эффективному решению некоторых тройных интегральных уравнений и рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции. Приводимый ниже способ решения этих тройных уравнений заключается в сведении их к интегральным уравнениям первого рода с логарифмическими ядрами. Последние уравнения решаются известным методом М. Г. Крейна [7—9].

Будут рассматриваться тройные ряды-уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_k \Phi_k(t) &= 0 \quad (0 < t < \alpha) \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k(t) &= f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_k \Phi_k(t) &= 0 \quad (\beta < t < \pi) \end{aligned} \quad (1)$$

и тройные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \lambda^p A(\lambda) \Phi(\lambda t) d\lambda = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) \Psi(\lambda t) d\lambda = f(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^p A(\lambda) \Phi(\lambda t) d\lambda = 0 \quad (\beta < t < \infty)$$
(2)

где $p = \pm 1$, a_k и $A(\lambda)$ — неизвестные коэффициенты и функции, подлежащие определению, а числа λ_k и функции $\Phi_k(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ имеют один из следующих видов:

- 1) $\lambda_k = k$, $\Phi_k(t) = \sin kt$
 - 2) $\lambda_k = k - 1/2$, $\Phi_k(t) = \sin(k - 1/2)t$
 - 3) $\lambda_k = k - 1/2$, $\Phi_k(t) = \cos(k - 1/2)t$
 - 4) $\Phi(t) = \Psi(t) = \sin t$
 - 5) $\Phi(t) = 1 - \Psi(t) = \cos t$
- (3)

Отметим, что правые части уравнений (1) и (2) все могут быть ненулевыми функциями. Уравнения с такими правыми частями, однако, всегда можно привести к уравнениям вида (1) и (2).

Кроме того, будут рассматриваться тройные уравнения вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^p a_k \cos kt = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$

$$ca_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt = f(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^p a_k \cos kt = 0 \quad (\beta_1 < t < \pi)$$
(4)

Мы здесь подробно рассмотрим только случай $p = +1$.

Обратимся сперва к тройным уравнениям (1) для первого случая из (3).

Положив

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k \sin kt = h(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$
(5)

и принимая во внимание первое и третье соотношения (1) в указанном случае, по формуле Фурье находим

$$a_k = \frac{2}{\pi k} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} h(\tau) \sin k\tau d\tau \quad (6)$$

Подставляя выражения a_k из (6) во второе уравнение (1), после перестановки порядка суммирования и интегрирования для определения неизвестной функции $h(t)$ получим следующее интегральное уравнение первого рода:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln \left| \frac{\sin \frac{t+\tau}{2}}{\sin \frac{t-\tau}{2}} \right| h(\tau) d\tau = \pi f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \quad (7)$$

При этом была использована сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} = \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|} \quad (|t| < 2\pi)$$

Переходя к новым переменным

$$x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad s = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}$$

уравнение (7) приведем к виду

$$\int_a^b \ln \left| \frac{x+s}{x-s} \right| \varphi(s) ds = F(x) \quad (\alpha < x < \beta) \quad (8)$$

где введены следующие обозначения:

1)

$$\varphi(x) = \frac{h(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)}{1+x^2}, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} f(2 \operatorname{arctg} x)$$

$$a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Аналогичным образом, уравнения (1), для случаев 2)–4) из (3), приводятся к решению уравнения (8), где соответствующие обозначения имеют вид

2)

$$\varphi(x) = \frac{h(2 \operatorname{arc} \sin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1/2) a_k \sin(k-1/2)t$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} f(2 \operatorname{arc} \sin x), \quad a = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad b = \sin \frac{\beta}{2}, \quad (\alpha < t < \beta)$$

3)

$$\varphi(x) = \frac{h(2 \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1/2) a_k \cos(k-1/2)t$$

$$F(x) = -\frac{\pi}{2} f(2 \arccos x), \quad a = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad b = \cos \frac{\beta}{2}, \quad \alpha < t < \beta$$

4)

$$\varphi(x) = h(x), \quad h(t) = \int_0^{\pi} A(\lambda) \sin \lambda t d\lambda$$

$$F(x) = \pi f(x), \quad a = \alpha, \quad b = \beta, \quad \alpha < t < \beta$$

Тройные ряды-уравнения (4) и интегральные уравнения (2) для последнего случая из (3) при $p = +1$ сводятся к решению следующего интегрального уравнения первого рода:

$$\int_a^b \ln \frac{1}{|x-s|} \varphi(s) ds = F(x) \quad (a < x < b) \quad (9)$$

где для уравнений (4) вводятся обозначения

$$\varphi(x) = \frac{h(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \cos kt, \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$F(x) = -\pi f(\arccos x) - (c - \ln 2) \int_a^b \varphi(s) ds, \quad a = \cos \alpha, \quad b = \cos \beta$$

а для уравнений (2) — обозначения

$$\varphi(x) = x^{-1/2} h(\sqrt{x}), \quad h(t) = \int_0^{\pi} A(\lambda) \cos \lambda t d\lambda, \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$F(x) = -2\pi f(\sqrt{x}) - \int_a^b \varphi(s) \ln s ds, \quad a = \alpha^2, \quad b = \beta^2$$

Таким образом, все указанные тройные уравнения (1), (2) и (4) сводятся к решению либо уравнения (8), либо уравнения (9).

Следует отметить, что в принципе уравнение (8) можно свести к уравнению (9).

Решения уравнений (8) и (9) построим по методу М. Г. Крейна.

