ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 5, 1969 Механика

С. И. ЦАТУРЯН

К ЗАДАЧЕ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ДЛИННЫХ ГАЗОПРОВОДАХ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ РАСХОДЕ НА КОНЦЕ ТРУБЫ

В настоящее время существует хорошо разработанная теория одномерного неустановившегося движения газа и жидкости при линейном законе трения, когда колебания давления невелики по сравнению со стационарным. В случае длинного газопровода предположение о линейном законе является слишком грубым. Поэтому в данной работе рассматривается теоретическое исследование неустановившегося движения реальных газов при квадратичном законе трения в трубопроводах.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения газа. Начальные и граничные условия

Неустановившееся, изотермическое, однородное и одномерное движение газа в длинных цилиндрических газопроводах описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda u^2}{2D}, \qquad p = gRT\rho$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \qquad G = gS\rho u \tag{1.1}$$

где p, ρ, u — средние значения давления, плотности и скорости газа по сечению в газопроводе; λ — безразмерный коэффициент сопротивления; D — диаметр трубы; g — ускорение силы тяжести; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура газа; G — секундный весовой расход газа; x — текущая координата сечения S трубы, где определяются все газодинамические элементы (расход, давление, плотность и скорость) в момент времени t.

Пусть до момента времени $t=0$ движение газа — стационарное и задано в виде [2], т. е. при $t<0$

$$p = p_0(x) = \sqrt{p_н^2 - (p_н^2 - p_к^2)\frac{x}{L}}$$
$$\rho = \rho_0(x) = \frac{p_0(x)}{gRT} \tag{1.2}$$
$$u = u_0(x) = \frac{1}{p_0(x)}\sqrt{\frac{DgRT(p_н^2 - p_к^2)}{\lambda L}}$$

где $p_н$ и $p_к$ — соответственно давление газа в начале ($x = 0$) и в конце ($x = L$, L — длина газопровода) трубопровода при стационарном режиме работы. Из четвертого уравнения системы (1.1) и (1.2) имеем, что при $t \leqslant 0$

$$G = G_0 = S \sqrt{\frac{Dg\,(p_н^2 - p_к^2)}{\lambda LRT}} = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

Предположим, что в начале и конце газопровода заданы законы изменения весового газа как функции от времени, т. е.

$$\text{при} \quad x = 0 \qquad G = G_0 \tag{1.4}$$

$$\text{при} \quad x = L \qquad G = G_0 + G_1(t) \tag{1.5}$$

где $G_1(t)$ (заданная функция, обращающаяся в нуль при $t \leqslant 0$) показывает закон изменения расхода в конце газопровода.

В силу последних двух уравнений системы (1.1) первые два уравнения этой системы можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{RT\lambda}{DgS^2} G^2, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{2RT}{S} p \frac{\partial G}{\partial x} \tag{1.6}$$

где $P = p^2$.

Исключив P из системы уравнений (1.6), получим

$$\frac{\lambda}{DgS} G \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + p \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \tag{1.7}$$

С учетом выражения весового расхода из последних трех уравнений системы (1.1) имеем

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{gS} \int_0^t \frac{\partial G(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha + \rho_0(x) \tag{1.8}$$

$$p(x, t) = gRT\rho(x, t) \tag{1.9}$$

$$u(x, t) = \frac{G(x, t)}{gS\rho_0(x) - \int\limits_0^t \frac{\partial G}{\partial x}(x, \alpha)\, d\alpha} \tag{1.10}$$

Таким образом, полученная система уравнений (1.7)—(1.10) эквивалентна системе уравнений (1.1).

Далее, заменив в уравнении (1.7) величину $\frac{\lambda g S\rho u}{2D}$ ее средним значением в интервале изменения расхода, т. е.

$$\left(\frac{\lambda g S\rho u}{2D}\right) \simeq \left(\frac{\lambda g S\rho u}{2D}\right)_{ср} = b = \mathrm{const} \tag{1.11}$$

получим

$$\frac{2b}{gS}\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x}+p\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \tag{1.12}$$

Сущность настоящей работы заключается в следующем: заменить p в уравнении (1.12) его стационарным значением, т. е.

$$p\simeq p_0(x)=\sqrt{p_н^2-(p_н^2-p_к^2)\frac{x}{L}} \tag{1.13}$$

и решить систему уравнений (1.12) и (1.8)—(1.10) при начальных и граничных условиях (1.2)—(1.5) с целью определения газодинамических элементов в любом сечении газопровода и в любой момент времени.

До перехода к решению поставленной задачи отметим, что, исключив G из (1.6), с учетом (1.11) получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{b}{gSp}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{1.14}$$

Отметим также, что уравнение (1.14) решено в работе [3] Бабаджаняном Г. А. в предположении

$$p\simeq p_0(x)\approx\frac{1}{L}\int_0^L p_0(x)\,dx=\mathrm{const}$$

после чего с помощью системы (1.1) определены ρ, u и G.

§ 2. Решение системы уравнений (1.12) и (1.8)—(1.10) при начальных и граничных условиях (1.2)—(1.5)

В силу нашего предположения, т. е. $p=p_0(x)$, уравнение (1.12) примет вид

$$\frac{2b}{gSp_0(x)}\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-\frac{p_н^2-p_к^2}{2Lp_0^2(x)}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{2.1}$$

Решение системы уравнений (2.1) и (1.8)—(1.10) ищем в виде

$$\begin{aligned} &G(x,t)=G_0+G'(x,t), &&\rho(x,t)=\rho_0(x)+\rho'(x,t)\\ &p(x,t)=p_0(x)+p'(x,t), &&u(x,t)=u_0(x)+u'(x,t)\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $p_0(x)$, $\rho_0(x)$, $u_0(x)$ и G_0 определяются формулами (1.2) и (1.3), а $p'(x,t)$, $\rho'(x,t)$, $u'(x,t)$ и $G'(x,t)$ — соответственно добавочные значения давления, плотности, скорости и расхода к их значениям при $t\leqslant 0$, появляющиеся вследствие неустановившегося движения газа в трубе, причем эти функции являются конечными (не малыми).

Для удобства решения введем безразмерные величины, для этого положим

$$G' = G_0 G'^*, \qquad p = p_к p_0^*, \qquad \rho' = \rho_1 \rho'^*$$
$$x = Lx^*, \qquad p' = p_к p'^*, \qquad u = V u_0^* \tag{2.3}$$
$$t = t_0 t^*, \qquad \rho = \rho_1 \rho'^*, \qquad u' = V u'^*$$

где G_0, L, t_0, $p_к$, ρ_1 и V — соответственно характерные расход, длина, время, плотность и скорость. За характерное давление принято $p_к$; за характерный расход — G_0; за характерную длину — длина газопровода L.

В силу соотношений (2.2) и (2.3) из системы уравнений (2.1) и (1.8) — (1.10) для характерных времени, плотности и скорости получим следующие выражения:

$$t_0 = \frac{2bL^2}{gSp_к}, \qquad \rho_1 = \frac{p_к}{gRT}, \qquad V = \frac{G_0 RT}{p_к S} \tag{2.4}$$

Имея в виду (2.2), после перехода к безразмерным величинам система уравнений (2.1) и (1.8) — (1.10) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)\,x}} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{k^2 - 1}{2\,[k^2 - (k^2 - 1)\,x]} \frac{\partial G}{\partial x}$$

$$p = \rho = -a \int_0^t \frac{\partial G(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha \tag{2.5}$$

$$u = \frac{1 + G}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)\,x} - a \int\limits_0^t \frac{\partial G(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha} - \frac{1}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)\,x}}$$

где $k = \frac{p_н}{p_к} > 1$,

$$a = \frac{2bLRTG_0}{p_к^2 S^2 g} = \frac{2b}{p_к S} \left[\frac{LRTD(k^2 - 1)}{\lambda g} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

Здесь и в дальнейшем для простоты записи штрихи и звездочки опущены.

Начальные и граничные условия (1.2) — (1.5) с учетом (2.2) в безразмерных величинах будут

$$\begin{aligned} &1.\ \text{При}\ t \leqslant 0 \qquad G(x, t) = p(x, t) = \rho(x, t) = u(x, t) = 0 \\ &2.\ \text{При}\ x = 0 \qquad G(x, t) = 0 \\ &3.\ \text{При}\ x = 1 \qquad G(x, t) = G_1(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из системы уравнений (2.5) видно, что, если известен расход газа, то без труда можно определить как давление и плотность, так и скорость.