С этой целью сперва приведем решения интегральных уравнений (8) и (9) при правых частях, тождественно равных единице. Они даются соответственно соотношениями*

$$\frac{a}{\pi K(k)} \int_a^b \ln \left| \frac{x+s}{x-s} \right| \frac{ds}{V(b^2-s^2)(s^2-a^2)} = 1$$

$$\frac{2}{\pi \ln \frac{4}{b-a}} \int_a^b \ln \frac{1}{|x-s|} \frac{ds}{V(b-s)(s-a)} = 1 \quad (10)$$

где $k = a/b$, а $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Коль скоро известны решения интегральных уравнений (8) и (9) при правых частях, тождественно равных единице, решения этих же уравнений при произвольных непрерывных правых частях могут быть получены по формулам М. Г. Крейна [7—9]. Решения этих уравнений даются соответственно формулами

$$\varphi(x) = \frac{C}{V(b^2-x^2)(x^2-a^2)} - \frac{1}{\pi^2} \int_x^b \frac{udu}{K\left(\frac{a}{u}\right)V(u^2-x^2)(x^2-a^2)} \times$$

$$\times \frac{d}{du} \left\{ \frac{2(u^2-a^2)K^2\left(\frac{a}{u}\right)}{u} \frac{d}{du} \left[\frac{u}{K\left(\frac{a}{u}\right)} \int_a^u \frac{F(s)ds}{V(u^2-s^2)(s^2-a^2)} \right] \right\}$$

$$\varphi(x) = \frac{C_1}{V(b-x)(x-a)} - \frac{2}{\pi^2} \int_x^b \frac{du}{\ln \frac{4}{u-a} V(u-x)(x-a)} \times$$

$$\times \frac{d}{du} \left\{ (u-a) \left(\ln \frac{4}{u-a} \right)^2 \frac{d}{du} \left[\frac{1}{\ln \frac{4}{u-a}} \int_a^u \frac{F(s)ds}{V(u-s)(s-a)} \right] \right\}$$

где постоянные C и C_1 имеют следующие значения:

$$C = \frac{2(b^2-a^2)K\left(\frac{a}{b}\right)}{\pi^2 b} \frac{d}{db} \left[\frac{b}{K\left(\frac{a}{b}\right)} \int_a^b \frac{F(s)ds}{V(b^2-s^2)(s^2-a^2)} \right]$$

* Эти соотношения получены в монографии И. Я. Штаермана [10]. Совершенно элементарным способом они устанавливаются в неопубликованных материалах М. Г. Крейна по контактному задачам теории упругости. М. Г. Крейн любезно предоставил второму из авторов возможность ознакомиться с этими материалами.

$$C_1 = \frac{2(b-a) \ln \frac{4}{b-a}}{\pi^2} \frac{d}{db} \left[\frac{1}{\ln \frac{4}{b-a}} \int_a^b \frac{F(s) ds}{V(b-s)(s-a)} \right]$$

После определения функции $z(x)$, соответствующей определенному типу „тройных“ уравнений (1), (2) или (4), по введенным обозначениям будет определена функция $h(t)$, а затем по формулам Фурье — также и неизвестные коэффициенты a_k , или функция $A(\nu)$.

Если же $p = -1$, то во всех уравнениях (1)–(4) дифференцированием первых и третьих и интегрированием вторых соотношений эти уравнения приведем к уже рассмотренным случаям при $p = +1$. Постоянные, появившиеся при интегрировании уравнений, должны быть определены из условия ограниченности решений соответствующих интегральных уравнений первого рода.

В заключение отметим, что аналогичным способом, опираясь на результаты работ [10, 12], можно получить замкнутые решения для соответствующих систем из двух „тройных“ тригонометрических уравнений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 II 1969

Ա. Ա. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻՏՐԻԱՆ

ԵՐԱՆԿՅՈՒՆԱԶԱՓՈՒԿԱՆ ՀՈՒՆԿՑԻՈՆԵՐՈՎ ՄԻ ՔԱՆԻ «ԵՌԱԿԻ»
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄՈՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկվում են եռակի շարքեր և եռակի ինտեգրալ հավասարումներ (1–3) նրանց էֆեկտիվ լուծման տեսանկյունից: Այդ հավասարումները բերվում են լրգարիթմական կորիզներով առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների որոնք փակ տեսքով լուծվում են Մ. Գ. Կրկնի [7–9] մեթոդով:

A. A. BABLOYAN, S. M. MKHITARIAN

ON THE SOLUTION OF CERTAIN „TRIPLE“ EQUATIONS WITH TRIGONOMETRICAL FUNCTIONS

S u m m a r y

The solutions of certain „triple“ integral equations and series-equations containing trigonometrical functions are found. These „triple“ equations are reduced to integral equations of the first kind with loga-

rithmic kernels. The latter equations are solved by means of the Krain method.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Collins W. D. On some triple series equations and their applications. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, 1962, 122—137.
2. Srivastava K. N. On triple series equations involving series of Jacobi polynomials., *Proc. Edinb. Math. Soc.*, vol. 15 (Ser. II), part 3, 1967, 221—231.
3. Tranter C. J. Some triple integral equations. *Proc. Glasgow Ass.*, vol. 4, 1960 part 4, 200—203.
4. Cooke J. C. Triple integral equations. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, vol. 16, p. 2, 1963, 193—203.
5. Cooke J. C. Some further triple integral equations solutions. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, (2), 13, 1963, 303—316.
6. Sneddon J. N. Mixed boundary value problems in potential theory. North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1966.
7. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. *Докл. АН СССР*, т. 94, № 6, 1954, 987—990.
8. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. *Докл. АН СССР*, т. 100, № 3, 1955, 413—416.
9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967.
10. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М., 1949.
11. Мхитарян С. М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях. *Изв. АН Арм.ССР, Механика*, т. XXI, № 5—6, 1968.
12. Мухомелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, М., 1966.