Сопоставляя систему уравнений (2.5) с системой уравнений (2.7) работы [4], легко заметить, что первые уравнения обеих систем совпадают. Следовательно, решение первого уравнения системы (2.5) с начальными и граничными условиями (2.7) имеем в работе [4], если предполагать, что $G_1(t)$ является периодической функцией с периодом T_1 (T_1 — суточное время), удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке $(0,\ T_1)$.

Только следует отметить, что если в работе [4] в формуле расхода безразмерное время определяется следующей формулой

$$t_1 = \frac{gP_{\text{к}}SD(k^2-1)^2 t}{4\lambda L^2 G_0} = \frac{1}{4}\left[\frac{gDRT(k^2-1)^3}{\lambda L^3}\right]^{\frac{1}{2}} t \tag{2.8}$$

то здесь оно определяется по формуле

$$t_1 = \frac{p_{\text{к}}gS(k^2-1)^2}{8bL^2}\, t \tag{2.9}$$

Выводы

1. Из выражений (2.8) и (2.9) видно, что если длина газопровода определяется из следующего соотношения

$$L = \frac{\lambda p_{\text{к}}^2 g S^2 (k^2-1)}{4b^2 DRT} \tag{2.10}$$

то расходы, определяемые здесь и в работе [4] полностью совпадают.

2. Если выполняется условие (2.10), то совпадают и вторые уравнения сопоставляемых систем уравнений.

3. Если выполняется условие (2.10), то одновременное применение частных линеаризаций (1.11) и (1.13) при определении расхода давления и плотности эквивалентно отбрасыванию произведения добавочных значений газодинамических элементов расхода, давления, плотности и скорости.

4. Что относится к третьим уравнениям обеих систем, то они не совпадают. Дело в том, что третье уравнение системы (2.5) получено из точного уравнения без всяких линеаризаций, а в работе [4] при получении третьего уравнения системы (2.7) отброшены произведения добавочных значений плотности и скорости к их стационарным значениям.

Тульский политехнический институт

Поступила 4 XII 1968

Ս. Ի. ԾԱՏՈՒՐՅԱՆ

ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂՆԵՐՈՒՄ ԳԱԶԻ ՉՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՇԱՐԺՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ, ԵՐԲ ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ՎԵՐՋՈՒՄ ԳԱԶԻ ԾԱԽՍԸ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ Է

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է՝ երկար գլանային խողովակներում իրական գազի չհաստատված շարժումը քառակուսային շփման օրենքի առկայության դեպքում, երբ գազի ծախսը գազամուղի սկզբում հաստատուն է, իսկ գազամուղի վերջում՝ փոփոխական։ Շարժման դիֆֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի մի հավասարման նկատմամբ կիրառելով մասնակի գծայնացում, հավասարումների սիստեմը բերվում է այն տեսքին, որն արդեն ստացված է [4] աշխատանքում։

Ցույց է տրվում, որ եթե գազամուղի երկարությունը բավարարում է որոշակի պայմանի, ապա գազի ծախսը, ճնշումը և խտությունը որոշելիս կիրառվող գծայնացումը համարժեք է նշված մեծությունների ստացիոնար արժեքների նկատմամբ լրացուցիչ արժեքների արտադրյալների մերժմանը։

S. I. TZATURIAN

THE PROBLEM OF TIME DEPENDENT FLOW OF GAS IN LONG GAS PIPES WITH ALTERNATIVE CONSUMPTION AT THE END OF THE PIPE

Summary

Real gas non-stationary flow in cylindrical pipes is dealt with in this paper. The quadric law of friction, constant consumption at the beginning and an alternating consumption at the end of the tube are assumed.

Applying partial linearization towards one of the flow differential equation systems, the equation system is brought to the form solved in the paper (4). Besides, it has been stated that if the gas pipe length satisfies certain conditions, then in determining consumption, pressure, and density the applied linearization is equivalent to the omission of additional value product of these elements with respect to their stationary values.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, М—Л, 1951.
2. *Смирнов А. С., Ширковский А. И.* Добыча и транспорт газа. Гостехиздат, 1957.
3. *Бабаджанян Г. А.* Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. Высших учебных заведений. „Нефть и газ", № 1, 1961.
4. *Цатурян С. И., Цой П. И.* Определение законов изменения расхода, давления, плотности и скорости газа вдоль длинного газопровода при нестационарном режиме работы. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 3, 1968.